Θεωρία Παιγνίων

Μελέτη στοιχείων που χαρακτηρίζουν καταστάσεις ανταγωνιστικής άλληλεξάρτησης με έμφαση στη διαδικασία λήψης αποφάσεων περισσοτέρων από ένα ληπτών απόφασης (αντιπάλων).

- Παίγνια δύο παικτών μηδενικού αθροίσματος.
- Παίγνια δύο παικτών σταθερού αθροίσματος.
- Παίγνια n παικτών με n > 2.
- Παίγνια μη σταθερού αθροίσματος.

Βασικές Έννοιες

Παίγνιο (game): Η κατάσταση εκείνη κατά την οποία δύο ή περισσότεροι ορθολογικοί παίκτες με αντικρουόμενους στόχους επιλέγουν τρόπους ενέργειας, δημιουργώντας συνθήκες ανταγωνιστικής αλληλεξάρτησης

Στοιχεία παιγνίου:

- **Παίκτης:** αυτόνομη μονάδα λήψης απόφασης. Άτομο, ομάδα, επιχείρηση, κράτος κλπ. Προσπαθεί να βελτιστοποιήσει τη δική του ευημερία έναντι των αντιπάλων του βασιζόμενος στους κανόνες, στους πόρους και στις πληροφορίες που έχει στη διάθεσή του. Είναι ***ορθολογιστής***. Υπάρχουν τουλάχιστον $n \geq 2$ παίκτες. Για $n = 2$ ***Παίγνιο Δύο Παικτών***.
- **Στρατηγική:** το σύνολο των κανόνων που ορίζουν τις εφικτές επιλογές τις οποίες δύναται να ακολουθεί σε κάθε κίνησή του ο παίκτης μέχρι το τέλος του παιγνίου. Αναζητούμε τις στρατηγικές που βελτιστοποιεί το στόχο του κάθε παίκτη.

  - **Αμιγής Στρατηγική:** Κάθε παίκτης επιλέγει μία μόνο από τις δυνατές στρατηγικές του με πιθανότητα ίση με τη μονάδα.
  - **Μικτή Στρατηγική:** Περιλαμβάνει συνδυασμό στρατηγικών οι οποίες επιλέγονται με πιθανότητα μικρότερη της μονάδας.
- **Πίνακας αποτελεσμάτων (πληρωμών, ανταμοιβών):** Δείχνει τα αποτελέσματα του παιγνίου για κάθε συνδυασμό στρατηγικών.
- **Λύση του παιγνίου:** Η βέλτιστη στρατηγική όλων των παικτών.

Παίγνιο δύο παικτών μηδενικού αθροίσματος

- Δύο παίκτες: ο Α (παίκτης των σειρών) και ο Β (παίκτης των στηλών).
- Το παιχνίδι παρίσταται από τον πίνακα πληρωμών του παίκτη Α.
- Ο παίκτης Α διαθέτει m στρατηγικές.
- Ο παίκτης Β διαθέτει n στρατηγικές.

		Παίκτης Β			
	Στρατηγικές	**1**	**2**		**n**
	1	α_{11}	α_{12}	…	α_{1n}
Παίκτης Α	**2**	α_{21}	α_{22}	…	α_{2n}
	⋮	⋮	⋮	⋱	⋮
	m	α_{m1}	α_{m2}	…	α_{mn}

- Αν ο παίκτης Α επιλέξει τη στρατηγική A_i και ο παίκτης Β τη στρατηγική B_j, τότε ο **παίκτης Α κερδίζει α_{ij}** και **ο παίκτης Β χάνει α_{ij}**.

Άλλα στοιχεία

- Οι δύο παίκτες είναι **ορθολογιστές**, επιλέγουν τις στρατηγικές τους με αποκλειστικό στόχο τη δική τους ευημερία βάσει των στοιχείων του πίνακα, δεν αντιδρούν συναισθηματικά.
- Τα στοιχεία του πίνακα αντιπροσωπεύουν κέρδος υπό την ευρεία έννοια Γενικά, είναι η **χρησιμότητα (utility)** για τον παίκτη Α από κάθε συνδυασμό δύο στρατηγικών.
- **Αρχή κοινής γνώσης**. Οι παίκτες γνωρίζουν τη δομή του πίνακα πληρωμών, γνωρίζουν ότι οι αντίπαλοί τους γνωρίζουν τη δομή αυτή, γνωρίζουν ότι οι αντίπαλοί τους γνωρίζουν ότι γνωρίζουν τη δομή αυτή, κ.ο.κ.
- Οι παίκτες **επιλέγουν ταυτόχρονα στρατηγική**, χωρίς να επικοινωνούν, χωρίς συνεργασία και χωρίς να έχουν ενημερωθεί εκ των προτέρων για την επιλογή του αντιπάλου τους.

Παράδειγμα 1

Δύο πολιτικοί επιλέγουν το κύριο θέμα το οποίο θα επικεντρώσουν την προσοχή τους σε τηλεοπτική συζήτηση (debate). Ο καθένας έχει τρεις βασικές επιλογές, όχι κατ΄ ανάγκη ίδιες. Η σχετική αποτελεσματικότητα (αύξηση στις ψήφους του πολιτικού Α ως ποσοστό των συνολικών ψήφων) που θα προκύψει στο τέλος της συζήτησης, εξαρτάται από τους συνδυασμούς των θεμάτων που επιλέγουν και δίνεται στον ακόλουθο πίνακα πληρωμών για τον Α.

Πίνακας πληρωμών για τον Α

		Πολιτικός Β		
	Στρατηγικές	B_1	B_2	B_3
Πολιτικός Α	A_1	-1	7	3
	A_2	1	1	2
	A_3	-5	-3	1

Οι παίκτες γνωρίζουν τη δομή του πίνακα, γνωρίζουν ότι οι αντίπαλοί τους το γνωρίζουν κ.ο.κ. Επιλέγουν ταυτοχρόνως στρατηγική χωρίς να επικοινωνούν, χωρίς συνεργασία και χωρίς να έχουν ενημερωθεί εκ των προτέρων για την επιλογή του αντιπάλου τους.

Ποια στρατηγική πρέπει να επιλέξει κάθε πολιτικός ??

Πίνακας πληρωμών για τον Β

		Πολιτικός Α		
	Στρατηγικές	A_1	A_2	A_3
Πολιτικός Β	B_1	1	-1	5
	B_2	-7	-1	3
	B_3	-3	-2	-1

Διαγραφή υποδεέστερων στρατηγικών

Μία στρατηγική είναι **υποδεέστερη** μίας άλλης (που ονομάζεται **υπερέχουσα ή κυρίαρχη**) όταν η κυρίαρχη στρατηγική είναι τουλάχιστον τόσο «καλή» όσο και η υποδεέστερη.

	B_1	B_2	B_3
A_1	-1	7	3
A_2	1	1	2
A_3	-5	-3	1

	B_1	B_2	B_3
A_1	-1	7	3
A_2	1	1	2

Ο ορθολογιστής παίκτης Α δεν εφαρμόζει ποτέ την στρατηγική 3.

Συνέχεια παραδείγματος 1

	B_1	B_2	B_3
A_1	-1	7	3
A_2	1	1	2

	B_1	B_2
A_1	-1	7
A_2	1	1

Ο ορθολογιστής παίκτης Β γνωρίζοντας ότι ο Α δεν θα εφαρμόσει ποτέ την στρατηγική 3 (και γνωρίζοντας ότι ο Α γνωρίζει ότι το γνωρίζει κ.ο.κ.) δεν εφαρμόζει ποτέ τη δική του στρατηγική 3 αφού είναι υποδεέστερη της $1^{ης}$

Προσοχή! ***Κατά τη διαδικασία απαλοιφής των υποδεεστέρων στρατηγικών, είναι δυνατό μία στρατηγική που αρχικά δεν ήταν υποδεέστερη, να καταστεί στη συνέχεια υποδεέστερη και να απομακρυνθεί από τον πίνακα πληρωμών.***

Συνέχεια παραδείγματος 1

	B_1	B_2
A_1	-1	7
A_2	1	1

	B_1
A_1	-1
A_2	1

Ο παίκτης Β γνωρίζοντας ότι ο Α δεν θα εφαρμόσει ποτέ την στρατηγική 3 (και γνωρίζοντας ότι ο Α γνωρίζει ότι το γνωρίζει κ.ο.κ.) δεν εφαρμόζει ποτέ τη στρατηγική 2 αφού είναι υποδεέστερη της 1^{ης} στρατηγικής του.

Συνέχεια παραδείγματος 1

	B_1
A_1	-1
A_2	1

	B_1
A_2	1

Γνωρίζοντας ο παίκτης Α ότι ο Β γνωρίζει όλα τα προηγούμενα, τότε δεν θα εφαρμόσει την 1^{η} στρατηγική του αφού είναι υποδεέστερη της $2^{\eta\varsigma}$.

Στο παράδειγμα, το **σημείο ισορροπίας** (saddle point) είναι εκείνο που προκύπτει όταν ο παίκτης Α εφαρμόζει τη 2^{η} στρατηγική του και ο Β την 1^{η}. Η πιθανή εφαρμογή άλλης στρατηγικής πέρα από το σημείο ισορροπίας, έχει απάντηση από τον αντίπαλο η οποία δυσχεραίνει τη θέση του.

- Το σημείο ισορροπίας (οριακό σημείο) ονομάζεται **τιμή του παιγνίου**, συμβολίζεται με **V (value of the game)** και παρατηρούμε ότι είναι το ***μεγαλύτερο στη στήλη του και το μικρότερο στη σειρά του*** (saddle point, σαγματικό σημείο).

	B_1	**B_2**	**B_3**	**row min**
A_1	-1	7	3	-1
A_2	**1**	1	2	**1***
A_3	-5	-3	1	-5
column max	**1***	7	3	**V=1**

- Οι δύο άριστες -**αμιγείς**- στρατηγικές συνθέτουν τη λύση του παιγνίου σύμφωνα με την οποία το καλύτερο που μπορεί να πετύχει ο A είναι κερδίσει 1% των ψήφων ενώ το καλύτερο που μπορεί να πετύχει ο B είναι να χάσει 1% των ψήφων.

Στρατηγική maximin και minimax

	B_1	B_2	B_3	**min**
A_1	-1	7	3	-1
A_2	**1**	1	2	**1***
A_3	-5	-3	1	-5
max	**1***	7	3	V=1

Maximin σημείο

Minimax σημείο

Ο αντικειμενικός σκοπός του **Α είναι να μεγιστοποιήσει τα κέρδη** του, και του **Β να ελαχιστοποιήσει τη ζημιά του**. Θα ισορροπήσουν εκεί όπου ο **Α θα μεγιστοποιεί το ελάχιστο κέρδος** του και ο **Β θα ελαχιστοποιεί τη μέγιστη ζημιά του**. Ουσιαστικά, ισορροπούν εκεί όπου **και οι δύο ελαχιστοποιούν τη μέγιστη ζημιά που μπορούν να υποστούν**.

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΙΚΑ, σύμφωνα με το κριτήριο minimax, σε ένα πίνακα πληρωμών για τον παίκτη Α, ο παίκτης Α επιλέγει, εκείνη τη στρατηγική που θα του δώσει το μεγαλύτερο από τα ελάχιστα των σειρών (maximin τιμή) και ο παίκτης Β επιλέγει εκείνη τη στρατηγική που θα του δώσει το ελάχιστο από τα μέγιστα των στηλών (minimax τιμή). Η maximin τιμή ονομάζεται κατώτερη τιμή και η minimax ανώτερη τιμή του παιγνίου. Όταν οι δύο τιμές ταυτίζονται το παίγνιο έχει λύση με αμιγείς στρατηγικές και η λύση είναι σταθερή (stable) δηλαδή υπάρχει ένα μοναδικό σημείο ισορροπίας που δίνει την τιμή του παιγνίου, V.

Παράδειγμα 2

	B_1	B_2	B_3	**min**
A_1	-3	-2	6	-3
A_2	2	**0**	2	**0***
A_3	5	-2	-4	-4
max	5	**0***	6	**V=0**

Maximin σημείο

Minimax σημείο

Σύμφωνα με το κριτήριο minimax, και οι δύο παίκτες θα εφαρμόσουν τη $2^η$ στρατηγική τους. Το παίγνιο αυτό ονομάζεται **δίκαιο (V=0).**

Παίγνιο δύο παικτών σταθερού αθροίσματος

Το άθροισμα των ανταμοιβών των παικτών είναι μία σταθερά **c** (θετική ή αρνητική). Τιμή της σταθεράς: θετική ➔ οι παίκτες μοιράζονται κάποια ανταμοιβή, αρνητική ➔μοιράζονται κάποιο κόστος. Παίγνιο μηδενικού αθροίσματος **c = 0.**

Παράδειγμα 3:

Δύο ανταγωνιστικές επιχειρήσεις Α και Β μοιράζονται τις πωλήσεις ενός προϊόντος σε μία περιοχή. Ο συνολικός ετήσιος τζίρος των πωλήσεων είναι περίπου σταθερός και ανέρχεται στα 200 εκατομμύρια ευρώ. Κάθε μία επιχείρηση για να αποσπάσει πωλήσεις από την άλλη, εξετάζει τρία εναλλακτικά σενάρια μάρκετινγκ: (1) βελτίωση ποιότητας, (2) βελτίωση συσκευασίας, (3) αύξηση διαφημιστικής δαπάνης. Το κόστος των τριών λύσεων είναι περίπου ίδιο, αλλά υψηλό, οπότε μία μόνο στρατηγική θα εφαρμοστεί από κάθε επιχείρηση. Ακολουθεί ο πίνακας πληρωμών για την επιχείρηση Α.

Πίνακας πληρωμών παιγνίου σταθερού αθροίσματος c=200

			B		
	Στρατηγικές	**B_1**	**B_2**	**B_3**	**min**
A	**A_1**	95	105	110	95
	A_2	120	90	115	90
	A_3	125	**120**	130	**120***
	max	125	**120***	130	**V=120**

π.χ. αν η A επιλέξει την $1^{η}$ και η B τη $3^{η}$, η A θα πραγματοποιήσει πωλήσεις 110 εκ. και η B πωλήσεις 90 εκ.

Η διαδικασία επίλυσης είναι ίδια με τα παίγνια μηδενικού αθροίσματος

Σύμφωνα με το κριτήριο minimax, άριστη λύση είναι η: **A → A_3, B → B_2 με V = 120.**

Μικτή Στρατηγική

Παράδειγμα 4 (για λύση δες σελ. 45)

			B		
	Στρατηγικές	**B_1**	**B_2**	**B_3**	**min**
	A_1	0	-2	2	**-2***
A	**A_2**	5	4	-3	-3
	A_3	2	3	-4	-4
	max	5	4	**2***	**-2≠2**

Δεν υπάρχει σημείο ισορροπίας (ασταθής λύση). Η ανώτερη και η κατώτερη τιμή του παιγνίου είναι διαφορετικές, οπότε οι παίκτες δεν ισορροπούν σε ένα κοινό σημείο στο οποίο να ελαχιστοποιούν ταυτόχρονα τη μέγιστη ζημιά που μπορούν να πάθουν. Δηλαδή, γνωρίζοντας κάθε παίκτης τη δομή του πίνακα παρατηρεί ότι για κάθε στρατηγική του αντιπάλου του υπάρχει πάντα μία καλύτερη απάντηση.

Μεικτή Στρατηγική

Κάθε παίκτης ακολουθεί με βάση κάποια κατανομή πιθανοτήτων τις στρατηγικές του, ώστε να μεγιστοποιεί το ελάχιστο προσδοκώμενο κέρδος του (να ελαχιστοποιεί τη μέγιστη προσδοκώμενη ζημιά του), ανεξάρτητα από τις επιλογές του αντιπάλου του. Η κατανομή πιθανοτήτων με βάση την οποία επιλέγει τις στρατηγικές του, ονομάζεται μικτή ή τυχαία maximin (minimax) στρατηγική.

x_i: η πιθανότητα ο παίκτης A να εφαρμόσει τη στρατηγική A_i

y_j: η πιθανότητα ο παίκτης B να εφαρμόσει τη στρατηγική B_j

- Πρακτικά, κάθε παίκτης προσδιορίζει το *πρόγραμμα* βάσει του οποίου θα παίξει το παιγνίδι δίνοντας τέτοιες τιμές στις αντίστοιχες πιθανότητες ώστε να ισχύει ο παραπάνω κανόνας.
- Τα πιθανά προγράμματα-πολιτικές συμβολίζονται με διανύσματα πιθανοτήτων ($x_1, x_2, \ldots, x_m$) και ($y_1, y_2, \ldots, y_n$) και είναι οι μικτές στρατηγικές
- $\sum_{i=1}^{m} x_i = 1$ και $\sum_{j=1}^{n} y_j = 1$
- Μία μικτή στρατηγική ($x_1, x_2, \ldots, x_m$) με κάποιο $x_i = 1$ υποδεικνύει ότι εφαρμόζεται η αμιγής στρατηγική i (με πιθανότητα μονάδα).

Θεώρημα minimax για τις μικτές στρατηγικές

Όταν εφαρμόζονται μεικτές στρατηγικές, τότε, για κάθε παίκτη υπάρχει πάντα μία άριστη μικτή στρατηγική (σύμφωνα με το κριτήριο minimax), που οδηγεί σε σταθερή λύση (σαγματικό σημείο), από το οποίο κανείς δεν θέλει να μετακινηθεί (κανένας παίκτης δεν μπορεί να βελτιώσει περεταίρω τη θέση του).

- V(A): το προσδοκώμενο κέρδος του A
- V(B): η προσδοκώμενη ζημιά του B
- V(A) = V(B) = V, το σημείο ισορροπίας για τις άριστες μικτές στρατηγικές (**αναμενόμενη τιμή του παιγνίου**):

$$\boxed{V = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j}$$

Εντοπισμός Μικτής Στρατηγικής - Περίπτωση 1 - *Παίγνιο 2×2*

Παράδειγμα 5

		B		
	Στρατηγικές	**B_1**	**B_2**	**min**
A	**A_1**	-2	**6**	-2
	A_2	5	1	**1***
	max	**5***	6	**$1 \neq 5$**

Δεν υπάρχει σημείο ισορροπίας με αμιγείς στρατηγικές. Ορίζουμε πιθανότητες εφαρμογής κάθε στρατηγικής από κάθε παίκτη και συνεχίζουμε για τον εντοπισμό των άριστων μικτών στρατηγικών και της προσδοκώμενης τιμής του παιγνίου.

Πιθανότητες για κάθε στρατηγική παραδείγματος 5

			B	
		Στρατηγικές	**B_1**	**B_2**
			y	**(1-y)**
A	**A_1**	**x**	-2	6
	A_2	**(1-x)**	5	1

- Προφανώς $x=x_1$, $(1-x) = x_2$ και $y=y_1$, $(1-y) = y_2$
- Εντοπισμός άριστης μικτής στρατηγικής για παίκτη Α:
  - ✓ Υπολογίζουμε τις αναμενόμενες πληρωμές στον παίκτη Α, $V(A, B_1)$ και $V(A, B_2)$, όταν ο παίκτης Β εφαρμόζει τις δύο πιθανές στρατηγικές του.
  - ✓ (Επειδή ο Α θέλει το αναμενόμενο κέρδος του να είναι ανεξάρτητο από τη στρατηγική που θα επιλέξει ο Β) εξισώνουμε τις $V(A, B_1)$ και $V(A, B_2)$ και υπολογίζουμε έτσι τις πιθανότητες x και (1-x).
  - ✓ Υπολογίζουμε το V(A) από μία εκ των $V(A, B_2)$ ή $V(A, B_2)$.

Εφαρμογή στο παράδειγμα 5

Εντοπισμός άριστης μικτής στρατηγικής για τον παίκτη Α

- ✓ Ο Α ακολουθεί τη στρατηγική A_1 με πιθανότητα x, και τη στρατηγική A_2 με πιθανότητα (1-x).
- ✓ Αν ο Β ακολουθήσει τη στρατηγική B_1, το προσδοκώμενο κέρδος του παίκτη Α είναι: $V(A, B_1) = -2\cdot x + 5\cdot(1-x) = -7x + 5$. Αν όμως ο Β ακολουθήσει τη B_2, τότε το αναμενόμενο κέρδος του Α είναι: $V(A, B_2) = 6\cdot x + 1\cdot(1-x) = 5x + 1$.
- ✓ Αφού πρέπει να ισχύει ότι $V(A, B_1) = V(A, B_2)$, έχουμε για τον υπολογισμό της άριστης μικτής στρατηγικής του Α ότι: $-7x + 5 = 5x + 1$ δηλαδή $12x = 4$, οπότε

$x=1/3, (1-x)=2/3$

Εφαρμογή στο παράδειγμα 5

Αριστη μικτή στρατηγική για τον παίκτη Α (συνέχεια)

- ✓ Αυτό σημαίνει ότι ο Α θα πρέπει να ακολουθεί τη στρατηγική A_1 με πιθανότητα $x_1 = 1/3$ και την A_2 με πιθανότητα $x_2 = 2/3$.
- ✓ Προσδοκώμενο κέρδος του Α: **$V(A) = -2 \cdot 1/3 + 5 \cdot 2/3 = 6 \cdot 1/3 + 1 \cdot 2/3 = 8/3$** (αντικατάσταση στο $V(A, B_1)$ ή στο $V(A, B_2)$).
- ✓ Το αναμενόμενο αυτό κέρδος είναι ανεξάρτητο της μικτής στρατηγικής που χρησιμοποιεί ο παίκτης Β.
- ✓ π.χ. έστω ότι ο Β ακολουθεί (όχι την άριστη μικτή του στρατηγική που δεν βρέθηκε ακόμη) την τυχαία μικτή στρατηγική: για τη B_1: $y=1/4$ και για τη B_2: $(1-y)=3/4$, τότε:

  $V(A)=(1/4)(-2\times1/3 + 5\times2/3) + (3/4)(6\times1/3 + 1\times2/3) = 8/3$.

Εντοπισμός άριστης στρατηγικής για τον παίκτη Β

- ✓ Ο Β ακολουθεί τη στρατηγική B_1 με πιθανότητα y, και τη στρατηγική B_2 με πιθανότητα (1-y).
- ✓ Αν ο Α ακολουθήσει τη στρατηγική A_1, το προσδοκώμενο κέρδος του παίκτη Β είναι: $V(B, A_1) = -2\cdot y + 6\cdot(1-y)$. Αν ο Α ακολουθήσει την A_2, τότε το αναμενόμενο κέρδος του Β είναι: $V(B, A_2) = 5\cdot y + 1\cdot(1-y)$.
- ✓ Για να ελαχιστοποιεί ο Β τη μέγιστη ζημιά που μπορεί να υποστεί θα πρέπει: V(B, A1) = V(B, A2), οπότε είναι:
- ✓ $-2y + 6(1-y) = 5y + 1(1-y)$ δηλαδή $12y = 5$ που δίνει

$y=5/12, \ (1-y)=7/12.$

Εντοπισμός άριστης στρατηγικής για τον παίκτη Β (συνέχεια)

- ✓ Αυτό σημαίνει ότι ο Β θα πρέπει να ακολουθεί τη στρατηγική B_1 με πιθανότητα $y_1 = 5/12$ και την B_2 με πιθανότητα $y_2 = 7/12$.
- ✓ Προσδοκώμενη ζημιά του Β: **$V(B) = -2\times5/12 + 6\times7/12 = 5\times5/12 + 1\times7/12 = 8/3$** (αντικατάσταση στο $V(B, A_1)$ ή στο $V(B, A_2)$) που είναι ίσο με το $V(A)$.
- ✓ Η αναμενόμενη ζημιά είναι ανεξάρτητη της μικτής στρατηγικής που χρησιμοποιεί ο παίκτης Α.

Σύνοψη άριστης λύσης παραδείγματος 5

- Παίκτης Α: $(x_1, x_2) = (1/3, 2/3)$ και $V(A) = 8/3$
- Παίκτης Β: $(y_1, y_2) = (5/12, 7/12)$ και $V(B) = V(A) = V = 8/3$
- Επομένως, μακροπρόθεσμα, αν το παιγνίδι επαναληφθεί πολλές φορές, κάθε 12 επαναλήψεις του παιγνίου ο παίκτης Α πρέπει να ακολουθεί 4 φορές την A_1 και 8 φορές την A_2, ενώ ο παίκτης Β να ακολουθεί 5 φορές την B_1 και 7 φορές την B_2.

Επισήμανση – φυσικό νόημα: Η τιμή του παιγνίου V=8/3, δεν σημαίνει πως κάθε φορά που οι δύο παίκτες παίζουν το παίγνιο ο Α κερδίζει 8/3 και ο Β χάνει 8/3, αλλά ότι αν οι δύο παίκτες παίζουν το παίγνιο πολλές φορές το προσδοκώμενο κέρδος του Α θα είναι 8/3, όση και η προσδοκώμενη ζημιά του Β.

Εντοπισμός Μικτής Στρατηγικής - Περίπτωση 2 - *Παίγνιο* $2\times n$

Παράδειγμα 6

	Στρατηγικές		**B**					
			B_1	**B_2**	**B_3**	**B_4**	**B_5**	**min**
			y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	
A	**A_1**	**x_1**	1	4	-2	-3	5	-3
	A_2	**x_2**	4	3	5	2	-1	**-1***
	max		4	4	5	**2***	5	**$-1 \neq 2$**

ΝΑΙ θα μπορούσαν να απομακρυνθούν κάποιες υποδεέστερες στρατηγικές, (οι B_1, B_2 και B_3 είναι υποδεέστερες της B_4), αλλά εδώ θα παραμείνουν, για λόγους επεξηγηματικούς.

Παράδειγμα 6 (συνέχεια)

Υπολογισμοί

$V(A, B_1) = x_1 + 4x_2 = x_1 + 4(1-x_1) = -3x_1 + 4$

$V(A, B_2) = 4x_1 + 3x_2 = 4x_1 + 3(1-x_1) = x_1 + 3$

$V(A, B_3) = -2x_1 + 5x_2 = -2x_1 + 5(1-x_1) = -7x_1 + 5$

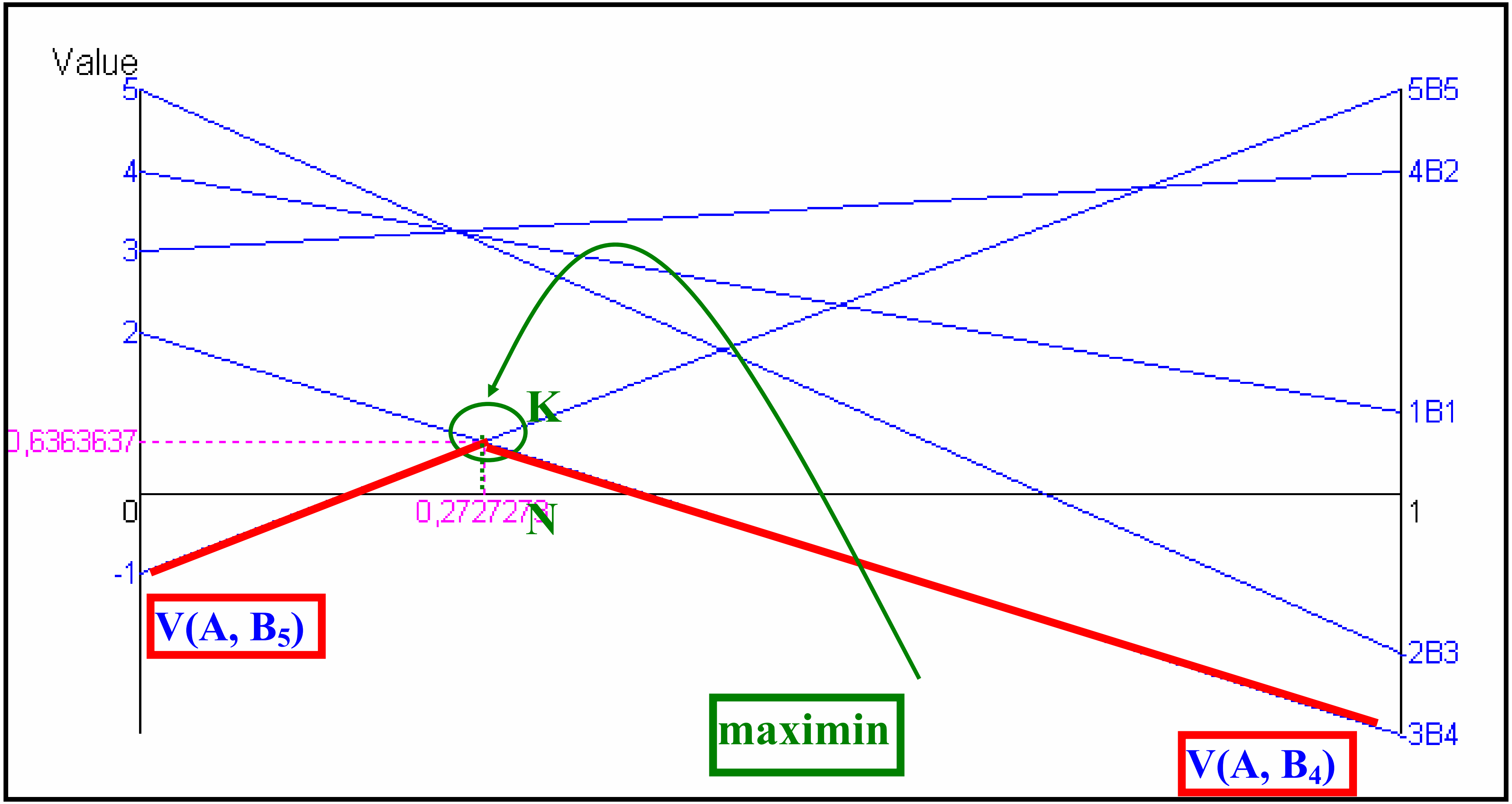
$V(A, B_4) = -3x_1 + 2x_2 = -3x_1 + 2(1-x_1) = -5x_1 + 2$

$V(A, B_5) = 5x_1 - x_2 = 5x_1 - (1-x_1) = 6x_1 - 1$

Γραφική Μέθοδος Επίλυσης

- Κατασκευάζουμε δύο κάθετους άξονες σε απόσταση μιας μονάδος (η πιθανότητα x_1). Εκφράζουν τις στρατηγικές A_1 και A_2.
- Χαράζουμε τις ευθείες $V(A, B_1)$, $V(A, B_2)$, … $V(A, B_5)$.

Γραφική Μέθοδος Επίλυσης (μείωση της διάστασης του πίνακα)



Γραφική Μέθοδος Επίλυσης

- (Παρατηρήστε ότι οι υποδεέστερες στρατηγικές B_1, B_2, B_3 βρίσκονται επάνω από την B_4).
- Γνωρίζουμε ότι ο Α ακολουθεί μεικτή maxmin στρατηγική και ο Β μεικτή minmax στρατηγική. Ο Α επιλέγει το μέγιστο από τα ελάχιστα αναμενόμενα κέρδη και ο Β την ελάχιστη από τις μέγιστες αναμενόμενες απώλειες. Το ευθύγραμμο τμήμα ΝΚ παριστά το αναμενόμενο κέρδος του Α, όταν ακολουθεί τη στρατηγική Α1 με πιθανότητα x_1 και την Α2 με x_2, ενώ ο Β τις Β5 με πιθανότητα y_5 και την Β4 με y_4. Ο Β προκειμένου να εξασφαλίσει ότι ο Α δεν θα έχει μεγαλύτερο κέρδος από Κ θα επιλέξει μόνο τις B_4 και B_5. Ο Α θα επιλέξει την πιθανότητα x_1 (σημείο Ν) που αντιστοιχεί στο Κ, το ψηλότερο δηλ. σημείο του χαμηλότερου τεθλασμένου ευθύγραμμου τμήματος.

Παράδειγμα 6 (συνέχεια)

Μείωση της διάστασης του πίνακα – διαγραφή των υποδεέστερων που εντοπίστηκαν στη γραφική αναπαράσταση

		Στρατηγικές	**B**	
			B_4	B_5
			y_4	y_5
A	A_1	x_1	-3	5
	A_2	x_2	2	-1

- Στη συνέχεια εφαρμόζεται η διαδικασία επίλυσης παιγνίου διάστασης 2×2

Παράδειγμα 6 (συνέχεια)

Εντοπισμός άριστης μικτής στρατηγικής για τον παίκτη Α

- ✓ $V(A, B_4) = -3 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2$ και $V(A, B_5) = 5 \cdot x_1 - x_2$.
- ✓ Οπότε $V(A, B_4) = V(A, B_5)$, δηλαδή $-3 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 = 5 \cdot x_1 - x_2$
- ✓ Άρα, $8x_1 = 3x_2$ και επειδή $x_1 + x_2 = 1$ προκύπτει ότι

$$\mathbf{x_1=3/11 \text{ και } x_2=8/11}.$$

- ✓ Αντικαθιστώντας την άριστη μικτή στρατηγική του Α σε οποιοδήποτε από τα $V(A, B_4)$ και $V(A, B_5)$ παίρνουμε την άριστη αναμενόμενη τιμή (μέγιστο προσδοκώμενη κέρδος σύμφωνα με το κριτήριο minimax) για τον παίκτη Α που είναι:

$$\mathbf{V(A) = -3 \times 3/11 + 2 \times 8/11 = 7/11}$$

Παράδειγμα 6 (συνέχεια)

Εντοπισμός άριστης μικτής στρατηγικής για τον παίκτη Β

- ✓ $V(B, A_1) = V(B, A_2)$ δηλαδή $-3y_4 + 5y_5 = 2y_4 – 1y_5$
- ✓ Άρα, $5y_4 = 6y_5$ και επειδή $y_4 + y_5 = 1$ προκύπτει ότι

$$y_4=6/11 \text{ και } y_5=5/11$$

- ✓ Αντικαθιστώντας την άριστη μικτή στρατηγική του Β σε οποιοδήποτε από τα $V(B, A_1)$ και $V(B, A_2)$ παίρνουμε την άριστη αναμενόμενη τιμή (ελάχιστη προσδοκώμενη ζημιά σύμφωνα με το κριτήριο minimax) για τον παίκτη Β που είναι:

$$V(B) = -3 \times 6/11 + 5 \times 5/11 = 7/11$$

Σύνοψη της άριστης λύσης του παραδείγματος 6

- Ο παίκτης Α εφαρμόζει τη μικτή στρατηγική:

  $x_1=3/11$, $x_2=8/11$, με maximin κέρδος $V(A) = 7/11$

- Ο παίκτης Β εφαρμόζει τη μικτή στρατηγική:

  $y_1=y_2=y_3=0$, $y_4=6/11$ και $y_5=5/11$, με minimax ζημιά $V(B) = 7/11$

- Η προσδοκώμενη τιμή παιγνίου είναι:

$$V = V(A) = V(B) = 7/11.$$

Εντοπισμός Μικτής Στρατηγικής - Περίπτωση 2 - *Παίγνιο m×2*

Παράδειγμα 7

			B		
	Στρατηγικές		B_1	B_2	min
			y_1	y_2	
	A_1	x_1	-2	4	-2
A	A_2	x_2	5	-3	-3
	A_3	x_3	4	2	2*
	A_4	x_4	2	1	1
	max		5	4*	$2 \neq 4$

Παράδειγμα 7 (συνέχεια)

Υπολογισμοί

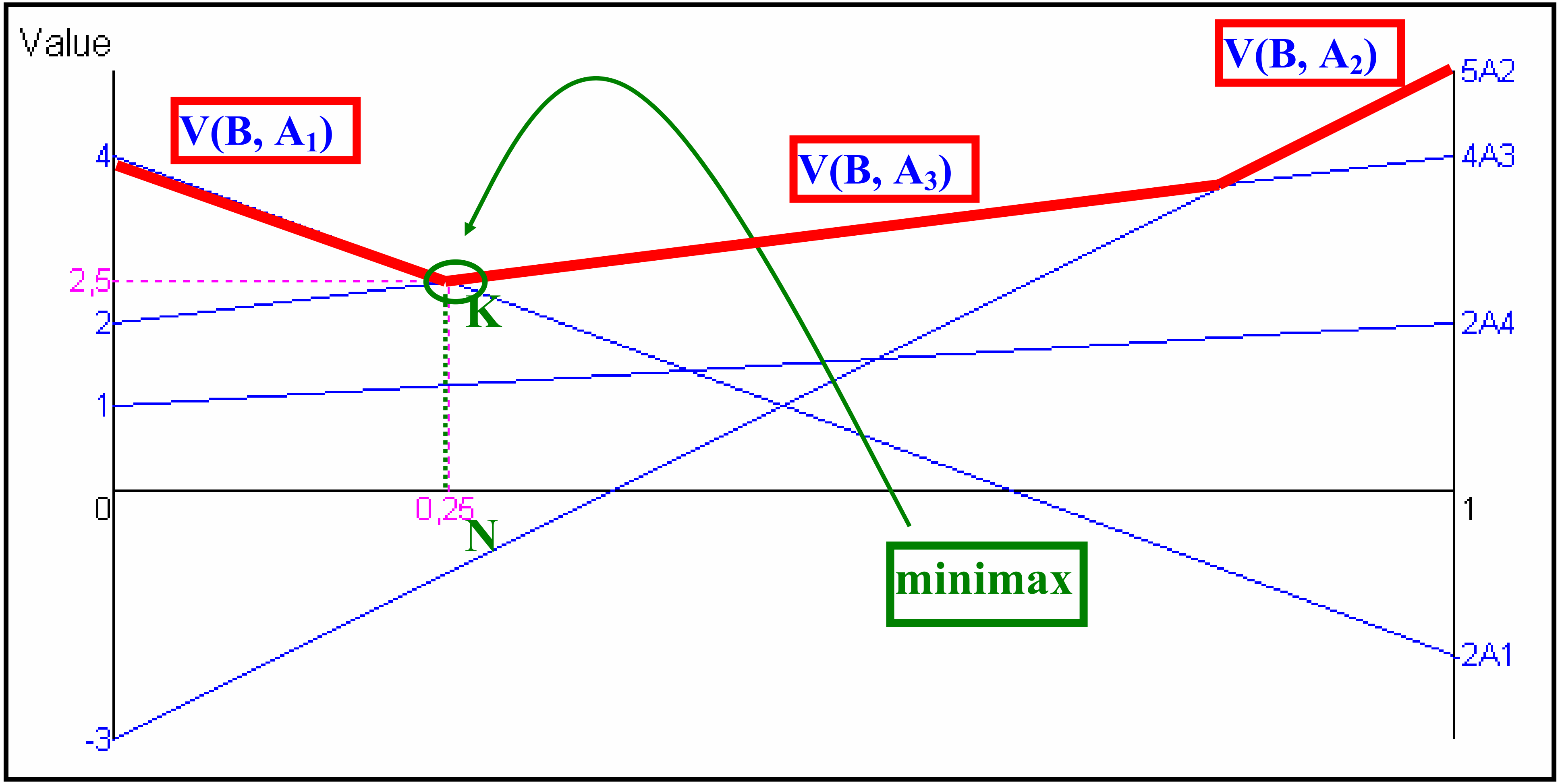
$$V(B, A_1) = -2y_1 + 4y_2$$

$$V(B, A_2) = 5y_1 - 3y_2$$

$$V(B, A_3) = 4y_1 + 2y_2$$

$$V(B, A_4) = 2y_1 - y_2$$

Γραφική Μέθοδος Επίλυσης (μείωση της διάστασης του πίνακα)



Γραφική Μέθοδος Επίλυσης

- Κατασκευάζουμε τους δύο κάθετους άξονες σε απόσταση μιας μονάδος (η πιθανότητα y_1) που εκφράζουν τις στρατηγικές B_1, B_2.
- Χαράζουμε τις ευθείες V(B, A_1), V(B, A_2), … V(B, A_4).
- Ο παίκτης B ακολουθεί μεικτή minmax στρατηγική, δηλ. επιλέγει την ελάχιστη από τις μέγιστες αναμενόμενες απώλειες. Το χαμηλότερο σημείο της μέγιστης τεθλασμένης γραμμής προκύπτει στην τομή των στρατηγικών A_1 και A_3.

Παράδειγμα 7 (συνέχεια)

Μείωση της διάστασης του πίνακα – διαγραφή των υποδεέστερων που εντοπίστηκαν στη γραφική αναπαράσταση

			B	
		Στρατηγικές	**B_1**	**B_2**
			y_1	y_2
A	**A_1**	x_1	-2	4
	A_3	x_2	4	2

- Στη συνέχεια εφαρμόζεται η διαδικασία επίλυσης παιγνίου διάστασης 2×2

Παράδειγμα 7 (συνέχεια)

Εντοπισμός άριστης μικτής στρατηγικής για τον παίκτη Β

- ✓ $V(B, A_1) = V(B, A_3)$ δηλαδή $-2y_1 + 4y_2 = 4y_1 + 2y_2$
- ✓ Άρα, $3y_1 = y_2$ και επειδή $y_1 + y_2 = 1$ προκύπτει ότι

  $y_1 = 1/4$ και $y_2 = 3/4$

- ✓ Αντικαθιστώντας την άριστη μικτή στρατηγική του Β σε οποιοδήποτε από τα $V(B, A_1)$ και $V(B, A_3)$ παίρνουμε την άριστη αναμενόμενη τιμή (ελάχιστη προσδοκώμενη ζημιά σύμφωνα με το κριτήριο minimax) για τον παίκτη Β που είναι:

  $V(B) = -2 \times 0.25 + 4 \times 0.75 = 2.5$

Παράδειγμα 7 (συνέχεια)

Εντοπισμός άριστης μικτής στρατηγικής για τον παίκτη Α

- ✓ $V(A, B_1) = V(A, B_2)$ δηλαδή $-2x_1 + 4x_3 = 4x_1 + 2x_3$
- ✓ Άρα, $3x_1 = x_3$ και επειδή $x_1 + x_3 = 1$ προκύπτει ότι

$$\mathbf{x_1 = 1/4 \text{ και } x_3 = 3/4}$$

- ✓ Αντικαθιστώντας την άριστη μικτή στρατηγική του Α σε οποιοδήποτε από τα $V(A, B_1)$ και $V(A, B_2)$ παίρνουμε την άριστη αναμενόμενη τιμή (μέγιστο προσδοκώμενο κέρδος σύμφωνα με το κριτήριο minimax) για τον παίκτη Α που είναι:

$$\mathbf{V(A) = -2 \times 0.25 + 4 \times 0.75 = 2.5}$$

Σύνοψη της άριστης λύσης του παραδείγματος 7

- Ο παίκτης Α εφαρμόζει τη μικτή στρατηγική:

$x_1 = 1/4$, $x_2 = 0$, $x_3 = 3/4$, $x_4 = 0$, με maximin κέρδος $V(A) = 2.5$

- Ο παίκτης Β εφαρμόζει τη μικτή στρατηγική:

$y_1 = 1/4$ και $y_2 = 3/4$, με minimax ζημιά $V(B) = 2.5$

- Η προσδοκώμενη τιμή παιγνίου είναι

$$V = V(A) = V(B) = 2.5$$

Παράδειγμα 4 (σελ. 18)

		B			
	Στρατηγικές	**B_1**	**B_2**	**B_3**	**min**
A	**A_1**	0	-2	2	**-2***
	A_2	5	4	-3	-3
	A_3	2	3	-4	-4
	max	5	4	**2***	**$-2 \neq 2$**

Δεν υπάρχει σημείο ισορροπίας (ασταθής λύση). Η άριστη λύση θα μπορούσε να βρεθεί με απαλοιφή των υποδεέστερων στρατηγικών (το σκιασμένο τμήμα του πίνακα δείχνει τις εναπομένουσες στρατηγικές). Αν, χάριν παραδείγματος, διαγράψουμε μόνο την A_3 τότε η διαδικασία επίλυσης θα ήταν η ακόλουθη.

Παράδειγμα 4 (επιστροφή - συνέχεια)

Υπολογισμοί

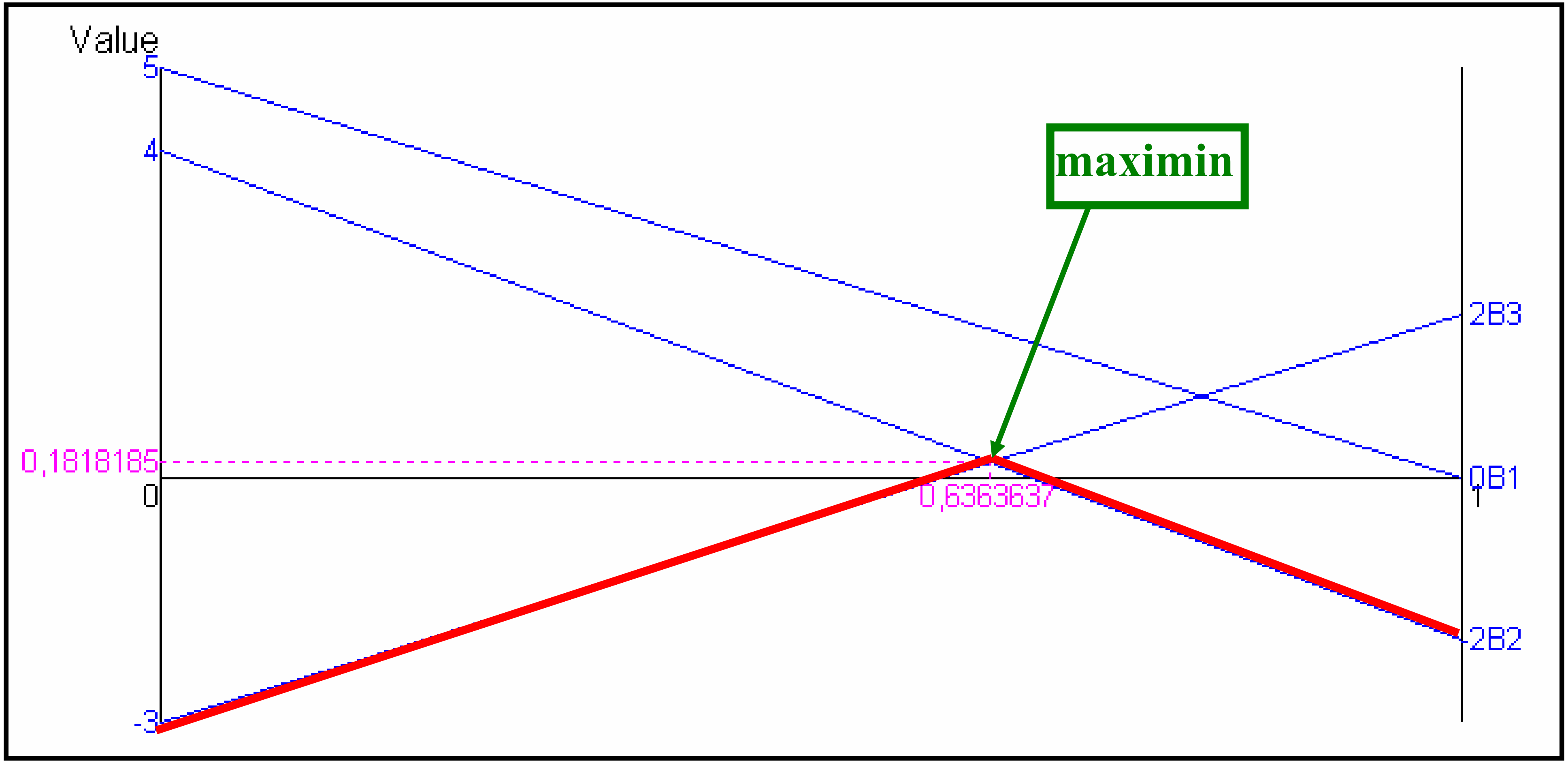
$$V(A, B_1) = 0x_1 + 5(1-x_1) = 5 - 5x_1$$

$$V(A, B_2) = -2x_1 + 4(1-x_1) = 4 - 6x_1$$

$$V(A, B_3) = 2x_1 - 3(1-x_1) = -3 + 5x_1$$

$$V = V(A) = V(B) = y_1 \times (5-5x_1) + y_2 \times (4 - 6x_1) + y_3 \times (-3 + 5x_1)$$

Γραφική Μέθοδος Επίλυσης (μείωση της διάστασης του πίνακα)



Παράδειγμα 4 (επιστροφή - συνέχεια)

Μείωση της διάστασης του πίνακα – διαγραφή των υποδεέστερων που εντοπίστηκαν στη γραφική αναπαράσταση

		Στρατηγικές	**B**	
			B_2	**B_3**
			y_2	**y_3**
A	**A_1**	**x_1**	-2	2
	A_2	**$1-x_1$**	4	-3

- Στη συνέχεια εφαρμόζεται η διαδικασία επίλυσης παιγνίου διάστασης 2×2

Παράδειγμα 4 (επιστροφή - συνέχεια)

Εντοπισμός άριστης μικτής στρατηγικής για τον παίκτη Α

- ✓ $V(A, B_2) = V(A, B_3)$ δηλαδή $-4 - 6x_1 = -3 + 5x_1$. Άρα

  $$x_1 = 7/11 \text{ και } 1-x_1 = 4/11$$

- ✓ Οπότε: $V(A) = 4 - 6 \times (7/11) = 2/11$

Εντοπισμός άριστης μικτής στρατηγικής για τον παίκτη Β

- ✓ $V(B, A_1) = V(B, A_2)$ δηλαδή $-2y_2 + 2y_3 = 42y_2 - 3y_3$. Άρα

  $$y_2 = 5/11 \text{ και } y_3 = 1 - y_2 = 6/11$$

- ✓ Οπότε: $V(B) = -2 \times (5/11) + 2 \times (6/11) = 2/11$

Σύνοψη της άριστης λύσης του παραδείγματος 4

- Ο παίκτης Α εφαρμόζει τη μικτή στρατηγική:

  $x_1 = 7/11$, $x_2 = 1 - x_1 = 4/11$, με maximin κέρδος $V(A) = 2/11$

- Ο παίκτης Β εφαρμόζει τη μικτή στρατηγική:

  $y_1 = 0$, $y_2 = 5/11$ και $y_3 = 1 - y_2 = 6/11$, και $V(B) = 2/11$

- Η προσδοκώμενη τιμή παιγνίου είναι $V = V(A) = V(B) = 2/11$

Παράδειγμα 8

Η Ένωση Καλαθοσφαιριστών (παίκτης Α) διαπραγματεύεται με την Ένωση Σωματείων (παίκτης Β) για την ελάχιστη ετήσια αμοιβή. Κάθε πλευρά έχει τρεις στρατηγικές. Κάθε συνδυασμός, οδηγεί σε ένα ελάχιστο ετήσιο ποσό. Οι στρατηγικές των καλαθοσφαιριστών είναι: 1) καμία διαπραγμάτευση, 2) επιθετική στάση, 3) υποχωρητική στάση. Για τα σωματεία είναι: 1) αποφυγή ρήξης, 2) σθεναρή στάση, 3) «δώστε ό,τι θέλουν». Στον επόμενο πίνακα δίνονται τα ποσά που μπορούν να πετύχουν οι καλαθοσφαιριστές

	B_1	B_2	B_3	**min**
A_1	30	10	35	10
A_2	25	15	30	**15***
A_3	10	25	15	10
max	30	**25***	35	**15≠25**

Παράδειγμα 10 Επίλυση

- Η στρατηγική B_3 του της Ένωσης Σωματείων απαλείφεται ως υποδεέστερη της B_1.

		B_1	**B_2**
		y_1	**y_2**
A_1	**x_1**	30	10
A_2	**x_2**	25	15
A_3	**x_3**	10	25

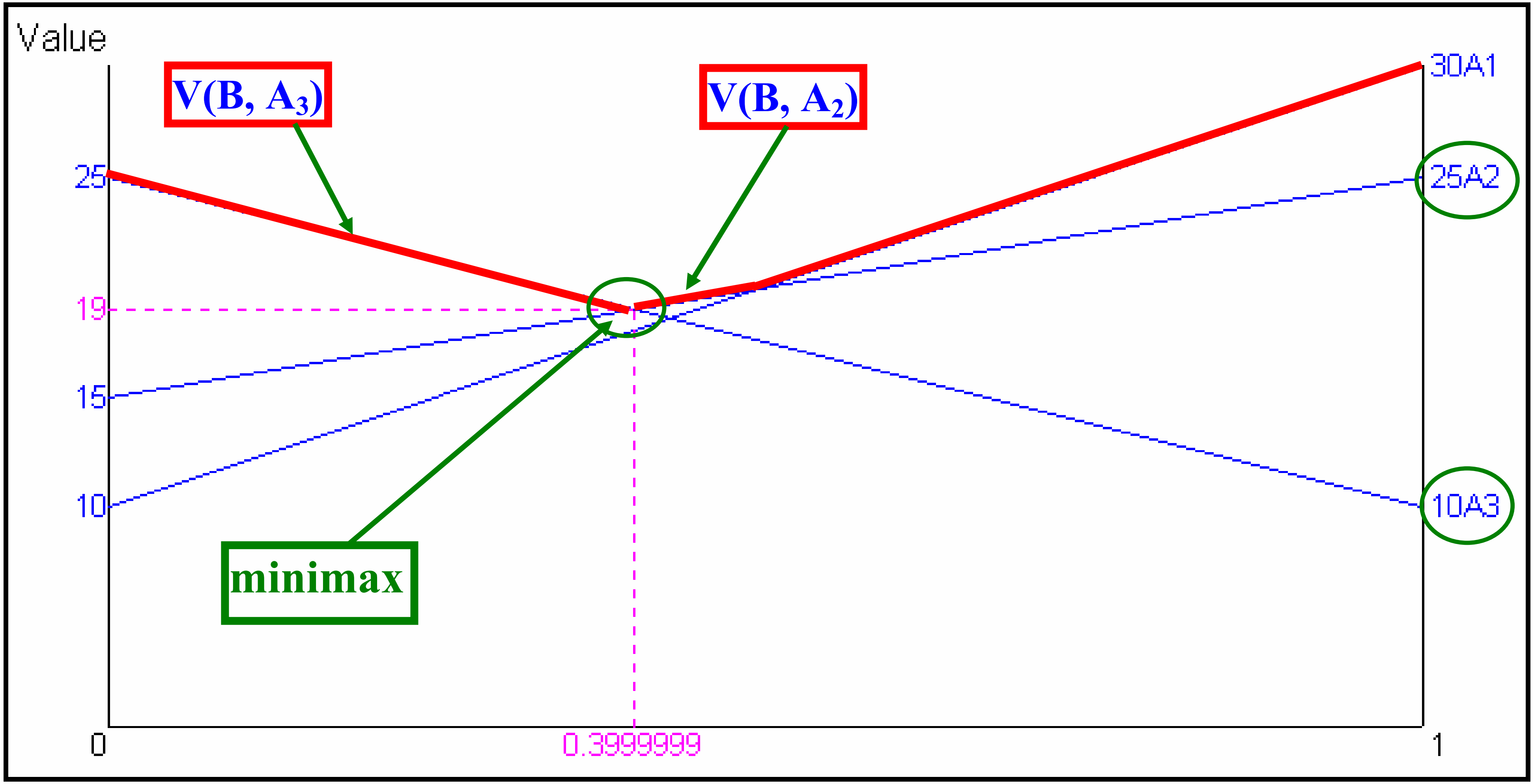
Υπολογισμοί

$$V(B, A_1) = 30y_1 + 10y_2 = 30y_1 + 10(1 - y_1) = 10 + 20y_1$$

$$V(B, A_2) = 25y_1 + 15y_2 = 25y_1 + 15(1 - y_1) = 15 + 10y_1$$

$$V(B, A_3) = 10y_1 + 25y_2 = 10y_1 + 25(1 - y_1) = 25 - 15y_1$$

Γραφική επίλυση παραδείγματος 8



Παράδειγμα 8 (συνέχεια)

Μείωση της διάστασης του πίνακα – διαγραφή των υποδεέστερων που εντοπίστηκαν στη γραφική αναπαράσταση

			B	
Στρατηγικές			**B_1**	**B_2**
			y_1	**y_2**
A	**A_2**	**x_2**	25	15
	A_3	**x_3**	10	25

- Στη συνέχεια εφαρμόζεται η διαδικασία επίλυσης παιγνίου διάστασης 2×2

Παράδειγμα 8 (συνέχεια)

Εντοπισμός άριστης μικτής στρατηγικής για τον παίκτη B

- ✓ $V(B, A_2) = V(B, A_3)$ δηλαδή $15 + 10y_1 = 25 - 15y_1$. Άρα,

$y_1=2/5$ και $y_2 = 3/5$

- ✓ Αντικαθιστώντας την άριστη μικτή στρατηγική του B σε οποιοδήποτε από τα $V(B, A_2)$ και $V(B, A_3)$ παίρνουμε την άριστη αναμενόμενη τιμή για τον παίκτη B:

$V(B) = 25 - 15 \times 2/5 = 19$ $(=15 + 10 \times 2/5)$

Εντοπισμός άριστης μικτής στρατηγικής για τον παίκτη Α

- ✓ $V(A, B_1) = 25\cdot x_2 + 10\cdot x_3$ και $V(A, B_2) = 15\cdot x_2 + 25x_3$
- ✓ Οπότε, επειδή πρέπει $V(A, B_1) = V(A, B_2)$, προκύπτει ότι

  $x_2 = 3/5$ και $x_3 = 2/5$.
- ✓ Αντικαθιστώντας την άριστη μικτή στρατηγική του Α σε οποιοδήποτε από τα $V(A, B_1)$ και $V(A, B_2)$ παίρνουμε την άριστη αναμενόμενη τιμή για τον παίκτη Α:

$$\mathbf{V(A) = 25 \times 3/5 + 10 \times 2/5 = 19}$$

Σύνοψη της άριστης λύσης του παραδείγματος 8

- Ο παίκτης Α εφαρμόζει τη μικτή στρατηγική:

  $x_1 = 0$, $x_2 = 3/5$ και $x_3 = 2/5$, με maximin κέρδος $V(A) = 19$

- Ο παίκτης Β εφαρμόζει τη μικτή στρατηγική:

  $y_1=2/5$, $y_2 = 3/5$ και $y_3 =0$, με minimax ζημιά $V(B) = 19$

- Η προσδοκώμενη τιμή παιγνίου είναι $V = V(A) = V(B) = 19$

Παίγνιο δύο παικτών μη σταθερού αθροίσματος

Το δίλημμα του κρατούμενου

Η αστυνομία έχει συλλάβει δύο υπόπτους για συμμετοχή σε ληστεία, τον Σάββα και το Βασίλη. Υπάρχουν αρκετά στοιχεία για να καταδικαστούν σε 1 χρόνο φυλάκιση για διάφορα πλημμελήματα, αλλά η αστυνομία γνωρίζει ότι είναι μέλη μιας συμμορίας. Δεν έχει όμως αρκετές αποδείξεις για την ενοχή τους και χρειάζεται απαραίτητα την ομολογία τους για την καταδίκη. Όταν συλλαμβάνονται οδηγούνται σε χωριστά δωμάτια και ανακρίνονται χωρίς να μπορούν να έχουν επαφή. Στον καθένα εκ των δύο η αστυνομία κάνει την ακόλουθη πρόταση: *Μπορούμε, όπως ξέρεις να σε καταδικάσουμε σε 1 χρόνο φυλάκιση. Αν όμως ομολογήσεις και καρφώσεις το φίλο σου, θα αφεθείς ελεύθερος. Αν ο φίλος σου δεν ομολογήσει θα καταδικαστεί σε 20 χρόνια φυλάκιση. Αν όμως και οι δύο ομολογήσετε, τότε δεν μπορούμε να κάνουμε τίποτε, και οι δύο θα μπείτε φυλακή για 5 χρόνια.*

Το δίλημμα του κρατούμενου (συνέχεια)

		Βασίλης	
		Ομολογεί	Δεν ομολογεί
Σάββας	Ομολογεί	Σ = -5, Β = -5	Σ = 0, Β = -20
	Δεν ομολογεί	Σ = -20, Β = 0	Σ = -1, Β = -1

- **Το άθροισμα των αμοιβών στο κάθε κελί δεν είναι σταθερό**. Πιο υψηλό είναι το -2 (-1-1) και πιο χαμηλό το -20 (0-20).
- Ισορροπεί στο σημείο στο οποίο κανένας παίκτης (κρατούμενος) δεν μπορεί να επωφεληθεί από μονομερή αλλαγή στρατηγικής.
- **Σημείο ισορροπίας το (-5, -5) κι όχι το (-1, -1).**
- Αν οι δύο παίκτες συνεργαστούν (δεν ομολογήσουν) τότε κάθε παίκτης μπορεί να κερδίσει ξεγελώντας τον άλλο. Αν και οι δύο επιχειρήσουν να ξεγελάσουν αλλήλους, θα βρεθούν σε δυσχερέστερη θέση από τη στρατηγική της συνεργασίας.