

# ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΗΣ ΔΥΝΑΜΙΚΗΣ ΑΚΤΙΝΑΣ ΕΥΣΤΑΘΕΙΑΣ ΣΥΜΠΛΕΚΤΙΚΩΝ ΑΠΕΙΚΟΝΙΣΕΩΝ ΜΕ ΧΡΗΣΗ ΕΞΕΛΙΚΤΙΚΩΝ ΑΛΓΟΡΙΘΜΩΝ

Χρήστος Γ. Αντωνόπουλος<sup>1†</sup>, Γιάννης Γ. Πεταλάς<sup>2‡</sup>, Αναστάσιος Χ. Μπούντης<sup>3†</sup> και  
Μιχαήλ Ν. Βραχάτης<sup>4‡</sup>

<sup>†</sup>Κέντρο Έρευνας και Εφαρμογών Μη Γραμμικών Συστημάτων (CRANS),  
Τμήμα Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο Πατρών

<sup>‡</sup>Εργαστήριο Υπολογιστικής Νοημοσύνης (CILab),  
Κέντρο Έρευνας Τεχνητής Νοημοσύνης Πανεπιστημίου Πατρών (UPAIRC),  
Τμήμα Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο Πατρών

## Περίληψη

*Προτείνεται μια νέα μέθοδος για τον αριθμητικό υπολογισμό της «δυναμικής ακτίνας ευστάθειας» μη γραμμικών συμπλεκτικών απεικονίσεων. Τα βασικά συστατικά της προτεινόμενης μεθόδου είναι οι Διαφοροεξελικτικοί Αλγόριθμοι και η μέθοδος του Μικρότερου Δείκτη Ευθυγράμμισης (SALI). Η μέθοδος εφαρμόζεται στο πρόβλημα της εύρεσης της δυναμικής ακτίνας ευστάθειας της συμπλεκτικής απεικόνισης του Hénon στις 2 και 4 διαστάσεις αντίστοιχα.*

## 1. Εισαγωγή

Η σχεδίαση των μοντέρνων επιταχυντών σωματιδίων απαιτεί μια εκτεταμένη ανάλυση των μη γραμμικών επιδράσεων των μαγνητικών πεδίων που είναι απαραίτητες για την εστίαση της δέσμης λόγω των υφιστάμενων απωστικών δυνάμεων Coulomb μεταξύ των σωματιδίων. Ένα από τα σημαντικότερα ζητήματα που εμφανίζονται στους επιταχυντές υψηλής ενέργειας είναι η ευστάθεια των δεσμών σωματιδίων για μεγάλο αριθμό περιστροφών (long term stability). Με το θέμα αυτό σχετίζεται και η ανάγκη για τον προσδιορισμό της έκτασης μιας περιοχής κίνησης όσο μεγαλύτερης γίνεται, ώστε όλα της τα σημεία να αποτελούν ευσταθείς αρχικές συνθήκες για ένα πολύ μεγάλο αριθμό περιστροφών της δέσμης των σωματιδίων [9]. Με τον τρόπο αυτό εξασφαλίζεται ότι τα σωματίδια που κινούνται σε αυτήν την ευσταθή περιοχή παραμένουν εγκλωβισμένα σ' αυτήν για έναν μεγάλο αριθμό περιστροφών χωρίς να υπάρχει κίνδυνος διαφυγής τους και πρόκλησης σημαντικών ζημιών στο ίδιο τον επιταχυντή.

Παράδειγμα τέτοιων σύγχρονων επιταχυντών είναι οι κυκλικοί επιταχυντές στους οποίους τα φορτισμένα σωματίδια (πρωτόνια, ηλεκτρόνια, ιόντα, κλπ) διατηρούνται σε μια κυκλική τροχιά και επιταχύνονται υπό την επίδραση ηλεκτρομαγνητικών πεδίων. Η φυσική συμπεριφορά τέτοιων τύπων επιταχυντών εμπεριέχει διάφορα προβλήματα ευστάθειας της δέσμης. Η δέσμη αυτή κινείται κυκλικά μέσα στη μηχανή για έναν περιορισμένο χρονικό διάστημα (συνήθως για κάποιες ώρες) διαγράφοντας έναν μεγάλο αριθμό περιστροφών

<sup>1</sup> Τηλ: 2610 997490, fax: 2610 997381, e-mail: antonop@math.upatras.gr

<sup>2</sup> Τηλ: 2610 997348, fax: 2610 992965, e-mail: petalas@math.upatras.gr

<sup>3</sup> Τηλ: 2610 997381, fax: 2610 997381, e-mail: bountis@math.upatras.gr

<sup>4</sup> Τηλ: 2610 997374, fax: 2610 992965, e-mail: vrahatis@math.upatras.gr

(revolutions) εξαιτίας της ταχύτητάς τους η οποία πλησιάζει την ταχύτητα του φωτός. Για τον επιταχυντή LHC (Large Hadron Collider) για παράδειγμα, ο οποίος βρίσκεται στον Ευρωπαϊκό Οργανισμό Πυρηνικής Έρευνας (CERN) στη Γενεύη της Ελβετίας, και έχει μήκος 27 χιλιόμετρα, μια περιστροφή απαιτεί χρόνο της τάξης των  $10^{-4}$  δευτερολέπτων, οπότε σε ένα τυπικό πείραμα τα σωματίδια εκτελούν  $10^8$  στροφές [14]. Επομένως, είναι κρίσιμο για αυτόν τον αριθμό των περιστροφών η κίνηση της δέσμης των σωματιδίων να παραμένει ευσταθής.

Τα παραπάνω σημαντικά ζητήματα που αναφέρονται κατά τη λειτουργία των επιταχυντών, μπορούν να μελετηθούν σε επίπεδο προσομοίωσης και μοντελοποίησης με τεχνικές και γνώσεις από την θεωρία των μη γραμμικών δυναμικών συστημάτων. Η κίνηση σε ένα επίπεδο που τέμνει εγκάρσια την τροχιά κίνησης ενός σωματιδίου, ονομάζεται κίνηση betatron, και μπορεί να μοντελοποιηθεί από μια Χαμιλτόνια συνάρτηση 2 βαθμών ελευθερίας, με μια περιοδική εξάρτηση στο αζιμούθιο  $s$  κατά μήκος της μηχανής. Ένα απλό μοντέλο μη γραμμικής κίνησης betatron μπορεί να δοθεί μέσω συμπλεκτικών μη γραμμικών απεικονίσεων.

Συγκεκριμένα, στο θέμα που παρουσιάζεται στο άρθρο αυτό μελετώνται συμπλεκτικές (Χαμιλτόνιες) απεικονίσεις του Hénon, οι οποίες περιγράφουν τις επιδράσεις που υφίσταται ένα σωματίδιο κινούμενο σε ένα μαγνητικό στοιχείο ενός κυττάρου τύπου FODO [9, 17]. Οι μεταβλητές  $x$  και  $y$  είναι οι παρεκκλίσεις των σωματιδίων από την ιδανική (κυκλική) τροχιά στην οριζόντια και κάθετη διεύθυνση αντίστοιχα και  $p_x$ ,  $p_y$  είναι οι αντίστοιχες ορμές τους. Οι μεταβλητές  $\nu_x$  και  $\nu_y$  είναι οι δύο συχνότητες του επιταχυντή (καλούνται και tunes) και η μεταβολή τους καθορίζει τις διάφορες μορφές που μπορεί να λάβει η συμπλεκτική μη γραμμική απεικόνιση. Θα ήταν πολύ σημαντικό για την εκτέλεση των πειραμάτων να είναι γνωστές αυτές οι συχνότητες που θα εξασφαλίσουν στα σωματίδια ευσταθή κίνηση για ένα μεγάλο αριθμό περιστροφών, για παράδειγμα της τάξης των  $10^8$ .

Στην παρούσα μελέτη θα χρησιμοποιηθούν οι παρακάτω συμπλεκτικές μη γραμμικές απεικονίσεις [2, 15, 16, 17] του Hénon:

1. η 2-διάστατη απεικόνιση

$$\begin{aligned} x' &= \cos(2\pi\nu_x)x + \sin(2\pi\nu_x)(p_x + x^2) \\ p_x' &= -\sin(2\pi\nu_x)x + \cos(2\pi\nu_x)(p_x + x^2) \end{aligned} \quad (1.1)$$

2. και η 4-διάστατη απεικόνιση

$$\begin{aligned} x' &= \cos(2\pi\nu_x)x + \sin(2\pi\nu_x)(p_x + (x^2 - y^2)) \\ p_x' &= -\sin(2\pi\nu_x)x + \cos(2\pi\nu_x)(p_x + (x^2 - y^2)) \\ y' &= \cos(2\pi\nu_y)y + \sin(2\pi\nu_y)(p_y - 2xy) \\ p_y' &= -\sin(2\pi\nu_y)y + \cos(2\pi\nu_y)(p_y - 2xy) \end{aligned} \quad (1.2)$$

Στην παρούσα εργασία προτείνεται μια νέα μέθοδος για τον προσδιορισμό της δυναμικής ακτίνας ευστάθειας (dynamic aperture) μιας συμπλεκτικής απεικόνισης. Ως δυναμική ακτίνα ευστάθειας ορίζεται η ακτίνα της υπερσφαίρας της οποίας ο όγκος είναι ίσος με τον όγκο που καταλαμβάνει η «μεγαλύτερη δυνατή» επιφάνεια («σύνορο ευστάθειας» της απεικόνισης) του οποίου τα σημεία αποτελούν ευσταθείς αρχικές συνθήκες για ένα πολύ μεγάλο αριθμό

επαναλήψεων της μη γραμμικής απεικόνισης, π.χ. της τάξης των  $10^8$ . Ισοδύναμα, δυναμική ακτίνα ευστάθειας είναι η μέση απόσταση των σημείων αυτής της «υπερεπιφάνειας» από το κεντρικό ελλειπτικό σημείο της απεικόνισης. Η γνώση αυτής της ακτίνας αποτελεί μια ένδειξη του μεγέθους της περιοχής ευστάθειας της απεικόνισης γύρω από το κεντρικό ελλειπτικό της σημείο.

Αρχικά, θα παρουσιαστούν οι Διαφοροεξελικτικοί Αλγόριθμοι [3, 13], οι οποίοι σε συνδυασμό με τη μέθοδο του SALI [1, 11, 12] αποτελούν κύρια συστατικά της παρούσας μελέτης. Στη συνέχεια, θα περιγραφεί η προτεινόμενη μεθοδολογία και θα δοθούν τα πειραματικά της αποτελέσματα στην δισδιάστατη και τετραδιάστατη περίπτωση.

## 2. Διαφοροεξελικτικοί αλγόριθμοι

Οι Διαφοροεξελικτικοί Αλγόριθμοι (ΔΑ) [3] είναι ευρεστικοί αλγόριθμοι ολικής βελτιστοποίησης οι οποίοι χρησιμοποιούν ένα σύνολο από υποψήφιας (πιθανές) λύσεις του προβλήματος. Στην ορολογία των ΔΑ, το σύνολο των υποψηφίων λύσεων ονομάζεται πληθυσμός και η κάθε υποψήφια λύση άτομο.

Οι ΔΑ ανήκουν στην κατηγορία των Εξελικτικών Αλγορίθμων (ΕΑ). Οι ΕΑ είναι ευρεστικοί αλγόριθμοι εμπνευσμένοι από τη βιολογική εξέλιξη και χρησιμοποιούν τους μηχανισμούς της, όπως τη *διασταύρωση*, τη *μετάλλαξη* και τη *φυσική επιλογή*. Οι πιθανές λύσεις του προβλήματος αντιστοιχούν στα *άτομα* ενός πληθυσμού και η αντικειμενική συνάρτηση ή συνάρτηση κόστους ή συνάρτηση αξιολόγησης καθορίζει το περιβάλλον μέσα στο οποίο ζει ο πληθυσμός αυτός. Η εξέλιξη του πληθυσμού πραγματοποιείται με την επαναληπτική εφαρμογή των μηχανισμών που αναφέρθηκαν παραπάνω. Παραδείγματα ΕΑ αποτελούν οι Γενετικοί Αλγόριθμοι [7], οι Εξελικτικές Στρατηγικές [10] και ο Γενετικός Προγραμματισμός [8].

Το κυριότερο χαρακτηριστικό τους έγκειται στο γεγονός ότι μπορούν να εφαρμοστούν σε προβλήματα βελτιστοποίησης στα οποία οι αντικειμενικές συναρτήσεις τους δεν είναι παραγωγίσιμες, μπορεί επίσης να παρουσιάζουν ασυνέχειες ή και να έχουν πολλά τοπικά ακρότατα.

Συμπερασματικά λοιπόν, οι ΔΑ παρουσιάζουν γενικά πολύ καλή απόδοση και χαρακτηρίζονται από τα παρακάτω πλεονεκτήματα:

1. Μπορούν να εφαρμοστούν σε μη παραγωγίσιμες ή / και μη συνεχείς συναρτήσεις.
2. Λειτουργούν αποδοτικά ακόμα και όταν οι αντικειμενικές συναρτήσεις μεταβάλλονται δυναμικά με το χρόνο ή υπόκεινται σε θόρυβο.
3. Μπορούν να εφαρμοστούν σε προβλήματα ακέραιου, διακριτού και μικτού μαθηματικού προγραμματισμού.
4. Μπορούν να παραλληλοποιηθούν εύκολα.

Στη συνέχεια, θα δοθεί η περιγραφή τους. Στην ουσία πρόκειται για ένα επαναληπτικό αλγόριθμο του οποίου κάθε επανάληψη ονομάζεται γενιά του πληθυσμού και μπορεί συνοπτικά να περιγραφεί με τα εξής βήματα:

**Βήμα 1. Αρχικοποίηση.** Αρχικοποίηση των ατόμων του πληθυσμού  $u_g^i$  όπου  $i$  δηλώνει το  $i$ -οστό άτομο του πληθυσμού και  $g$  δηλώνει την τρέχουσα γενιά του πληθυσμού. Το κάθε άτομο εκφράζεται από ένα διάνυσμα διάστασης ίσης με την διάσταση του χώρου μέσα στον οποίο αναζητείται η βέλτιστη λύση. Η αρχικοποίηση των ατόμων του πληθυσμού συνήθως πραγματοποιείται δίνοντας τους τυχαίες τιμές μέσα σε κάποιο διάστημα. Στο βήμα αυτό δίνονται επίσης τιμές σε δυο παραμέτρους  $F$  και  $CR$  που χρησιμοποιούνται από τον αλγόριθμο. Η παράμετρος  $F$  ονομάζεται *παράγοντας μετάλλαξης* και η  $CR$  *παράγοντας διασταύρωσης*. Παίρνουν τιμές στο διάστημα  $[0,1]$  και παραμένουν σταθερές καθ' όλη τη διάρκεια εξέλιξης του

αλγορίθμου. Τέλος, καθορίζεται και η αντικειμενική συνάρτηση του προβλήματος.

**Βήμα 2. Μετάλλαξη.** Για κάθε ένα άτομο του τρέχοντος πληθυσμού  $u_g^i$  (το ονομάζουμε και άτομο-στόχο) σχηματίζεται ένα αντίστοιχο άτομο  $v_g^i$  (άτομο-δοκιμαστικό) εφαρμόζοντας κάποιον από τους παρακάτω τελεστές:

$$\begin{aligned} v_g^i &= u_g^{r_1} + F(u_g^{r_2} - u_g^{r_3}) \\ v_g^i &= u_g^{r_1} + F(u_g^{r_1} - u_g^{r_2}) \\ v_g^i &= u_g^{best} + F(u_g^{r_1} - u_g^{r_2}) \\ v_g^i &= u_g^i + F(u_g^i - u_g^{best}) + F(u_g^{r_1} - u_g^{r_2}) \\ v_g^i &= u_g^{best} + F(u_g^{r_1} - u_g^{r_2}) + F(u_g^{r_3} - u_g^{r_4}) \end{aligned}$$

όπου  $r_1, r_2, r_3, r_4$  είναι τυχαίοι ακέραιοι αριθμοί τέτοιοι ώστε  $r_1 \neq r_2 \neq r_3 \neq r_4 \neq i \neq best$  όπου  $best$  είναι ο δείκτης του βέλτιστου ατόμου.

**Βήμα 3. Διασταύρωση.** Για κάθε ένα στοιχείο  $j$  του δοκιμαστικού ατόμου  $v_g^i$  επιλέγεται τυχαία ένας αριθμός  $r$  στο διάστημα  $[0,1]$ . Αν ο αριθμός αυτός είναι μεγαλύτερος από τη σταθερά  $CR$ , τότε το στοιχείο αυτό παίρνει την αντίστοιχη τιμή του στοιχείου του διανύσματος στόχου, δηλ. εάν  $r > CR$ , τότε  $v_g^{i,j} = u_g^{i,j}$ .

**Βήμα 4. Επιλογή.** Μετά την εφαρμογή των βημάτων της μετάλλαξης και της διασταύρωσης έχει προκύψει το τελικό δοκιμαστικό άτομο. Στη φάση αυτή αξιολογούνται το άτομο-στόχος και το αντίστοιχο άτομο-δοκιμαστικό, με τη χρήση της αντικειμενικής συνάρτησης. Το βέλτιστο άτομο θα συνεχίσει στην επόμενη γενιά του πληθυσμού, δηλ.  $u_{g+1}^i = \arg \max \{f(u_g^i), f(v_g^i)\}$ . Ο αλγόριθμος τερματίζεται όταν ικανοποιηθεί κάποιο κριτήριο τερματισμού ή όταν όλα τα άτομα του πληθυσμού έχουν συγκλίνει σε ορισμένες τιμές και έχει χαθεί η ποικιλομορφία του. Μέχρι τον τερματισμό του αλγορίθμου επαναλαμβάνονται τα βήματα 2-4.

### 3. Μικρότερος δείκτης ευθυγράμμισης (SALI)

Η μέθοδος του *Μικρότερου Δείκτη Ευθυγράμμισης* (Smaller Alignment Index) παρουσιάστηκε για πρώτη φορά στο [11] και έχει εφαρμοστεί με μεγάλη επιτυχία στον διαχωρισμό οργανωμένων και χαοτικών τροχιών σε απεικονίσεις διαφόρων διαστάσεων, σε Χαμιλτωνιανά συστήματα [1, 11, 12], καθώς και σε προβλήματα ουράνιας μηχανικής, γαλαξιακής δυναμικής, θεωρίας πεδίου και μη γραμμικών μονοδιάστατων πλεγμάτων.

Για τις ανάγκες της μελέτης αυτής θα περιορισθούμε στην περίπτωση των απεικονίσεων, παρόλο που η μέθοδος του SALI μπορεί εύκολα να εφαρμοστεί και στην περίπτωση των Χαμιλτωνίων δυναμικών συστημάτων. Έτσι, λοιπόν, ας θεωρήσουμε τον  $M$ -διάστατο χώρο φάσεων ενός συντηρητικού δυναμικού συστήματος όπως για παράδειγμα αυτόν μιας συμπλεκτικής απεικόνισης. Σ' αυτήν την περίπτωση, η αρχική συνθήκη  $\vec{X}^0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_M^0)$  της απεικόνισης εξελίσσεται σύμφωνα με τις εξισώσεις κίνησης, οι οποίες δίνονται ως

$$\vec{X}^{n+1} = \vec{F}(\vec{X}^n) \quad (1.3)$$

όπου  $n$  είναι ο αριθμός των επαναλήψεων της απεικόνισης και  $\vec{X}^{n+1} = (x_1^{n+1}, x_2^{n+1}, \dots, x_M^{n+1})$  είναι η

$n+1$  επανάληψή της.

Εάν υποθέσουμε ότι ενδιαφερόμαστε για τον προσδιορισμό της χασοτικής ή οργανωμένης φύσης μιας τροχιάς της απεικόνισης με αρχική συνθήκη  $\vec{X}^0$ , μπορούμε να ακολουθήσουμε την εξέλιξη δύο αρχικά γραμμικώς ανεξάρτητων διανυσμάτων απόκλισης  $\vec{V}_1^0, \vec{V}_2^0$  τα οποία «δείχνουν» σε δύο διαφορετικές γειτονικές τροχιές της τροχιάς αναφοράς. Αυτή η εξέλιξη δίνεται από τις λεγόμενες εφαπτομενικές εξισώσεις (tangent map equations) οι οποίες έχουν την μορφή

$$\vec{V}_i^{n+1} = DF(\vec{X}^n) \cdot \vec{V}_i^n, i = 1, 2 \quad (1.4)$$

όπου  $\vec{V}_i^n = (dv_{i,1}^n, dv_{i,2}^n, \dots, dv_{i,M}^n)$  και  $DF(\vec{X}^n)$  είναι ο Ιακωβιανός πίνακας των εξισώσεων κίνησης (1.3).

Ο προσδιορισμός του Μικρότερου Δείκτη Ευθυγράμμισης (SALI) επιτυγχάνεται υπολογίζοντας την ποσότητα

$$\text{SALI}(n) = \min \left\{ \left\| \frac{\vec{V}_1^n}{\|\vec{V}_1^n\|} + \frac{\vec{V}_2^n}{\|\vec{V}_2^n\|} \right\|, \left\| \frac{\vec{V}_1^n}{\|\vec{V}_1^n\|} - \frac{\vec{V}_2^n}{\|\vec{V}_2^n\|} \right\| \right\} \quad (1.5)$$

όπου  $\|\cdot\|$  δηλώνει την Ευκλείδεια απόσταση.

Σύμφωνα με τον παραπάνω ορισμό διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

- Εάν η τροχιά με αρχική συνθήκη  $\vec{X}^0$  είναι χασοτική, τότε τα δύο διανύσματα απόκλισης τείνουν να ταυτιστούν με την διεύθυνση της περισσότερο ασταθούς γειτονικής διεύθυνσης και η οποία αντιστοιχεί στον μέγιστο εκθέτη Lyapunov της τροχιάς. Τότε, ο SALI τείνει εκθετικά γρήγορα στο μηδέν με κλίση η οποία εξαρτάται από την διαφορά των δύο μεγαλύτερων εκθετών Lyapunov.
- Εάν τώρα η τροχιά με αρχική συνθήκη  $\vec{X}^0$  είναι οργανωμένη (ημιπεριοδική), τότε δεν υπάρχει ασταθής γειτονική διεύθυνση αφού ο μέγιστος εκθέτης Lyapunov της τροχιάς είναι μηδενικός. Σ' αυτήν την περίπτωση τα δύο διανύσματα απόκλισης τείνουν να γίνουν εφαπτόμενα στον τόρο στον οποίο η τροχιά είναι περιορισμένη και εν γένει έχουν διαφορετικές διευθύνσεις. Αυτή η συμπεριφορά έχει σαν συνέπεια, ο SALI να παρουσιάζει μικρές διακυμάνσεις γύρω από μη μηδενικές τιμές. Υπάρχει, φυσικά, μια εξαίρεση στις 2-διάστατες απεικονίσεις όπου ο SALI τείνει στο μηδέν και στην οργανωμένη περίπτωση αλλά με ρυθμό πτώσης νόμου δύναμης  $n^{-1}$  και όχι εκθετική.

Είναι φανερό, επομένως, ότι το SALI συμπεριφέρεται με διαφορετικό τρόπο στις δύο περιπτώσεις των χασοτικών και οργανωμένων τροχιών ο οποίος τον καθιστά ένα δυνατό, απλό και εύκολα υλοποιήσιμο αλγόριθμο ο οποίος ταιριάζει πλήρως σε πολυδιάστατα δυναμικά συστήματα.

#### 4. Διάσταση συσχέτισης

Η διάσταση συσχέτισης (correlation dimension)  $D_2$  ενός συνόλου σημείων ορίζεται ως

$$C_2^{(d)}(r) \propto r^{D_2}, r \rightarrow 0, \quad (1.6)$$

δηλ. δίνεται σαν μια έκφραση νόμου δύναμης με το ολοκλήρωμα συσχέτισης  $C_2^{(d)}(r)$  το οποίο σύμφωνα με τους Grassberger και Procaccia [4,5] ορίζεται από την σχέση

$$C_2^{(d)}(r) = \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{2}{(M-W)(M-W-1)} \sum_{i=1}^{M-W-1} \sum_{j=i+W+1}^M \Theta(r - \|X^{(i)} - X^{(j)}\|) \quad (1.7)$$

Ο δείκτης  $d$  είναι η διάσταση του χώρου φάσεων, η παράμετρος  $W$  ονομάζεται παράθυρο του Theiler και είναι απαραίτητη για την αποφυγή της επίδρασης χρονικά συσχετισμένων μεταξύ τους σημείων.  $\Theta$  είναι η συνάρτηση Heavyside και  $M$  είναι τα σημεία της τροχιάς της οποίας θέλουμε να υπολογίσουμε την διάσταση συσχέτισης. Ο παραπάνω τύπος (1.7) εκφράζει τον λόγο των αποστάσεων μεταξύ των σημείων που είναι μικρότερος από  $r$  προς το συνολικό αριθμό αποστάσεων μεταξύ όλων των σημείων αποφεύγοντας βέβαια τα χρονικά συσχετισμένα σημεία.

Από τη σχέση (1.6) προκύπτει με απευθείας λογαρίθμιση ότι η διάσταση συσχέτισης  $D_2$  δίνεται από τη σχέση

$$D_2(r) \propto \frac{\log C_2^{(d)}(r)}{\log r}. \quad (1.8)$$

Αν η διάσταση αυτή είναι ένας θετικός ακέραιος,  $l$ , αυτό σημαίνει ότι η πολλαπλότητα στην οποία κείται η τροχιά είναι ένας τοπικά Ευκλείδειος χώρος διάστασης  $l$ , όπως ακριβώς συμβαίνει στην περίπτωση σχεδόν-περιοδικής κίνησης πάνω σε ένα τόρο. Αν όμως το  $D_2$  είναι μη ακέραιος τότε συμπεραίνουμε ότι η ομαλότητα της επιφάνειας κίνησης έχει καταστραφεί και η τροχιά διαγράφει ένα πολύ πιο πολύπλοκο σύνολο σημείων. Η τελευταία αυτή περίπτωση αφορά σε τροχιές που κινούνται στα όρια των ευσταθών περιοχών κοντά σε αρχικές συνθήκες που οδηγούν σε διαφυγή στο άπειρο.

Υπάρχουν δύο βασικοί τρόποι για να προσδιορισθεί η  $D_2$ : Σύμφωνα με τον πρώτο, αρκεί ο υπολογισμός της κλίσης της συνάρτησης  $\frac{\log C_2^{(d)}(r)}{\log r}$  ως προς  $\log r$ . Στο γράφημα που προκύπτει επικεντρωνόμαστε στο διάστημα εκείνο των μικρών  $r$  όπου εμφανίζεται μια οριζόντια κατά το δυνατόν «ευθεία» γραμμή η οποία αποκαλείται και “plateau”. Σύμφωνα με τον δεύτερο τρόπο, αρκεί ο υπολογισμός της κλίσης και πάλι της συνάρτησης  $\log C_2^{(d)}(r)$  ως προς το  $\log r$ . Στο γράφημα που προκύπτει εμφανίζεται μια πλάγια «ευθεία» της οποίας μας ενδιαφέρει η κλίση.

## 5. Προτεινόμενη μεθοδολογία

Σε αυτήν την ενότητα δίνεται η περιγραφή της προτεινόμενης μεθοδολογίας για την εύρεση της ακτίνας δυναμικής ευστάθειας μιας συμπλεκτικής απεικόνισης. Σκοπός της είναι η εύρεση ενός σημείου του χώρου φάσεων που βρίσκεται προσεγγιστικά κοντά στο «σύνορο ευστάθειας» της απεικόνισης. Η εφαρμογή της μη γραμμικής απεικόνισης για ένα μεγάλο αριθμό επαναλήψεων, με αρχική συνθήκη το σημείο αυτό, θα δημιουργήσει ένα σύνολο σημείων το οποίο θα αποκαλούμε «αντικείμενο», και θα θεωρούμε ως το μεγαλύτερο δυνατό σύνορο ευστάθειας του χώρου φάσεων που εξετάζουμε.

Η μεθοδολογία στηρίζεται στους ΔΑ και στην μέθοδο του SALI. Τα άτομα του ΔΑ είναι σημεία στο χώρο φάσεων του δυναμικού συστήματος και θα χρησιμοποιηθούν ως κατευθύνσεις από τη μέθοδο του SALI. Ειδικότερα, κάθε σημείο των παραπάνω διευθύνσεων αποτελεί και μια αρχική συνθήκη της μεθόδου του SALI, η οποία και θα προσδιορίζει εάν αυτή αντιστοιχεί σε οργανωμένη ή χαοτική τροχιά. Όταν η μέθοδος του SALI προσδιορίσει την πρώτη αρχική συνθήκη που δίνει χαοτική τροχιά ( $SALI < 10^{-8}$ ) πάνω σε κάποια διεύθυνση, τότε αποθηκεύουμε το συγκεκριμένο σημείο. Αυτό αποτελεί ένδειξη προσέγγισης του «συνόρου ευστάθειας» της απεικόνισης. Η αντικειμενική συνάρτηση του προβλήματος στην περίπτωση αυτή είναι η απόσταση ανάμεσα στο ελλειπτικό σημείο που βρίσκεται στην αρχή (κέντρο) του συστήματος συντεταγμένων και στο παραπάνω σημείο. Η λειτουργία του ΔΑ έχει ως στόχο την

εύρεση της βέλτιστης (ελάχιστης ή μέγιστης) απόστασης ανάμεσα στο ελλειπτικό σημείο και στο «σύνορο ευστάθειας».

Στην αρχή του αλγορίθμου, τα άτομα του πληθυσμού του ΔΑ αποτελούν τυχαία σημεία του χώρου φάσεων. Κάθε τέτοιο άτομο αποτελεί και μία κατεύθυνση για τη μέθοδο του SALI. Στη συνέχεια, χρησιμοποιείται η μέθοδος της διχοτόμησης, έχοντας σαν άκρα το ελλειπτικό σημείο και το σημείο όπου ο SALI εντόπισε την πρώτη χαοτική τροχιά, προκειμένου να προκύψει ένα σημείο (το ονομάζουμε «τελευταίο σημείο») που θα είναι όσο γίνεται πιο κοντά στο «σύνορο ευστάθειας». Η αντικειμενική συνάρτηση για τη διχοτόμηση είναι η μέθοδος SALI. Η απόσταση ανάμεσα στο ελλειπτικό σημείο και το τελευταίο ευσταθές σημείο θα είναι η τιμή της συνάρτησης αξιολόγησης του συγκεκριμένου ατόμου. Εάν αναζητείται η ελάχιστη (μέγιστη) απόσταση, βέλτιστο άτομο του ΔΑ θεωρείται αυτό που έχει την μικρότερη (μεγαλύτερη) τιμή αντικειμενικής συνάρτησης. Έπειτα, εφαρμόζονται επαναληπτικά τα βήματα του ΔΑ για να εξελιχθεί και πάλι ο πληθυσμός των ατόμων. Έτσι, θα σχηματιστούν νέα άτομα, (σημεία στο χώρο φάσεων) και θα υπολογιστούν νέες αποστάσεις, κλπ.

Όταν τερματιστεί ο ΔΑ, τότε χρησιμοποιείται η βέλτιστη απόσταση που έχει βρεθεί καθώς και το αντίστοιχο σημείο που έχει εντοπισθεί «προσεγγιστικά» κοντά στο «σύνορο ευστάθειας». Έχοντας το σημείο αυτό σαν αρχικό σημείο εφαρμόζεται επαναληπτικά η μη γραμμική απεικόνιση για ένα συγκεκριμένο αριθμό επαναλήψεων με την προϋπόθεση να μην έχει διαφύγει η τροχιά στο άπειρο. Μετρώντας τη διάσταση συσχέτισης (correlation dimension) του συνόλου των σημείων που έχουν προκύψει έχουμε μια ένδειξη για το αν αυτό το «αντικείμενο» είναι το προσεγγιστικό σύνορο ευστάθειας της απεικόνισης. Το πολύ ενδιαφέρον αποτέλεσμα που προκύπτει στην περίπτωση αυτή είναι ότι η παραπάνω διάσταση έχει τιμή σχετικά κοντά στο  $N-1$  όπου  $N$  είναι η διάσταση του χώρου φάσεων.

Συνοπτικά, λοιπόν, έχουμε τα ακόλουθα:

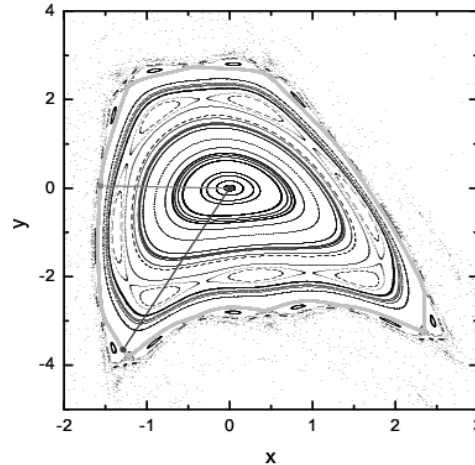
- Τα άτομα του πληθυσμού αποτελούν τις διευθύνσεις στο χώρο φάσεων.
- Η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης είναι η απόσταση ανάμεσα στο κεντρικό ελλειπτικό σημείο και το «τελευταίο σημείο» που βρέθηκε σε κάθε διεύθυνση.
- Ως «τελευταίο σημείο» ορίζουμε το σημείο εκείνο που βρίσκεται προσεγγιστικά κοντά στο «σύνορο ευστάθειας» της απεικόνισης.
- Το «τελευταίο σημείο» βρίσκεται με τη χρήση της μεθόδου του SALI και της διχοτόμησης.
- Οι διευθύνσεις στον χώρο φάσεων εξελίσσονται με τη χρήση των βημάτων του ΔΑ.
- Έξοδος του ΔΑ είναι η μέγιστη (ή ελάχιστη) απόσταση (και διεύθυνση) ανάμεσα στο κεντρικό ελλειπτικό σημείο και το «τελευταίο σημείο» που βρέθηκε σε κάθε τέτοια διεύθυνση.
- Χρησιμοποιώντας το «τελευταίο σημείο» που αντιστοιχεί στη μέγιστη (ή ελάχιστη) απόσταση, σαν αρχικό σημείο εφαρμόζεται η μη γραμμική απεικόνιση για ένα δοσμένο μεγάλο αριθμό επαναλήψεων, με την προϋπόθεση η τροχιά να μην διαφεύγει στο άπειρο.
- Το σύνολο των σημείων που προκύπτει θεωρείται μια καλή προσέγγιση του συνόρου ευστάθειας.
- Η εκτίμηση της διάστασης αυτού του συνόλου—«αντικειμένου» επιτυγχάνεται υπολογίζοντας τη διάσταση συσχέτισής του.

## 6. Πειραματικά αποτελέσματα

### 6.1. 2-διάστατη απεικόνιση:

Η παραπάνω προτεινόμενη μεθοδολογία αρχικά εφαρμόστηκε στην 2-διάστατη μη γραμμική απεικόνιση του Hénon για συχνότητες (tunes)  $\nu_x$  που κυμαίνονται από 0.1 έως και 0.45 με βήμα 0.025. Για κάθε τιμή της συχνότητας  $\nu_x$  εκτελέστηκαν 10 πειράματα. Στο κάθε πείραμα

χρησιμοποιήθηκαν 10 άτομα ως πληθυσμός του  $\Delta A$ , οι δε παράγοντες μετάλλαξης και διασταύρωσης ορίστηκαν ίσοι με 0.5. Το όριο χαρακτηρισμού μιας τροχιάς ως χαοτική για τη μέθοδο του SALI θεωρήθηκε το  $10^{-8}$  και για τη μέθοδο διχοτόμησης η ακρίβεια της ορίστηκε να είναι ίση με  $10^{-6}$ .



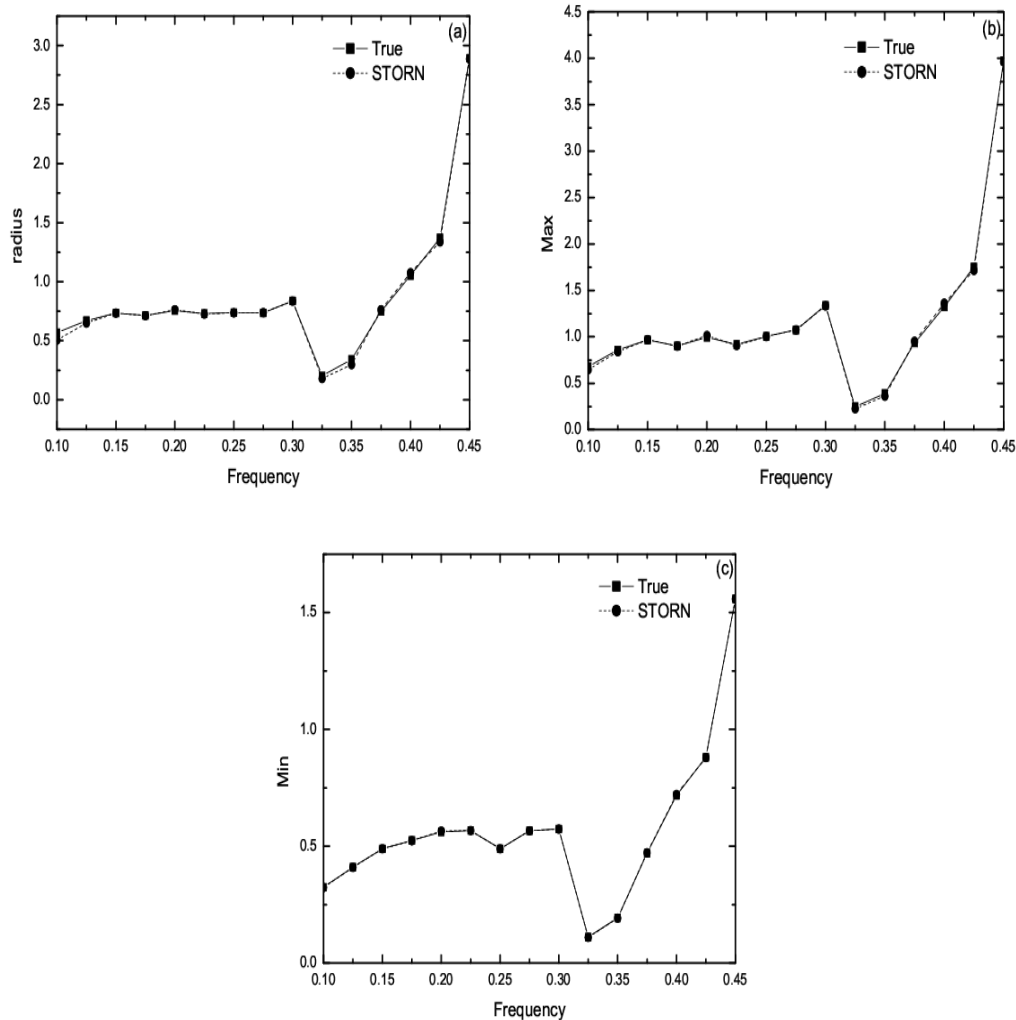
**Εικόνα 1:** Με ανοιχτό γκρι απεικονίζεται η τελευταία αναλλοίωτη καμπύλη (last invariant curve) της διδιάστατης απεικόνισης του Hénon (1.1) για συχνότητα  $\nu_x = 0.45$ . Η γκρι γραμμή απεικονίζει τη διεύθυνση ελάχιστης απόστασης και η σκούρα γκρι αντιστοιχεί στη διεύθυνση μέγιστης απόστασης από το ελλειπτικό σημείο και την τελευταία αναλλοίωτη καμπύλη.

Οι επαναλήψεις της μη γραμμικής απεικόνισης που χρησιμοποιήθηκαν στην μέθοδο του SALI ήταν 500 και στη διχοτόμηση 100. Ο στόχος του  $\Delta A$  ήταν η εύρεση της μικρότερης απόστασης ανάμεσα στο ελλειπτικό σημείο και το «σύνορο ευστάθειας», το οποίο στις 2 διαστάσεις είναι μια κλειστή αναλλοίωτη καμπύλη (last invariant curve) (βλ. Εικόνα 1).

Βρίσκοντας το «τελευταίο σημείο» που αντιστοιχεί στην μικρότερη τέτοια απόσταση εκτελέστηκαν 100000 επαναλήψεις και για το σύνολο σημείων που προέκυπτε, υπολογίζονταν η μικρότερη και η μέγιστη απόσταση του από το κέντρο καθώς και η δυναμική ακτίνα ευστάθειας σύμφωνα με τη μεθοδολογία 2 όπως στο [15]. Οι μέσες τιμές των μετρήσεων αυτών των παραμέτρων για τα 10 πειράματα παρουσιάζονται στα επόμενα διαγράμματα (βλ. Εικόνα 2).

Όπως γίνεται αντιληπτό, η προτεινόμενη μεθοδολογία προσέγγισε με μεγάλη ακρίβεια τα αποτελέσματα που αντιστοιχούν στις τελευταίες αναλλοίωτες καμπύλες (last invariant curves) και που προσδιορίστηκαν με τη βοήθεια οπτικής και αριθμητικής εποπτείας της μη γραμμικής απεικόνισης και χαρακτηρίζονται σαν True στα διαγράμματα της Εικόνας 2.





**Εικόνα 2:** (a) Διάγραμμα ακτίνας περιοχής ευστάθειας (dynamic aperture) ως προς την συχνότητα, (b) Διάγραμμα μέγιστης απόστασης περιοχής ευστάθειας ως προς την συχνότητα και (c) Διάγραμμα ελάχιστης απόστασης περιοχής ευστάθειας ως προς την συχνότητα για την διδιάστατη απεικόνιση του Hénon. Στα παραπάνω γραφήματα ο συμβολισμός STORN δηλώνει αποτελέσματα από την προτεινόμενη μεθοδολογία και ο συμβολισμός True στα αποτελέσματα που προκύπτουν από την οπτική και αριθμητική εποπτεία του χώρου φάσεων. Η διαφορά μεταξύ των αποτελεσμάτων των δύο αυτών διαδικασιών είναι τόσο μικρή ώστε να μην διακρίνεται εύκολα στο παραπάνω σχήμα.

## 6.2. 4-διάστατη απεικόνιση:

Για τη μελέτη της μη γραμμικής απεικόνισης (1.2) στις τέσσερις διαστάσεις χρησιμοποιήθηκαν αυτή τη φορά οι συχνότητες  $\nu_x=0.61903$  και  $\nu_y=0.4152$  [17]. Η διαμόρφωση των παραμέτρων του ΔΑ και του SALI ήταν η ίδια με αυτή της 2-διάστατης περίπτωσης με τη διαφορά ότι σ' αυτήν την περίπτωση χρησιμοποιήθηκαν 20 άτομα στο ΔΑ και οι επαναλήψεις της μη γραμμικής απεικόνισης της μεθόδου του SALI ήταν 1000. Εκτελέστηκαν συνολικά 30 πειράματα. Σε κάθε ένα εντοπίστηκε το «τελευταίο σημείο» που αντιστοιχεί στην μικρότερη απόσταση και με αυτό σαν αρχικό σημείο εκτελέστηκαν 500000 επαναλήψεις της 4-διάστατης απεικόνισης.

Για το σύνολο των σημείων που προέκυπτε κάθε φορά υπολογίζονταν η μικρότερη και η μέγιστη απόσταση του από το ελλειπτικό σημείο καθώς και ο μέσος όρος των ενδιάμεσων

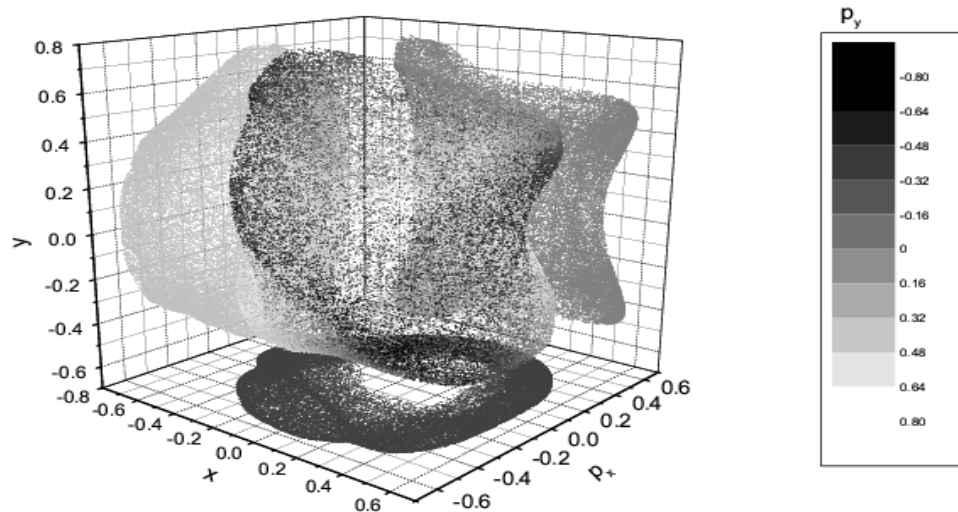
αποστάσεων.

Στα 22 από τα 30 πειράματα που εκτελέστηκαν το τελικό σύνολο μη διαφυγόντων σημείων προέκυψε μετά από 500000 επαναλήψεις της απεικόνισης. Για τα παραπάνω 22 πειράματα, παρουσιάζονται παρακάτω ορισμένα στατιστικά στοιχεία που αφορούν τις μετρήσεις της μέγιστης και ελάχιστης απόστασης καθώς και του μέσου όρου αποστάσεων, όπως είναι η μικρότερη και η μέγιστη τιμή, η μέση τιμή και η διασπορά τους αντίστοιχα.

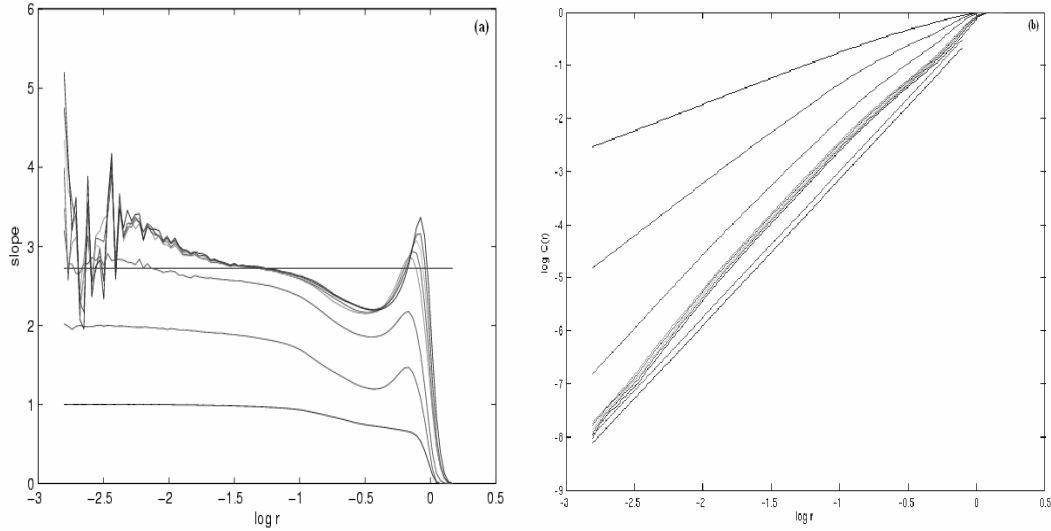
	Μέγιστη τιμή	Ελάχιστη τιμή	Μέσος όρος	Τυπική απόκλιση
<b>Ελάχιστη απόσταση</b>	0.54	0.50	0.52	0.01
<b>Μέγιστη απόσταση</b>	1.13	0.92	1.04	0.06
<b>Μέσος όρος αποστάσεων</b>	0.82	0.67	0.74	0.05

**Πίνακας 1:** Στατιστικά στοιχεία σχετικά με την ελάχιστη, μέγιστη απόσταση και μέσο όρο αποστάσεων που υπολογίστηκαν στα 22 πειράματα που εκτελέστηκαν για την τετραδιάστατη απεικόνιση (1.2).

Για κάποιο τυχαία επιλεγμένο πείραμα από τα 22, στο οποίο το τελικό σύνολο σημείων της τροχιάς διατηρήθηκε για τουλάχιστον 500000 επαναλήψεις, υπολογίστηκε η τρισδιάστατη προβολή του  $(x, p_x, y)$  καθώς και οι αντίστοιχες δισδιάστατες προβολές του οι οποίες απεικονίζονται στην Εικόνα 3.



**Εικόνα 3:** Τρισδιάστατη προβολή  $(x, p_x, y)$  της τετραδιάστατης μη γραμμικής απεικόνισης (1.2) καθώς και οι αντίστοιχες δισδιάστατες προβολές της. Η τέταρτη συντεταγμένη  $p_y$  απεικονίζεται με διαβαθμισμένο χρώμα στην κάθετη στήλη.



**Εικόνα 4:** (a) Το διάγραμμα της συνάρτησης  $\frac{\log C_2^{(d)}(r)}{\log r}$  ως προς το  $\log r$ . Η ευθεία γραμμή βρίσκεται στο 2.7 και δηλώνει την εκτιμώμενη διάσταση συσχέτισης του «αντικειμένου». (b) Το διάγραμμα της συνάρτησης  $\log C_2^{(d)}(r)$  ως προς το  $\log r$ . Οι δύο ευθείες στα δεξιά του γραφήματος αντιστοιχούν στην εκτίμηση και επαλήθευση της κλίσης της παραπάνω συνάρτησης και δίνονται από τον τύπο της προσεγγιστικής ευθείας  $y = 2.76x + 0.165$ . Για τα παραπάνω διαγράμματα χρησιμοποιήθηκαν διαστάσεις εμβύθισης  $m = 1, \dots, 8$ .

Τέλος, υπολογίστηκε η διάσταση συσχέτισης του παραπάνω «αντικειμένου», η οποία περιγράφεται από τα διαγράμματα της Εικόνας 4. Αυτό επιτεύχθηκε κάνοντας χρήση του προγραμματιστικού πακέτου TISEAN [6] το οποίο χρησιμοποιείται στην ανάλυση χρονοσειρών. Ειδικότερα, η μέγιστη διάσταση εμβύθισης  $m$  που χρησιμοποιήθηκε ήταν 8, και όπως αναμέναμε αφού η απεικόνισή μας είναι τετραδιάστατη, για  $m \geq 4$  τα αποτελέσματα δίνουν την ίδια διάσταση συσχέτισης όπως παρατηρούμε και στην Εικόνα 4. Σ' αυτήν επίσης, παρουσιάζεται το διάγραμμα  $\left( \frac{\log C_2^{(d)}(r)}{\log r}, \log r \right)$  στο οποίο η διάσταση συσχέτισης αντιστοιχεί σε ένα οριζόντιο ευθύγραμμο μέρος (plateau) της συνάρτησης. Η οριζόντια ευθεία που έχει σχεδιασθεί αντιστοιχεί στην κλίση 2.7 και αποτελεί εκτίμηση της διάστασης συσχέτισης του υπό εξέταση «αντικειμένου». Εναλλακτικά, στο Σχήμα 4(b) παρουσιάζεται το διάγραμμα  $(\log C_2^{(d)}(r), \log r)$  του οποίου η κλίση δίνει την διάσταση συσχέτισης. Για μια αριθμητική εκτίμηση της κλίσης αυτής έγινε γραμμική προσαρμογή (fitting) της συνάρτησης που αντιστοιχεί για διάσταση εμβύθισης  $m = 4$ . Η ευθεία που προέκυψε ήταν η  $y = 2.76x + 0.165$  της οποίας η κλίση συμφωνεί ικανοποιητικά με την κλίση του γραφήματος 4(a).

## 7. Συμπεράσματα

Στην παρούσα εργασία παρουσιάστηκε μια νέα μέθοδος για τον προσδιορισμό της δυναμικής ακτίνας ευστάθειας συμπλεκτικών απεικονίσεων η οποία έχει άμεση εφαρμογή στους επιταχυντές σωματιδίων υψηλών ταχυτήτων. Η μέθοδος αυτή εφαρμόστηκε στην δισδιάστατη και τετραδιάστατη συμπλεκτική απεικόνιση του Hénon. Τα αριθμητικά αποτελέσματα που προέκυψαν στην περίπτωση της δισδιάστατης απεικόνισης του Hénon προσέγγισαν με

ικανοποιητική ακρίβεια την τελευταία αναλλοίωτη καμπύλη (last invariant curve) της απεικόνισης.

Στην τετραδιάστατη περίπτωση η προτεινόμενη μεθοδολογία εντόπισε σύνολα σημείων («αντικείμενα») με διάσταση συσχέτισης περίπου 2.7. Αυτό το γεγονός αποτελεί μια ένδειξη ότι το «αντικείμενο» αυτό βρίσκεται προσεγγιστικά κοντά στο σύνορο ευστάθειας που είναι ένα σύνολο μορφοκλασματικής δομής (fractal) η μέγιστη διάσταση του οποίου μπορεί να είναι τρία. Το πολύ ενδιαφέρον αποτέλεσμα που προέκυψε από τους υπολογισμούς μας είναι ότι η διάσταση αυτή είναι ιδιαίτερα μεγάλη. Αυτό εξηγεί αρκετά πειστικά την παρατήρηση πολλών ερευνητών ότι τα φαινόμενα Arnol'd διάχυσης στο χώρο φάσεων είναι πολύ ασθενή. Έτσι, παρ' όσον ότι θεωρητικά υπάρχει η δυνατότητα όλες οι τροχιές που δεν ανήκουν σε τόρους να διαφύγουν στο άπειρο, αυτό γίνεται σε ελάχιστο βαθμό, ώστε τελικά να εξασφαλίζεται η ευστάθεια της δέσμης για τον μεγάλο αριθμό στροφών που απαιτείται για την ομαλή λειτουργία των επιταχυντών.

Η μεθοδολογία που περιγράφηκε εδώ μπορεί εύκολα να εφαρμοσθεί σε απεικονίσεις  $N > 4$  διαστάσεων χωρίς σημαντικές τροποποιήσεις. Σε μελλοντική εργασία θα διερευνηθεί επίσης και η δυνατότητα βελτιστοποίησης της δυναμικής ακτίνας ευστάθειας ως προς τις συχότητες των μη γραμμικών απεικονίσεων.

## Βιβλιογραφία

1. Ch. Antonopoulos, Ch. Skokos & T. Bountis, "Chaotic Dynamics of  $N$ -degree of Freedom Hamiltonian Systems", Int. J. Bif. Chaos, (submitted), 2006.
2. T. Bountis and Ch. Skokos, "Space Charges Can Significantly Affect the Dynamical Aperture of Accelerator Mappings", Phys. Lett. A, to appear (2006).
3. D. Corne, M. Dorigo, and F. Glover, "New Ideas in Optimization", McGraw-Hill, London, 1999.
4. P. Grassberger and I. Procaccia, "Characterization of Strange Attractors", Physical Review Letters, 50, pp. 346-349, 1983a.
5. P. Grassberger and I. Procaccia, "Measuring the Strangeness of Strange Attractors", Physica D, 9, pp. 180-208, 1983b.
6. R. Hegger, H. Kantz, and T. Schreiber, "Practical Implementation of Nonlinear Time Series Methods: The TISEAN Package", CHAOS, 9, pp. 413, 1999.
7. J. H. Holland, "Adaptation in Natural and Artificial Systems", MIT Press, 1975.
8. Koza, J. R., "Genetic Programming: On the Programming of Computers by Means of Natural Selection", MIT Press, Cambridge, MA, 1992.
9. W. Scandale and G. Turchetti (eds.), "Nonlinear Problems in Future Particle Accelerators", (World Scientific, Singapore), 1991.
10. H. P. Schwefel, "Evolution and Optimum Seeking", Wiley, New York, 1995.
11. Skokos, C, "Alignment indices: A new, simple method for determining the ordered or chaotic nature of orbits", Journal of Physics A, 34, pp. 10029-10043, 2001.
12. Skokos, C. Antonopoulos, T. C Bountis and M. N Vrahatis, "How does the Smaller Alignment Index (SALI) Distinguish Order From Chaos?", Progress on Theoretical Physics Supplement, 150, pp. 439-443, 2003.
13. R. Storn and K. Price, "Differential Evolution - A Simple and Efficient Heuristic for global Optimization over Continuous Spaces", Journal of Global Optimization, 11(4), pp. 341-359, 1997.
14. E. Todesco "The use of mappings for stability problems in beam dynamics in: Analysis and modelling of discrete dynamical systems with applications to dynamical astronomy", edited by D. Benest and C. Froeschlé (Gordon and Breach, London, 1997) 301 - 314.
15. E. Todesco and M. Giovannozzi, "Dynamic Apertures Estimates and Phase-Space Distortions

- in Nonlinear Betatron Motion”, *Physical Review E*, 53(4), pp. 4067-4076, 1996.
16. M. N. Vrahatis, “An Efficient Method for Locating and Computing Periodic Orbits of Nonlinear Mappings”, *Journal of Computational Physics*, 119, pp. 105-119, 1995.
  17. M. N. Vrahatis, H. Isliker and T. C. Bountis, “Structure and Breakdown of Invariant Tori in 4D Mapping Model of Accelerator Dynamics”, *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 7(12), pp. 2707-27022, 1997.

Abstract:

In this paper we introduce a new numerical methodology for the determination of the dynamic aperture of symplectic mappings used in particle accelerator dynamics. It consists of the use of Differential Evolution Algorithms as well as of the SALI method. The main aim of the suggested methodology is to reach a point in phase space which is approximately very close to the border of stability of the mapping. The iterations of this point create a set of points that we call “object”. If the correlation dimension of this “object” is close to  $N-1$  where  $N$  is the dimension of the phase space, then this set of points lies very close to the border of stability of the mapping. The proposed methodology has been applied to the 2D and 4D Hénon symplectic mappings. The last invariant curve of the 2D mapping which is easily observable by 2D plots was approximated with high accuracy by the numerical results we obtained. Finally, in the 4D case, the suggested methodology detected “objects” in phase space with correlation dimension close to 2.7 indicating that this set of points lies near the border of stability with maximum dimension 3.