Σ Υ Γ Χ Ρ Ο Ν Η   Φ Υ Σ Ι Κ Η

Αντώνης Στρέκλας

Επίκουρος Καθηγητής

Τμήμα Μαθηματικό

Π Α Τ Ρ Α   2 0 0 0

Π Ε Ρ Ι Ε Χ Ο Μ Ε Ν Α

Κεφάλαιο 1

Διανυσματική Ανάλυση

1. Τα φυσικά μεγέθη .... σελ 13
2. Διανυσματικός λογισμός .... σελ 14
3. Διανυσματικές συναρτήσεις .... σελ 21
4. Τα Διανυσματικά πεδία .... σελ 25
5. Διαφορικές μορφές .... σελ 30
6. Οι τανυστές .... σελ 35

Ασκήσεις .... σελ 41

Κεφάλαιο 2

Μηχανική

1. Στατική .... σελ 53
2. Κινηματική .... σελ 60
3. Μηχανική του υλικού σημείου .... σελ 67
4. Συντηρητικά δυναμικά πεδία .... σελ 71
5. Μηχανική συστήματος υλικών σημείων .... σελ 74

Ασκήσεις .... σελ 77

Κεφάλαιο 3

Ταλαντώσεις

1. Αρμονική ταλάντωση .... σελ 97
2. Αποσβεννυμένη ταλάντωση .... σελ 102
3. Εξαναγκασμένη ταλάντωση .... σελ 106
Ασκήσεις .... σελ 107

Κεφάλαιο 4

Συστήματα συντεταγμένων

1. Αδρανιακά συστήματα .... σελ 119
2. Μη αδρανιακά συστήματα .... σελ 121
3. Περιστρεφόμενα συστήματα .... σελ 122
4. Επιτάχυνση σε κινούμενα συστήματα .... σελ 127
5. Κίνηση στερεού σώματος .... σελ 129
6. Κεντρικές κινήσεις .... σελ 131
Ασκήσεις .... σελ 139

Κεφάλαιο 5

Οι ομάδες της κλασσικής μηχανικής

1. Οι ομάδες .... σελ 155
2. Οι Λη ομάδες και οι Λη άλγεβρες .... σελ 158
3. Η ομάδα μεταφοράς T_3 .... σελ 162
4. Η ομάδα περιστροφής $R(3)$ .... σελ 164
5. Η ομάδα $SU(2)$ .... σελ 166

6. Η Ευκλείδεια ομάδα .... σελ 174
7. Η ομάδα Γαλιλαίου .... σελ 176
Ασκήσεις .... σελ 178

Κεφάλαιο 6

Αναλυτική μηχανική

1. Οι εξισώσεις του Λαγκράνζ .... σελ 187
2. Οι εξισώσεις του Χάμιλτον .... σελ 191
3. Οι κανονικοί μετασχηματισμοί .... σελ 196
4. Η κανονική ομάδα .... σελ 205
5. Η θεωρία των πεδίων .... σελ 208
6. Το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο .... σελ 213
Ασκήσεις .... σελ 219

Κεφάλαιο 7

Ειδική θεωρία της σχετικότητας

1. Η οριακή ταχύτητα του φωτός .... σελ 239
2. Τα αξιώματα της σχετικότητας .... σελ 240
3. Οι μετασχηματισμοί Λόρεντς .... σελ 241
4. Η διαστολή του χρόνου .... σελ 247
5. Η συστολή του μήκους .... σελ 248
6. Ο κώνος του φωτός .... σελ 249
7. Η ομάδα Λόρεντς .... σελ 254
8. Η Κινηματική .... σελ 258
9. Η σχετικιστική δυναμική .... σελ 260
10. Η ορμή και η ενέργεια .... σελ 261
Ασκήσεις .... σελ 266

Άλυτες ασκήσεις .... σελ 273

Εισαγωγή

Φυσική είναι η επιστήμη που έχει σκοπό να ανακαλύψει και να διατυπώσει τους "νόμους της φύσεως". Είναι η επιστήμη που εξετάζει την ύλη και την ενέργεια, την κίνηση και τις δυνάμεις, την μεταβολή και την μέτρηση.

Η γλώσσα της Φυσικής είναι τα μαθηματικά, μια γλώσσα που δεν δέχεται παρανοήσεις. Οι νόμοι και οι προτάσεις της φυσικής εκφράζονται με οικονομία και ακρίβεια με την βοήθεια των μαθηματικών. Τα μαθηματικά χρησιμοποιούνται σαν εργαλείο για την ανάπτυξη της θεωρίας. Ο διαχωρισμός όμως ανάμεσα στα μαθηματικά και την φυσική δεν είναι σαφής. Έτσι για παράδειγμα τα στοιχειώδη σωμάτια του Πλάτωνα δεν αποτελούνται από κάποια ουσία αλλά είναι μαθηματικές μορφές και σε αυτό συμφωνεί απολύτως η σύγχρονη φυσική. Αυτός όμως ο μη σαφής διαχωρισμός είναι δυνατόν να οδηγήσει ορισμένους ευφάνταστους και σε παρανοήσεις, τετραδιάστατα όντα, ταξίδια στον χρόνο, παράλληλοι κόσμοι.

Η φυσική αποτελείται από την θεωρία και το πείραμα και τα δύο παίζουν συμπληρωματικό ρόλο στην ανάπτυξη της επιστήμης. Η ορθότητα των συμπερασμάτων της θεωρίας ελέγχεται από τα πειραματικά δεδομένα. Τα πειράματα όχι μόνο στηρίζουν την θεωρία αλλά μπορούν να υποδείξουν και κάποιες τροποποιήσεις της θεωρίας ή ακόμα και να περιορίζουν το πεδίο της ισχύος της. Μια καλή μαθηματική θεωρία που δεν έχει πειραματικό υπόβαθρο δεν είναι μια φυσική θεωρία. Η φυσική είναι ουσιαστικά μια πειραματική επιστήμη. Η σύγχρονη φυσική απαιτεί κάθε φυσικό μέγεθος να το ορίζουμε περιγράφοντας συγχρόνως το πείραμα με το οποίο το μέγεθος αυτό θα μπορούσε να μετρηθεί. Διαφορετικά έννοιες που η αλήθεια τους δεν μπορεί να ελεγχθεί πειραματικά είναι έξω από το αντικείμενο της φυσικής, ενδιαφέρουν ίσως την Φιλοσοφία ή την Θεολογία.

Ένα μεγάλο μέρος της έρευνας βασίζεται σήμερα στον ηλεκτρονικό υπολογιστή. Επιτρέπουν στον θεωρητικό φυσικό να εκτελέσει υπολογισμούς υπερβολικά εκτεταμένους και πολύπλοκους. Υπολογιστές έχουν επίσης ενσωματωθεί από τους πειραματικούς φυσικούς κατάλληλα σε πειραματικές διατάξεις έτσι ώστε τα αποτελέσματα των μετρήσεων να είναι διαθέσιμα ταυτόχρονα με την διεξαγωγή των πειραμάτων.

Σκοπός της φυσικής είναι να βρεθεί ένα ενοποιημένο σύνολο νόμων και κανόνων που να υπακούει η ύλη. Αυτό έχει επιτευχθεί σήμερα σε μεγάλο βαθμό αν και δεν έχει βρεθεί ακόμα μία πλήρης θεωρία όλων των φυσικών φαινομένων και ορισμένοι απαισιόδοξοι υποστηρίζουν ότι δεν θα βρεθεί ποτέ..

Η φυσική έχει επηρεάσει άλλα επιστημονικά πεδία όπως για παράδειγμα την φιλοσοφία και την ιατρική. Η φυσική προσφέρει τα συμπεράσματά της κυρίως στην τεχνολογία που με την σειρά της προσέφερε υψηλότερο βιοτικό επίπεδο στις ανθρώπινες κοινωνίες αλλά και τον φόβο ενός πυρηνικού ολέθρου.

Η ιστορία της φυσικής αρχίζει με την ιστορία του ανθρώπου. Οι μυθολογίες των διαφόρων λαών ασχολούνται με την αρχή του φυσικού κόσμου και περιγράφουν τον τρόπο που γεννήθηκε. Οι Έλληνες φαντάστηκαν τον χώρο (χάος) σαν την αρχή και τον χρόνο (Κρόνος) σαν ένα Τιτάνα που γεννούσε και μετά έτρωγε τα παιδιά του. Ο μύθος της δημιουργίας του κόσμου από ένα υπέρτατο ον τα χαρακτηριστικά του οποίου διαφέρουν από πολιτισμό σε πολιτισμό εμφανίστηκε σε ένα ανώτερο στάδιο πολιτιστικής αναπτύξεως.

Οι πρώτοι που ασχολήθηκαν συστηματικά με την Φυσική είναι οι Έλληνες Φιλόσοφοι της αρχαιότητας. Ο Πυθαγόρας (570-470), ο Πλάτων (428-347) και ο Αριστοτέλης (384-322) είναι ορισμένοι από αυτούς. Σημαντική είναι η συμβολή του Αρχιμήδη (287-212) στην κλασσική μηχανική. Έθεσε τις βάσεις του απειροστικού λογισμού και θεωρείται ο θεμελιωτής της στατικής. Μετά την καταστροφή της βιβλιοθήκης της Αλεξάνδρειας, κάποιες γνώσεις πέρασαν στην Ευρώπη μέσω των Αράβων και των Εβραίων σοφών.

Η νεότερη φυσική αρχίζει τον 17ο αιώνα με τον Νεύτωνα (1642-1727) που διατύπωσε τους περίφημους νόμους της Μηχανικής. Φυσικοί που συνέβαλλαν σημαντικά στην ανάπτυξη της κλασσικής φυσικής είναι ο Γαλιλαίος (1629-1695), ο Κέπλερ (1571-1630), ο Γκάους (1777-1855) που μαζί με τον Αρχιμήδη και τον Νεύτωνα θεωρείται ένας από του μεγαλύτερους μαθηματικούς και τέλος ο Μάξγουελ (1831-1879) που θεμελίωσε τον ηλεκτρομαγνητισμό. Αναφέρουμε επίσης τους Λαγκράνζ (1730-1813) και Χάμιλτον (1805-1865) που θεμελίωσαν την αναλυτική μηχανική.

Στον 20ο αιώνα πολλοί φυσικοί πίστευαν ότι η θεωρία είχε τελειώσει και έπρεπε να εφαρμόσουμε τους ήδη γνωστούς νόμους για να εξηγήσουμε όλα τα φαινόμενα. Εκείνη όμως την εποχή εμφανίστηκαν ορισμένα πειραματικά δεδομένα που η κλασσική μηχανική δεν μπορούσε να εξηγήσει. Πειράματα με ηλεκτρομαγνητικά πεδία, με ταχύτητες που πλησίαζαν την ταχύτητα του φωτός έδιναν αποτελέσματα που δεν συμφωνούσαν με τα συμπεράσματα της θεωρίας. Η θεωρία οδηγούσε σε λάθος συμπεράσματα και έπρεπε να διορθωθεί. Η διόρθωση αυτή οδήγησε τελικά στην ανάπτυξη της σχετικότητας. Σημαντική είναι η συνεισφορά στην ανάπτυξη της θεωρίας των Λόρεντς (1853-1928) και Πουανκαρέ (1854-1912). Το 1905 θεμελιώθηκε η θεωρία της ειδικής σχετικότητας από τον Αϊνστάιν (1879-1955) και γενικεύθηκε αργότερα (1916) από τον ίδιο. Θα ήταν παράλειψη αν δεν αναφέραμε εδώ και το όνομα του Καραθεοδωρή (1873-1950).

Εκεί όμως που η κλασσική Μηχανική απέτυχε παταγωδώς να δώσει την οποιαδήποτε απάντηση ήταν στην περιοχή των μικρών σωματιδίων. Τα συμπεράσματα των πειραμάτων στον μικρόκοσμο ήταν αντίθετα όχι μόνο στην κλασσική φυσική αλλά και στην κοινή λογική μας. Αυτές οι ασυμφωνίες οδήγησαν τελικά στην ανάπτυξη μιας τελείως διαφορετικής θεωρίας. Την Κβαντική Μηχανική. Οι πρώτοι που ασχολήθηκαν με τα άτομα υπήρξαν οι Έλληνες φιλόσοφοι Λεύκιππος (440/430) και Δημόκριτος (470-380). Η κβαντική μηχανική αρχίζει ουσιαστικά το 1927 από τον Σρέντινγκερ (1887-1961) και τον Χάιζενμπεργκ (1901- 1976) ενώ ο Πλανκ (1858-1947) θεωρείται ο πατέρας της κβαντικής μηχανικής.

Μια καινούργια θεωρία που θα συνδυάζει την σχετικιστική και την κβαντική μηχανική είναι το αντικείμενο της σύγχρονης έρευνας. Οι δύο θεωρίες φαίνεται ότι δεν είναι συμβιβαστές μεταξύ τους και το πρόβλημα παραμένει ανοικτό. Κάποια πρόοδος έχει γίνει για το πεδίο της βαρύτητας που είναι συνεπές και με την κβαντική και με την σχετικιστική μηχανική. Τέλος η κβαντική θεωρία των πεδίων έχει κάνει σπουδαία πρόοδο στην προσπάθεια για την κατανόηση της φύσεως.

Το βιβλίο αυτό απευθύνεται στους φοιτητές του Μαθηματικού τμήματος που έρχονται για πρώτη φορά σε επαφή με την φυσική. Το βιβλίο βασίστηκε στην ύλη του αναλυτικού προγράμματος του τομέα της Εφαρμοσμένης Ανάλυσης του Μαθηματικού Τμήματος. Πολλά από τα θέματα του βιβλίου εξετάζονται διεξοδικότερα σε αντίστοιχα μαθήματα επιλογής που διδάσκονται, αν τα επιλέξουν, οι φοιτητές σε επόμενα εξάμηνα. Σκοπός του βιβλίου είναι να εισάγει τους φοιτητές στα μαθήματα αυτά.

Για την κατανόηση του βιβλίου ο φοιτητής πρέπει να γνωρίζει την θεωρία των διαφορικών εξισώσεων που έχει ήδη διδαχθεί σε προηγούμενο εξάμηνο. Το αναγκαίο μαθηματικό υπόβαθρο περιέχεται συνοπτικά στο πρώτο κεφάλαιο. Η ύλη του κεφαλαίου αυτού εξετάζεται διεξοδικότερα στα μαθήματα της Πραγματικής Αναλύσεως. Στα επόμενα κεφάλαια περιέχονται τα βασικά θέματα της κλασσικής μηχανικής και εξετάζονται διάφορα φυσικά φαινόμενα. Έμφαση δίνεται στην μελέτη των ταλαντώσεων και στη μελέτη των κινήσεων σε κεντρικό δυναμικό. Στο επόμενο κεφάλαιο αναπτύσσεται συνοπτικά η θεωρία των Λη ομάδων. Η θεωρία των ομάδων είναι ένα πολύ χρήσιμο εργαλείο για την κλασσική μηχανική. Στα τελευταία δύο κεφάλαια αναπτύσσεται η θεωρία των Λαγκράνζ και Χάμιλτον και η ειδική θεωρία της σχετικότητας. Σε κάθε κεφάλαιο περιέχονται λυμένες ασκήσεις που έχουν σκοπό να εμπεδωθεί καλύτερα η θεωρία. Πολλές από τις ασκήσεις αυτές συμπληρώνουν την θεωρία εκεί που η αναλυτική ανάπτυξη θα έκανε το βιβλίο μάλλον ακατάλληλο για τους φοιτητές που απευθύνεται.

Παρακαλώ τους αναγνώστες να μην διστάσουν να μου υποδείξουν τυχόν φραστικά και υπολογιστικά λάθη αλλά και παραλείψεις που θα υποπέσουν στην αντίληψή τους. Θα τους είμαι λίαν υποχρεωμένος και θα τα λάβω σοβαρά υπόψη μου σε μια επόμενη έκδοση.

Πάτρα 2000 Αντώνης Στρέκλας

Ω Φύση, θεά μητέρα όλων,	*Ω Φύσι παμμήτειρα θεά,*
πολυμήχανη μητέρα, επουράνια,	*πολυμήχανε μήτερ, ουρανίη,*
σεβαστή, θεά που κτίζεις πολλά,	*πρέσβειρα, πολύκτιτε δαίμον,*
βασίλισσα, δαμάζεις τα πάντα,	*ανάσσα, πανδαμάτωρ, αδάμαστε*
άκαμπτη κυβερνήτρα, ολόλαμπρη,	*κυβερνήτειρα, παναυγής,*
παντοκράτειρα, πάντοτε τιμημένη,	*παντοκράτειρα, τετιμέν’ αεί,*
ο υπεράνω όλων θεός, είσαι αθά-	*πανυπέρτατε δαίμον,*
νατη, πρωτότοκος, πανάρχαια και	*άφθιτε, πρωτογένεια, παλαίφατε,*
δοξάζεις τους άνδρες στη μάχη,	*κυδιάνειρα,*
νυκτερινή, πολύπειρη, φέρνεις	*Εννυχίη, πολύπειρε, σελασφόρε,*
το φως, δύσκολα καθησυχάζεις,	*δεινοκάθεκτε, άψοφον*
περπατάς αθόρυβα με ελιγμούς,	*αστραγάλοισι ποδιών ίχνος*
αγνή, διευθύνεις του θεούς, είσαι	*ειλίσσουσα, αγνή, κοσμήτειρα*
το τέλος, χωρίς να έχεις τέλος,	*θεών, ατελής τε τελευτή,*
μετέχεις στα πάντα αλλά είσαι	*κοινή μεν πάντεσσιν,*
ολομόναχη, αυτογέννητη, χωρίς	*ακοινώνητε δε μούνη,*
πατέρα, είσαι εράσμια, πολυμή-	*αυτοπάτωρ, απάτωρ, ερατή,*
χανη και μέγιστη	*πολύμητι, μεγίστη . . . . . .*
τα πάντα είσαι εσύ, διότι μόνη	*πάντα συ έσσι, τα πάντα*
σου εσύ δημιουργείς όλα αυτά.	*συ γαρ μούνη τάδε τεύχεις*

Ορφικός *Ύμνος*

Κεφάλαιο 1

ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ

1.1 Τα φυσικά μεγέθη

Τα Μεγέθη της κλασσικής φυσικής είναι φυσικές ιδιότητες που χαρακτηρίζονται από ποιότητα και ποσότητα. Τα μαθηματικά σύμβολα που παριστάνουν το φυσικό μέγεθος ορίζουν την ποιότητα, ενώ οι αριθμοί χαρακτηρίζουν την ποσότητα του μεγέθους. Το αποτέλεσμα της μετρήσεως ενός μεγέθους είναι η αριθμητική τιμή. Για τον προσδιορισμό του αριθμού αυτού είναι απαραίτητο να ορίσουμε την μονάδα μετρήσεως που εκλέγεται αυθαιρέτως. Η τιμή του μεγέθους προκύπτει από την σύγκριση του μεγέθους με την μονάδα μετρήσεως. Το μέτρο ενός μεγέθους είναι το γινόμενο της αριθμητικής του τιμής με την μονάδα μετρήσεως. Για παράδειγμα μήκος ίσο με πέντε χιλιόμετρα $l = 5Km$ ή μάζα ίση με δέκα γραμμάρια $m = 10gr$.

Έχει διαπιστωθεί ότι τα περισσότερα μεγέθη μπορούν να εκφραστούν σαν συναρτήσεις άλλων μεγεθών. Η πρόσθεση ή η αφαίρεση μεγεθών γίνεται μόνο αν τα μεγέθη χαρακτηρίζονται από τις ίδιες μονάδες. Πολλές φορές μπορούμε να διαπιστώσουμε αν μια συναρτησιακή σχέση μεταξύ κάποιων μεγεθών είναι σωστή ή λανθασμένη από τις μονάδες μετρήσεως των μεγεθών. Για παράδειγμα οι μονάδες αμφοτέρων των μελών μιας ισότητας πρέπει να συμπίπτουν. Οι μονάδες αυτών των παραγώγων μεγεθών ορίζονται με την βοήθεια της συναρτησιακής τους σχέσεως από τα βασικά μεγέθη. Για παράδειγμα η μονάδα μετρήσεως της ταχύτητας είναι το $1\ cm/sec$ διότι η ταχύτητα ορίζεται από την συναρτησιακή σχέση $\upsilon = s/t$ όπου s είναι το μήκος και t είναι ο χρόνος με αντίστοιχες μονάδες μετρήσεων το εκατοστό cm και το δευτερόλεπτο sec.

Τα βασικά μεγέθη της μηχανικής είναι τρία και οι μονάδες τους ονομάζονται θεμελιώδεις μονάδες. Οι θεμελιώδεις μονάδες ορίζονται με διεθνείς συμβάσεις. Συνήθως χρησιμοποιούμε τα εξής συστήματα βασικών μεγεθών.

1. Το σύστημα (C.G.S) (Εκατοστό Γραμμάριο Δευτερόλεπτο)

Θεμελιώδη μεγέθη είναι το μήκος, η μάζα και ο χρόνος με αντίστοιχες μονάδες το εκατοστό (1cm), το γραμμάριο (1gr) και το δευτερόλεπτο (1sec).

2. Το σύστημα Τ.Σ. (Τεχνικό Σύστημα)

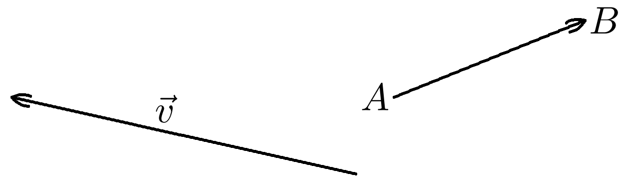
Θεμελιώδη μεγέθη είναι το μήκος, το βάρος (η δύναμη) και ο χρόνος με αντίστοιχες μονάδες το μέτρο (1m), το χιλιόγραμμο βάρους (1Kgr*) και το δευτερόλεπτο (1sec).

3. Το σύστημα S.I. (Διεθνές σύστημα)

Θεμελιώδη μεγέθη είναι το μήκος, η μάζα, ο χρόνος και η θερμοκρασία με αντίστοιχες μονάδες το μέτρο (1m), το χιλιόγραμμο (1Kgr) το δευτερόλεπτο (1sec) και τον βαθμό Κέλβιν (1^oK).

1.2 Διανυσματικός λογισμός

Πολλά φυσικά μεγέθη μπορούν να προσδιοριστούν πλήρως από ένα μόνο αριθμό, όπως για παράδειγμα η θερμοκρασία η ενέργεια το μήκος κ.λ.π. Τα μεγέθη αυτά ονομάζονται μονόμετρα ή βαθμωτά. Υπάρχουν όμως άλλα φυσικά μεγέθη που προσδιορίζονται από περισσότερους αριθμούς. Για παράδειγμα το μέγεθος της ταχύτητας χαρακτηρίζεται από τρεις αριθμούς που παριστάνουν το μέγεθος, την διεύθυνση και την φορά του μεγέθους. Η κατάλληλη μαθηματική έννοια για να περιγράψουμε απλά και με σαφήνεια τέτοια μεγέθη είναι το διάνυσμα. Τα αντίστοιχα μεγέθη ονομάζονται διανυσματικά φυσικά μεγέθη.

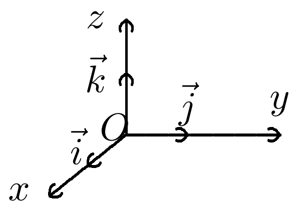


Σχήμα 1.1
Τα διανύσματα μεγέθη

Τέλος υπάρχουν φυσικά μεγέθη που προσδιορίζονται από περισσότερους από τρεις αριθμούς. Τέτοια μεγέθη ονομάζονται τανυστικά και περιγράφονται από τανυστές.

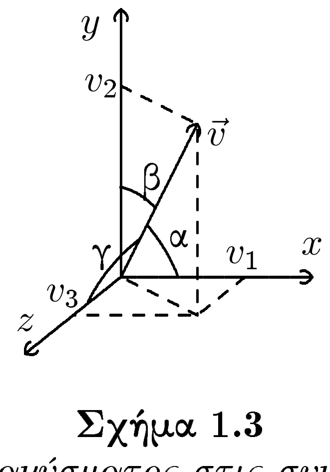
Ένα διάνυσμα παριστάνεται γεωμετρικά από ένα προσανατολισμένο ευθύγραμμο τμήμα. Ο προσανατολισμός του καθορίζεται από ένα βέλος $\overrightarrow{AB}$. Το σημείο A είναι η αρχή και το B το τέλος του τμήματος. Η διεύθυνση και η φορά του τμήματος αυτού προσδιορίζει την διεύθυνση και την φορά του διανύσματος, ενώ το μήκος του προσδιορίζει το μέτρο του διανύσματος.

Θα γράφουμε τα διανύσματα με ενα βέλος από επάνω. Για παράδειγμα η ταχύτητα συμβολίζεται με $\vec{\upsilon}$. Το μέτρο του διανύσματος θα τα συμβολίζουμε με τα μαθηματικά τους σύμβολα χωρίς το βέλος από επάνω. Για το μέτρο της ταχύτητας για παράδειγμα γράφουμε (μέτρο $\vec{\upsilon}$) $= \upsilon$. Οι συμβολισμοί $|\vec{\upsilon}|$ ή και $\|\vec{\upsilon}\|$ χρησιμοποιούνται επίσης για το μέτρο ενός διανύσματος.



Σχήμα 1.2
Τρισορθογώνιο σύστημα αξόνων

Για την απλότητα των εκφράσεων συνήθως χρησιμοποιούμε ένα τρισορθογώνιο σύστημα αξόνων $Oxyz$ σαν σύστημα αναφοράς. Επάνω στους άξονες Ox, Oy και Oz ορίζουμε αντιστοίχως τρία μοναδιαία διανύσματα $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$. Τα διανύσματα αυτά δείχνουν την θετική φορά των αξόνων.



Σχήμα 1.3
Ανάλυση διανύσματος στις συνιστώσες του

Ένα διάνυσμα περιγράφεται αλγεβρικά από τρεις αριθμούς. Τοποθετούμε το διάνυσμα έτσι ώστε η αρχή του να συμπίπτει με την αρχή ενός συστήματος αναφοράς. Η θέση του τέλους του διανύσματος περιγράφεται από τρεις αριθμούς. Οι αριθμοί αυτοί είναι οι συντεταγμένες του διανύσματος ως προς το σύστημα αναφοράς. Με αυτή την έννοια το διάνυσμα της ταχύτητας περιγράφεται από την τριάδα των αριθμών $(\upsilon_1, \upsilon_2, \upsilon_3)$ που ονομάζονται (Καρτεσιανές) συνιστώσες. Ένα διάνυσμα $\vec{v}$ γράφεται ως εξής

$$\vec{v} = (v_1, v_2, v_3) = v_1\vec{i} + v_2\vec{j} + v_3\vec{k}$$

Δύο διανύσματα είναι ίσα αν οι αντίστοιχες συνιστώσες τους είναι ίσες. Ένα διάνυσμα είναι ίσο με το μηδενικό διάνυσμα όταν και οι τρεις συνιστώσες του είναι μηδέν.

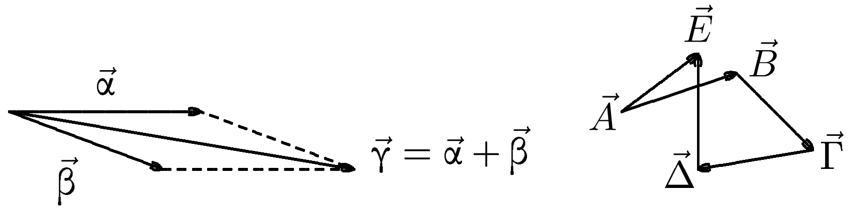
Έστω ότι το διάνυσμα $\vec{v}$ είναι τοποθετημένο στην αρχή των αξόνων και σχηματίζει με τους θετικούς άξονες του συστήματος τις γωνίες α, β και γ. Οι συντεταγμένες του διανύσματος μπορούν να βρεθούν από τις γωνίες αυτές. Έχουμε $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ και

$$v_1 = v\,\text{συν}\,\alpha \qquad v_2 = v\,\text{συν}\,\beta \qquad v_3 = v\,\text{συν}\,\gamma$$

Τα συνημίτονα αυτά ονομάζονται διευθύνοντα συνημίτονα. Το μέτρο του διανύσματος από το Πυθαγόρειο θεώρημα είναι

$$\upsilon = \sqrt{\upsilon_1^2 + \upsilon_2^2 + \upsilon_3^2}$$

Μπορούμε να προσθέσουμε δύο διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$. Το αποτέλεσμα είναι ένα τρίτο διάνυσμα που συμβολίζεται με $\vec{\alpha}+\vec{\beta}$. Η πράξη της προσθέσεως είναι μια εσωτερική πράξη συνθέσεως στον χώρο των διανυσμάτων.



Σχήμα 1.4
Άθροισμα διανυσμάτων

Το άθροισμα δύο διανυσμάτων $\vec{\alpha}+\vec{\beta}$ βρίσκεται γεωμετρικά από τον κανόνα του παραλληλογράμμου. Μεταφέρουμε τα διανύσματα σε ένα σημείο Ο που συνήθως είναι η αρχή του συστήματος συντεταγμένων. Μετά σχηματίζουμε το παραλληλόγραμμο που έχει προσκείμενες πλευρές τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$. Το διάνυσμα $\vec{\alpha}+\vec{\beta}$ είναι η διαγώνιος του παραλληλογράμμου.

Αλγεβρικά το άθροισμα δύο διανυσμάτων είναι ένα τρίτο διάνυσμα με συνιστώσες το άθροισμα των αντίστοιχων συνιστωσών των δύο διανυσμάτων. Δηλαδή

$$\vec{\alpha}+\vec{\beta}=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)+(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=(\alpha_1+\beta_1,\alpha_2+\beta_2,\alpha_3+\beta_3)$$

Οι δύο αυτοί ορισμοί του αθροίσματος είναι ισοδύναμοι.

Η πράξη της προσθέσεως των διανυσμάτων έχει την προσεταιριστική ιδιότητα δηλαδή

$$(\vec{\alpha}+\vec{\beta})+\vec{\gamma}=\vec{\alpha}+(\vec{\beta}+\vec{\gamma})$$

και την αντιμεταθετική ιδιότητα δηλαδή

$$\vec{\alpha}+\vec{\beta}=\vec{\beta}+\vec{\alpha}$$

Επίσης υπάρχει διάνυσμα $\vec{0}$ τέτοιο ώστε

$$\vec{\alpha}+\vec{0}=\vec{0}+\vec{\alpha}=\vec{\alpha}$$

Το διάνυσμα $\vec{0}$ ονομάζεται ουδέτερο στοιχείο της προσθέσεως. Τέλος για κάθε διάνυσμα $\vec{\alpha}$ υπάρχει ένα διάνυσμα $\vec{\beta}$ που ονομάζεται αντίθετο του $\vec{\alpha}$. Συμβολίζεται με $-\vec{\alpha}$ και ισχύει

$$\vec{\alpha}+\vec{\beta}=\vec{\alpha}+(-\vec{\alpha})=\vec{0}$$

Με την βοήθεια του αντίθετου διανύσματος ορίζουμε την διαφορά δύο διανυσμάτων. Ορίζουμε

$$\vec{\alpha}-\vec{\beta}=\vec{\alpha}+(-\vec{\beta})$$

Το γινόμενο ενός διανύσματος $\vec{\alpha}$ με έναν πραγματικό αριθμό ξ είναι ένα διάνυσμα που συμβολίζεται με $\xi\vec{\alpha}$. Το διάνυσμα $\xi\vec{\alpha}$ έχει την ίδια διεύθυνση με το διάνυσμα $\vec{\alpha}$. Το μέτρο του είναι ίσο με το γινόμενο του $|\xi|$ με το μέτρο του $\vec{\alpha}$,

$$\|\xi\vec{\alpha}\|=|\xi|\cdot\|\vec{\alpha}\|$$

Αν ο αριθμός είναι αρνητικός η φορά του διανύσματος $\xi\vec{\alpha}$ είναι αντίθετη από την φορά του $\vec{\alpha}$ ενώ για θετικά ξ τα δύο διανύσματα έχουν την ίδια φορά.

Η πράξη αυτή είναι μια εξωτερική πράξη συνθέσεως και ονομάζεται εξωτερικός ή βαθμωτός πολλαπλασιασμός. Προφανώς $1\vec{\alpha} = \vec{\alpha}$ και $0\vec{\alpha} = \vec{0}$. Ο εξωτερικός πολλαπλασιασμός ικανοποιεί επίσης και την ιδιότητα

$$\xi(\eta\vec{\alpha}) = (\xi\eta)\vec{\alpha}$$

Αλγεβρικά η πράξη ορίζεται ως εξής

$$\xi\vec{\alpha} = \xi(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (\xi\alpha_1, \xi\alpha_2, \xi\alpha_3)$$

Οι δύο πράξεις ικανοποιούν τις ακόλουθες ιδιότητες

$$\xi(\vec{\alpha} + \vec{\beta}) = \xi\vec{\alpha} + \xi\vec{\beta} \qquad\qquad (\xi + \eta)\vec{\alpha} = \xi\vec{\alpha} + \eta\vec{\beta}$$

που ονομάζονται επιμεριστικές ιδιότητες του πολλαπλασιασμού ως προς την πρόσθεση. Η σχέσεις αυτές είναι απαραίτητες διότι σημαίνουν ότι οι δύο πράξεις, η πρόσθεση και ο εξωτερικός πολλαπλασιασμός είναι πράξεις συμβιβαστές μεταξύ τους.

Το σύνολο των διανυσμάτων στον τριδιάστατο χώρο με τις δύο παραπάνω πράξεις ονομάζεται τριδιάστατος Ευκλείδειος διανυσματικός χώρος επί του $\Re$ και συμβολίζεται με $\Re^3$. Τα διανύσματα $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ είναι μία ορθοκανονική βάση του χώρου αυτού. Διανυσματικός χώρος μπορεί να οριστεί και στο σύνολο των μιγαδικών αριθμών $\mathcal{C}$.

Ορισμός: Εσωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ με συντεταγμένες $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ και $(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ αντιστοίχως, ορίζουμε τον πραγματικό αριθμό $\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3$. Το εσωτερικό γινόμενο είναι ίσο με το γινόμενο των μέτρων των δύο διανυσμάτων επί το συνημίτονο της γωνίας που σχηματίζουν. Γράφουμε

$$\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3 = |\vec{\alpha}||\vec{\beta}| \,\text{συν}\, \varphi$$

Συνεπώς με την βοήθεια του εσωτερικού γινομένου μπορούμε να βρούμε την γωνία δύο διανυσμάτων.

$$\text{συν}\, \varphi = \frac{\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}}{|\vec{\alpha}||\vec{\beta}|} \leq 1$$

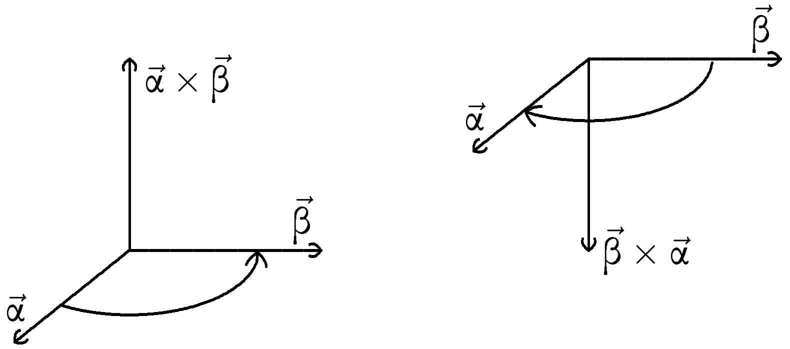
Η παραπάνω ανισότητα είναι γνωστή σαν ανισότητα του Σβαρτς.

Αν δύο μη μηδενικά διανύσματα έχουν εσωτερικό γινόμενο ίσο με μηδέν τότε τα διανύσματα αυτά είναι κάθετα μεταξύ τους γράφουμε συμβολικά $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta}$. Για τα βασικά διανύσματα ισχύουν οι σχέσεις

$$\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{j} \cdot \vec{k} = \vec{k} \cdot \vec{i} = 0 \qquad \vec{i} \cdot \vec{i} = \vec{j} \cdot \vec{j} = \vec{k} \cdot \vec{k} = 1$$

Δηλαδή είναι ανά δύο κάθετα μεταξύ τους και έχουν μέτρο την μονάδα.

Ορισμός: Το εξωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ συμβολίζεται με $\vec{\alpha} \times \vec{\beta}$ και ορίζεται σαν το διάνυσμα με μέτρο ίσο με το γινόμενο των μέτρων των δύο διανυσμάτων επί το ημίτονο της γωνίας τους. Επομένως το μέτρο του εξωτερικού γινομένου δύο διανυσμάτων είναι ίσο με το εμβαδόν του παραλληλογράμμου που σχηματίζουν. Η διεύθυνση του διανύσματος είναι κάθετη και στα δύο διανύσματα και η φορά του ορίζεται από τον κανόνα του δεξιόστροφου κοχλία. Δηλαδή τέτοια ώστε τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ και $\vec{\alpha} \times \vec{\beta}$ να αποτελούν ένα δεξιόστροφο σύστημα.



Σχήμα 1.5
Το εξωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων

Αν αλλάξουμε την φορά των αξόνων ένα διάνυσμα αλλάζει σημείο. Αντιθέτως το εξωτερικό γινόμενο παραμένει αναλλοίωτο. Ένα τέτοιο διάνυσμα ονομάζεται συνήθως ψευδοδιάνυσμα ή αξονικό διάνυσμα.

Αν δύο μη μηδενικά διανύσματα έχουν εξωτερικό γινόμενο ίσο με το μηδενικό διάνυσμα τούτο σημαίνει ότι τα διανύσματα είναι παράλληλα. Γράφουμε συμβολικά $\vec{\alpha} \parallel \vec{\beta}$.

Το εξωτερικό γινόμενο ορίζεται επίσης αλγεβρικά και από τον τύπο

$$\vec{\alpha} \times \vec{\beta} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \times (\beta_1, \beta_2, \beta_3) = (\alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2, \alpha_3\beta_1 - \alpha_1\beta_3, \alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1) =$$

$$= \begin{vmatrix} \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix} \vec{i} + \begin{vmatrix} \alpha_3 & \alpha_1 \\ \beta_3 & \beta_1 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{vmatrix} \vec{k} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix}$$

Η τελευταία "ορίζουσα" είναι μόνο ένας μνημονικός κανόνας.

Μπορούμε να γράψουμε το εξωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων με την βοήθεια του τανυστή ε_{ijk}, $i, j, k = 1, 2, 3$ που ορίζεται από τις σχέσεις

$$\varepsilon_{123} = \varepsilon_{312} = \varepsilon_{231} = 1 \qquad \varepsilon_{321} = \varepsilon_{213} = \varepsilon_{132} = -1$$

για όλους τους υπόλοιπους συνδυασμούς των δεικτών ο τανυστής είναι ίσος με το μηδέν.

Ορίζουμε τώρα το $\vec{\alpha} \times \vec{\beta}$ σαν ένα διάνυσμα με i συνιστώσα που δίνεται από τον τύπο

$$\left(\vec{\alpha} \times \vec{\beta}\right)_i = \sum_{j,k=1}^{3} \varepsilon_{ijk} \alpha_j \beta_k = \varepsilon_{ijk} \alpha_j \beta_k$$

όπου στον τελευταίο όρο το άθροισμα εννοείται χωρίς να γράφεται αναλυτικά.

Για τα βασικά μοναδιαία διανύσματα ισχύουν οι σχέσεις

$$\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k} \qquad \vec{j} \times \vec{k} = \vec{i} \qquad \vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}$$

Το μέτρο του εξωτερικού γινομένου δύο διανυσμάτων $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ με γωνία θ βρίσκεται από την ταυτότητα

$$\|\vec{\alpha} \times \vec{\beta}\|^2 = \left(\vec{\alpha} \times \vec{\beta}\right) \cdot \left(\vec{\alpha} \times \vec{\beta}\right) = \alpha^2 \beta^2 - \left(\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}\right)^2$$

Η απόδειξη είναι απλή. Φαίνεται αμέσως ότι το πρώτο μέλος της εξισώσεως αυτής είναι ίσο με

$$(\alpha\beta\, \eta\mu\, \theta) \cdot (\alpha\beta\, \eta\mu\, \theta) = \alpha^2 \beta^2\, \eta\mu^2\, \theta$$

και το δεύτερο ίσο με

$$\alpha^2 \beta^2 - (\alpha\beta\, \sigma\upsilon\nu\, \theta)^2 = \alpha^2 \beta^2\, \eta\mu^2\, \theta$$

Ορισμός: Μικτό γινόμενο τριών διανυσμάτων $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ και $\vec{\gamma}$ ορίζεται ο αριθμός $\vec{\alpha} \cdot (\vec{\beta} \times \vec{\gamma})$. Ο αριθμός αυτός είναι ίσος με τον όγκο του παραλληλεπιπέδου που σχηματίζεται με ακμές τα τρία αυτά διανύσματα.

Αποδεικνύεται εύκολα ότι ισχύει.

$$\vec{\alpha} \cdot (\vec{\beta} \times \vec{\gamma}) = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix}$$

Από τον ορισμό του τριπλού αυτού γινομένου σαν ορίζουσα φαίνεται αμέσως ότι ισχύουν οι σχέσεις

$$\vec{\alpha} \cdot (\vec{\beta} \times \vec{\gamma}) = \vec{\beta} \cdot (\vec{\gamma} \times \vec{\alpha}) = \vec{\gamma} \cdot (\vec{\alpha} \times \vec{\beta})$$

Τέλος ένα ακόμα τριπλό γινόμενο είναι το γινόμενο

$$\vec{\alpha} \times (\vec{\beta} \times \vec{\gamma})$$

που είναι ένα διάνυσμα. Για το διάνυσμα αυτό ισχύει η σχέση

$$\vec{\alpha} \times (\vec{\beta} \times \vec{\gamma}) = (\vec{\alpha} \cdot \vec{\gamma})\vec{\beta} - (\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta})\vec{\gamma}$$

Από την σχέση αυτή είναι φανερό ότι

$$\vec{\alpha} \times (\vec{\beta} \times \vec{\gamma}) \neq (\vec{\alpha} \times \vec{\beta}) \times \vec{\gamma}$$

καθώς επίσης και ότι ισχύει η ταυτότητα

$$\vec{\alpha} \times (\vec{\beta} \times \vec{\gamma}) + \vec{\beta} \times (\vec{\gamma} \times \vec{\alpha}) + \vec{\gamma} \times (\vec{\alpha} \times \vec{\beta}) = 0$$

γνωστή σαν ταυτότητα του Τζακόμπι.

Παρατήρηση: Οι παρενθέσεις του τριπλού αυτού γινομένου είναι απαραίτητες πράγματι το διάνυσμα $\vec{\beta} \times (\vec{\alpha} \times \vec{\alpha})$ είναι μηδέν ενώ το διάνυσμα $(\vec{\beta} \times \vec{\alpha}) \times \vec{\alpha}$ δεν είναι. Αντιθέτως οι παρενθέσεις του τριπλού γινομένου $\vec{\alpha} \cdot (\vec{\beta} \times \vec{\gamma})$ μπορούμε να τις παραλείψουμε γιατί η έκφραση $(\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}) \times \vec{\gamma}$ δεν ορίζεται.

1.3 Διανυσματικές συναρτήσεις

Ένα διάνυσμα που οι συνιστώσες του είναι συναρτήσεις μιας ή περισσοτέρων μεταβλητών είναι μία διανυσματική συνάρτηση. Πολλά μεγέθη στην φυσική μεταβάλλονται σαν συναρτήσεις κάποιων παραμέτρων. Η ταχύτητα ενός κινητού για παράδειγμα είναι δυνατόν να μεταβάλλεται κατά την διάρκεια του χρόνου. Τέτοια μεγέθη παριστάνονται από διανυσματικές συναρτήσεις.

Αν συμβολίσουμε με $\vec{r}$ το διάνυσμα θέσεως ενός κινητού, τότε είναι δυνατόν το διάνυσμα αυτό να είναι μια διανυσματική συνάρτηση μιας πραγματικής μεταβλητής. Γράφουμε αναλυτικά

$$\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)) \qquad t \in \Re$$

Η διανυσματική αυτή συνάρτηση παριστάνει μια καμπύλη στον τριδιάστατο Ευκλείδειο χώρο, την τροχιά του κινητού.

Για παράδειγμα η συνάρτηση

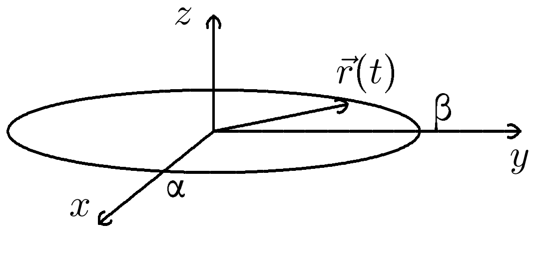
$$\vec{r}(t) = (a\,\text{συν}\,\omega\,t, b\,\text{συν}\,\omega\,t, 0) = a\,\text{συν}\,\omega\,t\vec{i} + b\,\text{ημ}\,\omega\,t\vec{j} \qquad t \in [0, 2\pi]$$

παριστάνει μία έλλειψη στο επίπεδο xy. Την καμπύλη αυτή μπορούμε να την περιγράψουμε και με τις δύο παραμετρικές εξισώσεις

$$x = a\,\text{συν}\,\omega\,t \qquad y = b\,\text{ημ}\,\omega\,t$$

ή ακόμα με την περισσότερο γνωστή εξίσωση

$$x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$$



Σχήμα 1.6
Η έλλειψη πάνω στο επίπεδο xy

Ορισμός: Η παράγωγος μιας διανυσματικής συναρτήσεως $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ μιας πραγματικής μεταβλητής ως προς t ορίζεται από την σχέση

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \lim_{h\to 0} \frac{\vec{r}(t+h) - \vec{r}(t)}{h} = \frac{dx(t)}{dt}\vec{i} + \frac{dy(t)}{dt}\vec{j} + \frac{dz(t)}{dt}\vec{k}$$

Δηλαδή ανάγεται στις παραγώγους των συνιστωσών της.

Τα σημεία με διάνυσμα θέσεως μία διανυσματική συνάρτηση δύο πραγματικών μεταβλητών διαγράφουν μια επιφάνεια στον χώρο. Για να μελετήσουμε διανυσματικές συναρτήσεις δύο πραγματικών μεταβλητών είναι απαραίτητο να ορίσουμε την έννοια της μερικής παραγώγου.

Ορισμός: Οι μερικές παράγωγοι μιας συναρτήσεως $x(u,v)$ ως προς u και ως προς v ορίζονται αντιστοίχως από τις σχέσεις.

$$\frac{\partial x(u,v)}{\partial u}=\lim_{h\to 0}\frac{x(u+h,v)-x(u,v)}{h},\quad \frac{\partial x(u,v)}{\partial v}=\lim_{h\to 0}\frac{x(u,v+h)-x(u,v)}{h}$$

Τις συναρτήσεις αυτές μπορούμε να τις παραγωγίσουμε πάλι για να πάρουμε τις εξής μερικές παραγώγους.

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)=\frac{\partial^2 x}{\partial u^2},\qquad \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)=\frac{\partial^2 x}{\partial v^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)=\frac{\partial^2 x}{\partial u\partial v},\qquad \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)=\frac{\partial^2 x}{\partial v\partial u}$$

Οι δύο τελευταίες εκφράσεις είναι δυνατόν να μην είναι ίσες αν οι συναρτήσεις δεν έχουν συνεχείς μερικές παραγώγους.

Τα διαφορικά μιας συναρτήσεως με δύο μεταβλητές ορίζονται από τις εξής σχέσεις

$$dx=\frac{\partial x}{\partial u}du+\frac{\partial x}{\partial v}dv\qquad dy=\frac{\partial y}{\partial u}du+\frac{\partial y}{\partial v}dv$$

Ορισμός: Η μερική παράγωγος μιας διανυσματικής συναρτήσεως $\vec{r}(u,v)$ δύο μεταβλητών ορίζεται από την μερική παράγωγο των συνιστωσών της

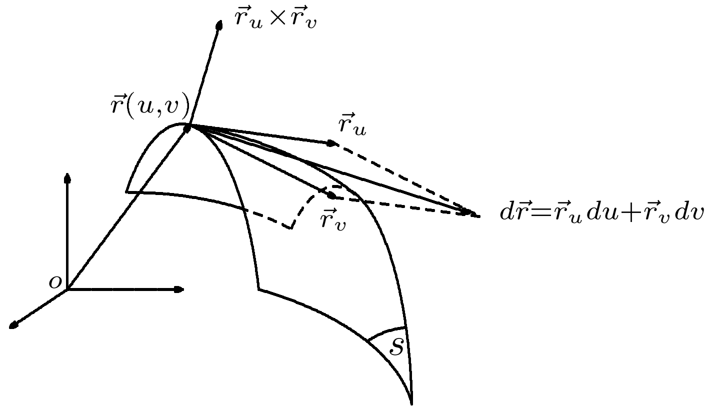
$$\vec{r}_u=\frac{\partial\vec{r}}{\partial u}=\frac{\partial x}{\partial u}\vec{i}+\frac{\partial y}{\partial u}\vec{j}+\frac{\partial z}{\partial u}\vec{k}\qquad \vec{r}_v=\frac{\partial\vec{r}}{\partial v}=\frac{\partial x}{\partial v}\vec{i}+\frac{\partial y}{\partial v}\vec{j}+\frac{\partial z}{\partial v}\vec{k}$$

Ένα σημείο με διάνυσμα θέσεως $\vec{r}(u,v)$ όπου u και v είναι δύο ανεξάρτητες μεταβλητές διαγράφει μια επιφάνεια S. Οι εξισώσεις

$$x=x(u,v),\qquad y=y(u,v)\qquad z=z(u,v)\qquad (u,v)\in\Re^2$$

ονομάζονται παραμετρικές εξισώσεις της επιφάνειας.

Η συνάρτηση $\vec{r} = \vec{r}(u, v_0)$ είναι μια καμπύλη πάνω στην επιφάνεια S. Η καμπύλη $\vec{r} = \vec{r}(u_0, v)$ βρίσκεται επίσης πάνω στην ίδια επιφάνεια S. Οι καμπύλες $\vec{r}(u, v_0)$ και $\vec{r}(u_0, v)$ ονομάζονται συντεταγμένες καμπύλες. Τα διανύσματα $\vec{r}_u = \partial\vec{r}/\partial u$ και $\vec{r}_v = \partial\vec{r}/\partial v$ είναι εφαπτομενικά των συντεταγμένων καμπύλων. Το διάνυσμα $\vec{r}_u \times \vec{r}_v$ είναι κάθετο και στο διάνυσμα $\vec{r}_u$ και στο διάνυσμα $\vec{r}_v$ και επομένως είναι κάθετο πάνω στην επιφάνεια S.



Σχήμα 1.7
Το εφαπτομενικό επίπεδο σε μια επιφάνεια

Αν θεωρήσουμε ότι οι πραγματικές μεταβλητές u και v είναι συναρτήσεις μιας πραγματικής μεταβλητής t τότε το σημείο με διάνυσμα θέσεως $\vec{r}(u(t), v(t))$ διαγράφει μία καμπύλη πάνω στην επιφάνεια. Αποδεικνύεται ότι ισχύει η σχέση

$$\frac{d\vec{r}(u(t), v(t))}{dt} = \frac{\partial\vec{r}}{\partial u}\frac{du}{dt} + \frac{\partial\vec{r}}{\partial v}\frac{dv}{dt}$$

Η εφαπτομένη $d\vec{r}/dt$ της καμπύλης γράφεται σαν γραμμικός συνδυασμός των δύο διανυσμάτων $\vec{r}_u$ και $\vec{r}_v$. Τα εν λόγω διανύσματα είναι τα βασικά διανύσματα του εφαπτομενικού επιπέδου της επιφάνειας S.

Οι εξισώσεις

$$F(x, y, z) = 0 \qquad\qquad z - f(x, y) = 0$$

παριστάνουν επίσης επιφάνειες. Οι εξισώσεις αυτές προκύπτουν αν απαλείψουμε τις μεταβλητές u και v από τις τρεις παραμετρικές εξισώσεις της επιφάνειες.

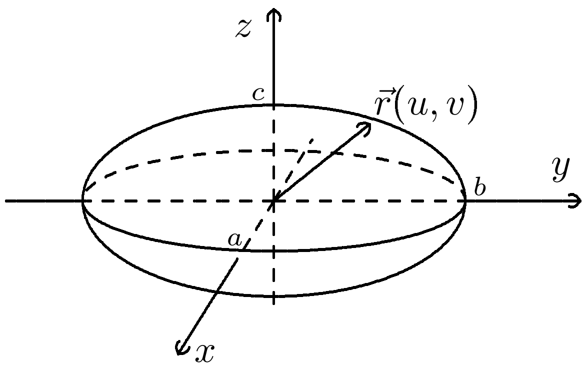
Παράδειγμα: Οι παρακάτω παραμετρικές εξισώσεις παριστάνουν την επιφάνεια ενός ελλειψοειδούς

$$x = a\,\text{ημ}\,\theta\,\text{συν}\,\varphi \qquad x = b\,\text{ημ}\,\theta\,\text{ημ}\,\varphi \qquad x = c\,\text{συν}\,\theta$$

Η συναρτησιακή σχέση που παριστάνει την ίδια επιφάνεια βρίσκεται αν απαλείψουμε τις μεταβλητές θ και φ. Η σχέση είναι

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Για $a = b = c = R$ οι εξισώσεις παριστάνουν την επιφάνεια μιας σφαίρας με ακτίνα R.



Σχήμα 1.8
Το ελλειψοειδές

1.4 Τα Διανυσματικά πεδία

Ορισμένα μεγέθη είναι συναρτήσεις, βαθμωτές ή διανυσματικές και των τριών συνιστωσών του διανύσματος θέσεως και ενδεχομένως να περιέχουν αναλυτικά και τον χρόνο t.

Ορισμός: Ορίζουμε σαν διανυσματικό πεδίο μια περιοχή του χώρου που σε κάθε σημείο της αντιστοιχεί ένα διάνυσμα. Γράφουμε το διάνυσμα σαν συνάρτηση του διανύσματος θέσεως και του χρόνου $\vec{F}(\vec{r}, t)$. Αν το διάνυσμα παριστάνει μία δύναμη τότε το πεδίο ονομάζεται δυναμικό πεδίο.

Μια περιοχή που σε κάθε σημείο της αντιστοιχεί μια βαθμωτή συνάρτηση είναι ένα βαθμωτό πεδίο.

Παράδειγμα: Η ταχύτητα που έχει το κάθε μόριο ενός ρευστού που κινείται σε μια ορισμένη περιοχή για παράδειγμα είναι ένα διανυσματικό πεδίο ταχυτήτων. Το δυναμικό του πεδίου βαρύτητας είναι ένα παράδειγμα ενός βαθμωτού πεδίου.

Ένα διανυσματικό πεδίο έχει την μορφή

$$\vec{F}(\vec{r},t) = F_1(\vec{r},t)\vec{i} + F_2(\vec{r},t)\vec{j} + F_3(\vec{r},t)\vec{k}$$

Η γενική έκφραση ενός βαθμωτού πεδίου είναι

$$V = V(\vec{r},t)$$

Υποθέτουμε ότι το διάνυσμα θέσεως $\vec{r}$ είναι συνάρτηση μιας μεταβλητής. Το διάνυσμα $\vec{r}$ διαγράφει μια καμπύλη στον χώρο. και το πεδίο έχει τώρα την μορφή.

$$V = V(\vec{r}(t),t) = V\left(\vec{r}(x(t),y(t),z(t)),t\right)$$

.

Η παράγωγος ενός τέτοιου πεδίου ως προς τον χρόνο είναι

$$\frac{dV(\vec{r},t)}{dt} = \frac{dx(t)}{dt}\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{dy(t)}{dt}\frac{\partial V}{\partial y} + \frac{dz(t)}{dt}\frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial V}{\partial t}$$

Εισάγουμε την ακόλουθη έκφραση την οποία ονομάζουμε ανάδελτα και την συμβολίζουμε με $\vec{\nabla}$

$$\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) = \vec{i}\,\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\,\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\,\frac{\partial}{\partial z}$$

Η έκφραση αυτή είναι ένας διαφορικός τελεστής. Η παράγωγος ενός βαθμωτού πεδίου μπορεί να γραφεί με την βοήθεια του τελεστή ανάδελτα ως εξής

$$\frac{dV(\vec{r},t)}{dt} = \frac{\partial V}{\partial t} + \vec{\nabla}V \cdot \frac{d\vec{r}}{dt}$$

Ο τελεστής αυτός επιδρά πάνω σε μια βαθμωτή συνάρτηση $V(x,y,z)$ για να δώσει ένα διάνυσμα

$$gradV = \vec{\nabla}V = \left(\frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y}, \frac{\partial V}{\partial z}\right)$$

Το διάνυσμα αυτό δίνει την κλήση της συναρτήσεως V και είναι κάθετο πάνω στην επιφάνεια $V = c$. Τα σημεία αυτών των επιφανειών έχουν το ίδιο δυναμικό και ονομάζονται ισοδυναμικές επιφάνειες.

Θεωρούμε την διανυσματική συνάρτηση $\vec{F} = (F_1, F_2, F_3)$. Ο τελεστής ανάδελτα με την βοήθεια του εσωτερικού γινομένου επιδρά πάνω σε μια διανυσματική συνάρτηση $\vec{F}(x, y, z)$ για να δώσει μια βαθμωτή συνάρτηση

$$div\vec{F} = \vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}$$

Η συνάρτηση αυτή ονομάζεται απόκλιση του διανυσματικού πεδίου $\vec{F}$.

Αν η απόκλιση ενός διανυσματικού πεδίου είναι μηδέν το πεδίο ονομάζεται σωληνοειδές.

Ο τελεστής ανάδελτα με την βοήθεια του εξωτερικού γινομένου επιδρά πάνω σε μια διανυσματική συνάρτηση $\vec{F}(x, y, z)$ για να δώσει μια νέα διανυσματική συνάρτηση

$$curl\vec{F} = rot\vec{F} = \vec{\nabla} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} =$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial y}F_3 - \frac{\partial}{\partial z}F_2\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial}{\partial z}F_1 - \frac{\partial}{\partial x}F_3\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial}{\partial x}F_2 - \frac{\partial}{\partial y}F_1\right)\vec{k}$$

Η συνάρτηση αυτή ονομάζεται στροβιλισμός του διανυσματικού πεδίου.

Θα πρέπει να προσέξουμε λίγο στις παραπάνω σχέσεις. Γράφουμε το διάνυσμα $\vec{\nabla} \times \vec{F}$ σαν μια ορίζουσα. Αυτό όμως είναι μόνο ένας μνημονικός κανόνας. Σημειώστε ότι η ορίζουσα είναι μια βαθμωτή συνάρτηση ή ένας αριθμός εδώ ή "ορίζουσα" είναι ένα διάνυσμα. Η "ορίζουσα" $\vec{F} \times \vec{\nabla}$ είναι ένας διανυσματικός τελεστής.

Αν ο στροβολισμός ενός διανυσματικού πεδίου είναι μηδέν το πεδίο ονομάζεται αστρόβιλο.

Μπορούμε να εφαρμόσουμε διαδοχικά τον τελεστή ανάδελτα για να πάρουμε παραγώγους δεύτερης τάξεως. Για παράδειγμα ο τελεστής $\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} = \vec{\nabla}^2$ ονομάζεται τελεστής Λαπλάς και η εξίσωση

$$\vec{\nabla}^2 V(x, y, z) = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) V(x, y, z) = 0$$

εξίσωση του Λαπλάς

Το ολοκλήρωμα μιας διανυσματικής συναρτήσεως ορίζεται από το ολοκλήρωμα των συνιστωσών της δηλαδή για ένα απλό ολοκλήρωμα ισχύει

$$\int \vec{r}(t)dt = \int x(t)dt\,\vec{i} + \int y(t)dt\,\vec{j} + \int z(t)dt\,\vec{k}$$

ενώ για ένα τριπλό ολοκλήρωμα, για το διάνυσμα $\vec{F}(x,y,z) = (F_1, F_2, F_3)$ για παράδειγμα έχουμε

$$\begin{aligned}&\iiint \vec{F}(x,y,z)dxdydz = \\ &\qquad \vec{i}\iiint \vec{F}_1 dxdydz + \vec{j}\iiint \vec{F}_2 dxdydz + \vec{k}\iiint \vec{F}_3 dxdydz\end{aligned}$$

Πολλές φορές για να γράψουμε τον στοιχειώδη όγκο χρησιμοποιούμε την έκφραση $d^3\vec{r} = dxdydz$.

Ορισμός: Υποθέτουμε ότι το διάνυσμα θέσεως διαγράφει μια καμπύλη c δηλαδή εξαρτάται από μία παράμετρο $\vec{r} = \vec{r}(t), t \in [\alpha, \beta] \subset \Re$. Ορίζουμε σαν επικαμπύλιο ολοκλήρωμα και το συμβολίζουμε με $\int \vec{F} \cdot d\vec{r}$ το ακόλουθο απλό ολοκλήρωμα

$$\int_c \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_\alpha^\beta \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \frac{d\vec{r}}{dt}dt$$

Ορισμός: Υποθέτουμε ότι το διάνυσμα θέσεως διαγράφει μια επιφάνεια S δηλαδή εξαρτάται από δύο παραμέτρους $\vec{r} = \vec{r}(u,v)$, $(u,v) \in D \subset \Re^2$. Ορίζουμε σαν επιφανειακό ολοκλήρωμα και το συμβολίζουμε με $\iint \vec{F} \cdot d\vec{S}$ το ακόλουθο διπλό ολοκλήρωμα

$$\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iint_D \vec{F}(\vec{r}(u,v)) \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}\, dudv$$

Επικαμπύλια και επιφανειακά ολοκληρώματα ορίζονται και για βαθμωτές συναρτήσεις. Έχουμε

$$\int_c V(\vec{r}(t))ds = \int_\alpha^\beta V(\vec{r}(t)) \left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right| dt$$

όπου το ds εδώ είναι το μήκος του στοιχειώδους τόξου και

$$\iint_S V(\vec{r}(u,v))dS = \iint_D V(\vec{r}(u,v)) \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \right| dudv$$

για τις βαθμωτές συναρτήσεις $V(\vec{r}(t))$ και $V(\vec{r}(u,v))$ αντιστοίχως.

Για $V = 1$ οι παραπάνω τύποι δίνουν το μήκος της καμπύλης και το εμβαδόν της επιφάνειας αντιστοίχως.

$$(\text{μήκος } c) = \int_\alpha^\beta \left| \frac{d\vec{r}}{dt} \right| dt$$

$$(\text{Εμβαδόν } D) = \iint_D \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right| dudv$$

Κάτω από ορισμένες προϋποθέσεις αποδεικνύεται ότι ισχύουν τα ακόλουθα ολοκληρωτικά θεωρήματα.

Θεώρημα: Το επιφανειακό ολοκλήρωμα μιας συνάρτησης $\vec{F}(x,y,z) = (P,Q,R)$ στην κλειστή επιφάνεια S είναι ισοδύναμο με ένα τριπλό ολοκλήρωμα στον όγκο D που περικλείει η επιφάνεια S. Η πρόταση είναι γνωστή σαν θεώρημα του Γκάους ή θεώρημα της αποκλίσεως και γράφεται

$$\iiint_D \vec{\nabla} \cdot \vec{F}\, dxdydz = \iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S}$$

Θεώρημα: Το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα μιας συνάρτησης $\vec{F}(x,y,z) = (P,Q,R)$ στην κλειστή καμπύλη c είναι ισοδύναμο με ένα διπλό ολοκλήρωμα στην επιφάνεια S που περικλείει η καμπύλη c. Η πρόταση είναι γνωστή σαν θεώρημα του Στόουκς και γράφεται

$$\iint_S \vec{\nabla} \times \vec{F} \cdot d\vec{S} = \oint_c \vec{F} \cdot d\vec{r} = \oint_c Pdx + Qdy + Rdz$$

Αν η επιφάνεια είναι επίπεδη η σχέση ονομάζεται θεώρημα του Γκρην. Θέτουμε $P = P(x,y)$, $Q = Q(x,y)$ και $R = 0$ στην παραπάνω σχέση και βρίσκουμε

$$\iint_S \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy = \oint_c Pdx + Qdy$$

Με την βοήθεια των παραπάνω ολοκληρωτικών θεωρημάτων μπορούμε να βρούμε τις ολοκληρωτικές εκφράσεις για την απόκλιση και τον στροβιλισμό ενός διανυσματικού πεδίου. Οι σχέσεις είναι

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{f} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{1}{\Delta V} \oiint_{\Delta S} d\vec{S} \cdot \vec{f} \qquad \vec{\nabla} \times \vec{f} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{1}{\Delta V} \oiint_{\Delta S} d\vec{S} \times \vec{f}$$

Οι σχέσεις μπορούν να θεωρηθούν και σαν οι ορισμοί της αποκλίσεως και του στροβιλισμού.

1.5 Διαφορικές μορφές

Ορισμός: Έστω K ένα ανοικτό υποσύνολο του $\Re^3$. $K \subset \Re^3$. Διακρίνουμε τέσσερα είδη υποσυνόλων του Κ.

1) Τα σημεία του Κ
2) Τις απλές καμπύλες του Κ
3) Τις επιφάνειες του Κ
4) Τα υποσύνολα του Κ

Τα υποσύνολα αυτά θα τα συμβολίζουμε με C_n $n = 0, 1, 2, 3$ αντιστοίχως.

Μια καμπύλη περατώνεται σε δύο σημεία. Δηλαδή το σύνορο μιας απλής καμπύλης είναι δύο σημεία. Το σύνορο μιας επιφάνειας είναι μια προσανατολισμένη κλειστή καμπύλη και το σύνορο ενός υποσυνόλου του Κ είναι μια προσανατολισμένη κλειστή επιφάνεια. Δηλαδή το σύνορο ενός υποσυνόλου τύπου C_n είναι ένα υποσύνολο τύπου C_{n-1}. Συμβολίζουμε το σύνορο του C_n με ∂C_n. Δηλαδή έχουμε

$$\partial C_3 = C_2 \quad \text{Μια προσανατολισμένη κλειστή επιφάνεια}$$

$$\partial C_2 = C_1 \quad \text{Μια προσανατολισμένη κλειστή καμπύλη}$$

Οι κλειστές καμπύλες δεν περατώνονται πουθενά δηλαδή μια κλειστή καμπύλη δεν έχει σύνορο. Μπορούμε να πούμε ότι το σύνορο μιας κλειστής καμπύλης είναι το μηδέν. Το σύνορο της επιφάνειας μιας σφαίρας είναι επίσης το μηδέν αφού η επιφάνεια αυτή δεν έχει σύνορο. Με άλλες λέξεις το σύνορο ενός υποσυνόλου τύπου C_n που είναι το σύνορο ενός άλλου υποσυνόλου είναι το μηδέν. Γράφουμε

$$\partial\left(\partial C_n\right) = \partial^2 C_n = 0$$

Ορισμός: Ορίζουμε σαν διαφορικές μορφές και τις συμβολίζουμε με ω_n, $n = 0, 1, 2, 3$ τις ακόλουθες μορφές.

1) τύπου 0, όλες τις πραγματικές συναρτήσεις του K στο $\Re$.
2) τύπου 1, όλες τις εκφράσεις της μορφής $\omega_1 = Pdx + Qdy + Rdz$ όπου P,Q, και R είναι πραγματικές συναρτήσεις,
1) τύπου 2, όλες τις εκφράσεις της μορφής $\omega_2 = Fdydz + Gdzdx + Hdxdy$ όπου F,G, και H είναι πραγματικές συναρτήσεις και
3) τύπου 3, όλες τις εκφράσεις της μορφής $\omega_3 = Adxdydz$ όπου A είναι μια πραγματική συνάρτηση.

Δεν υπάρχουν διαφορικές μορφές μεγαλύτερου τύπου στον χώρο $\Re^3$. Γενικότερα στον χώρο $\Re^n$ δεν υπάρχουν διαφορικές μορφές τύπου $n + 1$ ή μεγαλύτερου τύπου.

Μπορούμε να προσθέσουμε δύο διαφορικές μορφές του ίδιου τύπου για να πάρουμε μια άλλη διαφορική μορφή του ίδιου τύπου. Δεν θα χρειαστεί να προσθέσουμε μορφές διαφορετικού τύπου.

Πρέπει να προσέχουμε να γράφουμε τα διαφορικά dx, dy, και dz με την σειρά στα γινόμενα που εμφανίζονται. Δηλαδή για τα διπλά γινόμενα γράφουμε μόνο $dxdy$ ή $dydz$ ή $dzdx$ ενώ για το τριπλό γράφουμε μόνο το $dxdydz$.

Οι διαφορικές μορφές απεικονίζουν τα υποσύνολα του K στους πραγματικούς αριθμούς ως εξής

1) Οι διαφορικές μορφές τύπου ω_0 δηλαδή οι συναρτήσεις απεικονίζουν τα υποσύνολα τύπου C_0 του K δηλαδή τα σημεία του K στους πραγματικούς αριθμούς. Ο πραγματικός αριθμός που αντιστοιχεί στην διαφορική μορφή τύπου ω_0 δίνεται από την συναρτησιακή σχέση

$$f : K \longrightarrow \Re \qquad\qquad f : x \longrightarrow f(x) \in \Re$$

2) Οι διαφορικές μορφές τύπου ω_1 απεικονίζουν τα υποσύνολα τύπου C_1 δηλαδή τις καμπύλες στους πραγματικούς αριθμούς. Ο πραγματικός αριθμός A που αντιστοιχεί στην διαφορική μορφή ω_1 είναι το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα. Συμβολίζουμε με $\vec{f}$ το διάνυσμα $\vec{f} = (P, Q, R)$ και έχουμε

$$A = \int_{C_1} \omega_1 = \int_{C_1} Pdx + Qdy + Rdz = \int_{C_1} \vec{f} \cdot d\vec{r} = \int_I \vec{f} \cdot \frac{d\vec{r}(t)}{dt} dt$$

όπου $\vec{r} = \vec{r}(t)$, $t \in I$ είναι οι παραμετρικές εξισώσεις τις καμπύλης.

3) Οι διαφορικές μορφές τύπου ω_2 απεικονίζουν τα υποσύνολα τύπου C_2 δηλαδή τις επιφάνειες του Κ στους πραγματικούς αριθμούς. Ο πραγματικός αριθμός B που αντιστοιχεί στην διαφορική μορφή ω_2 είναι το επιφανειακό ολοκλήρωμα. Συμβολίζουμε με $\vec{f}$ το διάνυσμα $\vec{f} = (F, G, H)$ και έχουμε

$$B = \int_{C_2} \omega_2 = \iint_{C_2} F dxdy + G dydz + H dzdx =$$

$$\iint_{C_2} \vec{f} \cdot d\vec{S} = \iint_{D} \vec{f} \cdot \vec{r}_u \times \vec{r}_v dudv$$

όπου $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$, $(u, v) \in D$ είναι οι παραμετρικές εξισώσεις τις επιφάνειας.

3) Οι διαφορικές μορφές τύπου ω_3 απεικονίζουν τα υποσύνολα τύπου C_3 στους πραγματικούς αριθμούς. Ο πραγματικός αριθμός Γ που αντιστοιχεί στην διαφορική μορφή ω_3 είναι το τριπλό ολοκλήρωμα.

$$\Gamma = \iiint_{C_3} \omega_3 = \iiint_{C_3} A dxdydz$$

Θα ορίσουμε τώρα τον πολλαπλασιασμό των διαφορικών μορφών.

Ορισμός: Αν ω μια μορφή τύπου α και η μια μορφή τύπου β τότε το εξωτερικό (σφηνοειδές) γινόμενο $\omega \wedge \eta$ είναι μια μορφή τύπου $\alpha + \beta \leq 3$.

Το γινόμενο αυτό ακολουθεί τους εξής κανόνες.

$$(f\omega + \eta) \wedge \theta = f(\omega \wedge \theta) + (\eta \wedge \theta) \qquad (\omega \wedge \eta) \wedge \theta = \omega \wedge (\eta \wedge \theta)$$

$$\omega \wedge \eta = (-1)^{\alpha\beta}(\eta \wedge \omega) \qquad \omega \wedge (f\eta) = (f\omega) \wedge \eta = f(\omega \wedge \eta)$$

$$f \wedge \omega = f\omega$$

όπου ω, η και θ είναι διαφορικές μορφές τύπου α, β και γ αντιστοίχως ενώ το f είναι μια μορφή τύπου 0 δηλαδή μια πραγματική συνάρτηση.

Για τις βασικές διαφορικές μορφές ισχύουν οι σχέσεις

$$dx \wedge dy = dxdy \qquad (dx \wedge dy) \wedge dz = dx \wedge (dy \wedge dz) = dxdydz$$

$$dx \wedge dx = dy \wedge dy = dz \wedge dz = 0$$

$dx \wedge dy = -dy \wedge dx \qquad dy \wedge dz = -dz \wedge dy \qquad dz \wedge dx = -dx \wedge dz$

Θα ορίσουμε τέλος την παράγωγο μιας διαφορικής μορφής που θα την συμβολίζουμε με d.

Ορισμός: Η παράγωγος μιας διαφορικής μορφής ω τύπου $\alpha < 3$ είναι μια μορφή $\alpha + 1$. Η παράγωγος μιας μορφής 3 είναι μηδέν.

Η παράγωγος έχει τις ιδιότητες

$$d(\omega + \eta) = d\omega + d\eta \qquad \text{(Γραμμικότητα)}$$

$$d(\omega \wedge \eta) = d\omega \wedge \eta + (-1)^{\alpha}(\omega \wedge d\eta)$$

$$d^2\omega = 0 \qquad d(dx) = d(dy) = d(dz) = 0$$

Η παράγωγος μιας μορφής 0 ορίζεται από την σχέση

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz$$

Ορισμός: Μια μορφή n ονομάζεται κλειστή αν $d\omega_n = 0$. Μια n μορφή ονομάζεται πλήρης αν είναι η παράγωγος μιας μορφή $n-1$ δηλαδή $\omega_n = d\omega_{n-1}$. Προφανώς μια πλήρης μορφή είναι κλειστή διότι

$$d\omega_n = d(d\omega_{n-1}) = d^2\omega_{n-1} = 0$$

Θα βρούμε τώρα την παράγωγο μιας διαφορικής μορφής ω τύπου 1. Βρίσκουμε

$$d\omega = d\left(Pdx + Qdy + Rdz\right) = d\left(P \wedge dx + Q \wedge dy + R \wedge dz\right) =$$

$$\left(\frac{\partial P}{\partial x}dx + \frac{\partial P}{\partial y}dy + \frac{\partial P}{\partial z}dz\right) \wedge dx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x}dx + \frac{\partial Q}{\partial y}dy + \frac{\partial Q}{\partial z}dz\right) \wedge dy +$$

$$\left(\frac{\partial R}{\partial x}dx + \frac{\partial R}{\partial y}dy + \frac{\partial R}{\partial z}dz\right) \wedge dz = \frac{\partial P}{\partial y}dy \wedge dx + \frac{\partial P}{\partial z}dz \wedge dx + \frac{\partial Q}{\partial x}dx \wedge dy +$$

$$\frac{\partial Q}{\partial z}dz \wedge dy + \frac{\partial R}{\partial x}dx \wedge dz + \frac{\partial R}{\partial y}dy \wedge dz = -\frac{\partial P}{\partial y}dx \wedge dy + \frac{\partial P}{\partial z}dz \wedge dx + \frac{\partial Q}{\partial x}dx \wedge dy -$$

$$-\frac{\partial Q}{\partial z}dy \wedge dz - \frac{\partial R}{\partial x}dz \wedge dx + \frac{\partial R}{\partial y}dy \wedge dz = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy +$$

$$\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)dzdx+\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)dydz$$

Αν οι καρτεσιανές συντεταγμένες είναι συναρτήσεις δύο ανεξάρτητων μεταβλητών δηλαδή αν $\vec{r}=\vec{r}(u,v)$ τότε βρίσκουμε

$$d\omega=\vec{\nabla}\vec{f}\cdot\vec{r}_u\times\vec{r}_v dudv$$

όπου $\vec{f}=(P,Q,R)$. Οι εξισώσεις $\vec{r}=\vec{r}(u,v)$ είναι οι παραμετρικές εξισώσεις μιας επιφάνειας.

θα βρούμε τέλος την παράγωγο μιας διαφορικής μορφής ω τύπου 2. Βρίσκουμε

$$d\omega=d(Fdydz+Gdzdx+Hdxdy)=d(F\wedge dydz+G\wedge dzdx+H\wedge dxdy)=$$

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}dx+\frac{\partial F}{\partial y}dy+\frac{\partial F}{\partial z}dz\right)\wedge dydz+\left(\frac{\partial G}{\partial x}dx+\frac{\partial G}{\partial y}dy+\frac{\partial G}{\partial z}dz\right)\wedge dzdx+$$

$$\left(\frac{\partial H}{\partial x}dx+\frac{\partial H}{\partial y}dy+\frac{\partial H}{\partial z}dz\right)\wedge dxdy=\frac{\partial F}{\partial x}dx\wedge dy\wedge dz+\frac{\partial G}{\partial y}dy\wedge dz\wedge dx+$$

$$\frac{\partial H}{\partial z}dz\wedge dx\wedge dy=\left(\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial G}{\partial y}+\frac{\partial H}{\partial z}\right)dxdydz=\vec{\nabla}\cdot\vec{f}dxdydz$$

όπου $\vec{f}=(F,G,H)$.

Η σχέση $d^2\omega=0$ όταν το ω είναι μια μορφή 1 είναι η γνωστή σχέση $\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}\times\vec{f}=div\,curl\,f=0$.

Είμαστε τώρα σε θέση να διατυπώσουμε τα τρία ολοκληρωτικά θεωρήματα σαν ένα γενικό θεώρημα Στόουκς.

Θεώρημα: Έστω C μια προσανατολισμένη πολλαπλότητα τύπου κ στον χώρο $\Re^3$ που περιέχεται σε ένα ανοικτό υποσύνολο Κ και ω μια διαφορική μορφή τύπου $\kappa-1$ τότε ισχύει η ισότητα

$$\int_{\partial C}\omega=\int_C d\omega$$

Αν το $\kappa=1$ τότε η πολλαπλότητα C είναι μια επιφάνεια και το σύνορο της ∂C είναι μια προσανατολισμένη κλειστή καμπύλη. Το θεώρημα είναι το γνωστό θεώρημα του Στόουκς. Αν Βρισκόμαστε στον χώρο $\Re^2$ το θεώρημα είναι το θεώρημα του Γκρήν. Αν το $\varkappa = 2$ τότε εύκολα ανακαλύπτουμε το θεώρημα του Γκάους.

1.6 Οι Τανυστές

Πολλά μεγέθη στην φυσική για να οριστούν χρειάζεται να προσδιορίσουμε περισσότερους από τρεις αριθμούς. Έχουμε για παράδειγμα ένα ανισότροπο υλικό, δηλαδή ένα υλικό που κάποια ιδιότητα του είναι διαφορετική στην $x-$διεύθυνση διαφορετική στην $y-$διεύθυνση και διαφορετική στην $z-$διεύθυνση. Αν μια διανυσματική ιδιότητα εξαρτάται από μια άλλη γραμμικά με την σχέση π.χ. $\vec{p} = m\vec{\upsilon}$ τότε το p_1 εξαρτάται από το υ_1 με σταθερά αναλογίας m_{11} αλλά και από όλες τις άλλες συνιστώσες υ_2 και υ_3 με σταθερές αναλογίας m_{12} και m_{13}. Γράφουμε

$$p_j = \sum_k m_{jk}\upsilon_k$$

Το μέγεθος m ορίζεται αν ορίσουμε και τα εννέα στοιχεία της μήτρας. Γράφουμε

$$m = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{pmatrix}$$

Το μέγεθος αυτό είναι ένας τανυστής τάξεως 2. Οι συνιστώσες του είναι οι $3^2 = 9$ αριθμοί m_{jk}, $1 \leq j,k \leq 3$

Έναν τανυστή τάξεως 2 στον τριδιάστατο χώρο είναι βολικό να τον γράφουμε σαν μια μήτρα 3×3. Αυτό όμως δεν σημαίνει ότι ένας πίνακας με 9 στοιχεία παριστάνει ένα τανυστή.

Αν ένας τανυστής είναι διαφορετικός στα διάφορα σημεία του χώρου με διάνυσμα θέσεως $\vec{r}$ τότε έχουμε ένα τανυστικό πεδίο. Ο τανυστής αυτός είναι μια συνάρτηση του χώρου και ενδεχομένως μπορεί να εξαρτάται αναλυτικά και από τον χρόνο. Γράφουμε ένα τανυστικό πεδίο με το σύμβολο $\mathrm{T}(\vec{r},t)$.

Στον τανυστή $\mathrm{T}(\vec{r},t)$ μπορούμε να επιδράσουμε τους διαφορικούς τελεστές $grad = \vec{\nabla}$, $div = \vec{\nabla}\cdot$ και $rot = \vec{\nabla}\times$. Το αποτέλεσμα είναι ένα άλλος τανυστής με τάξη μεγαλύτερη για το $grad$, μικρότερη για το div και ίση για το rot με την τάξη του $\mathrm{T}(\vec{r},t)$.

Έχουμε ορίσει τα διανύσματα σαν τα μεγέθη εκείνα που έχουν μέτρο, φορά και διεύθυνση. Άλλος ορισμός των διανυσμάτων είναι με τις συνιστώσες τους. Μια τριάδα αριθμών προσδιορίζει ένα διάνυσμα ως προς κάποιο σύστημα συντεταγμένων. Τα διανύσματα όμως εφόσον παριστάνουν κάποια φυσικά μεγέθη πρέπει προφανώς να είναι ανεξάρτητα από το σύστημα συντεταγμένων.

Ορισμός: Ένα φυσικό μέγεθος $\vec{r}$ ονομάζεται διάνυσμα αν για να το ορίσουμε χρειαζόμαστε τρεις αριθμούς x_i ως προς ένα σύστημα συντεταγμένων S. Αν περιστρέψουμε το σύστημα συντεταγμένων το διάνυσμα παριστάνεται με μια νέα τριάδα αριθμών x'_i. Στο καινούργιο σύστημα S' οι δύο αυτές τριάδες ικανοποιούν τις ακόλουθες γραμμικές σχέσεις

$$S' = \alpha S \qquad x'_j = A_{jk} x_k \qquad A_{jk} \in R(3)$$

όπου A_{jk} είναι μια μήτρα 3×3. Στην παραπάνω σχέση εννοείται ότι γίνεται άθροιση ως προς τον δείκτη k διότι επαναλαμβάνεται δύο φορές στην ίδια πλευρά της ισότητας.

Επομένως τρεις αριθμοί για να παριστάνουν ένα διάνυσμα πρέπει να ικανοποιούν και την παραπάνω συνθήκη.

Θεωρούμε τώρα δύο διανύσματα $\vec{x}$ και $\vec{y}$ με συνιστώσες x_j και y_j. Από τα δύο αυτά διανύσματα μπορούμε να πάρουμε εννιά αριθμούς $x_j y_k$. Αυτοί οι αριθμοί μετασχηματίζονται προφανώς πάλι γραμμικά από μία περιστροφή των αξόνων. Από την πρόταση αυτή δίνουμε τον παρακάτω φυσικό ορισμό για τους τανυστές χωρίς αυτό να σημαίνει ότι ένας τανυστής είναι κατ' ανάγκη το γινόμενο δύο διανυσμάτων.

Ορισμός: Ένα φυσικό μέγεθος ονομάζεται τανυστής τάξεως δύο αν χρειάζεται εννιά αριθμούς $\mathrm{T}_{jk},\ j,k = 1,2,3$ για να προσδιοριστεί πλήρως και επί πλέον αν περιστρέψουμε το σύστημα αναφοράς η καινούργια εννιάδα των αριθμών $\mathrm{T}'_{jk},\ j,k = 1,2,3$ ικανοποιεί την σχέση

$$S' = \alpha S \qquad T'_{ij} = A_{ik} A_{jl} T_{kl} \qquad A_{jk} \in R(3)$$

όπου εννοείται ότι γίνεται άθροιση ως προς τους δείκτες k και l.

Ο ορισμός αυτός μπορεί να γενικευτεί και για τανυστές με οποιαδήποτε τάξη.

Ορισμός: Ένα φυσικό μέγεθος ονομάζεται τανυστής τάξεως N αν χρειάζεται 3^{N} αριθμούς $\mathrm{T}_{jk\cdots m},\ 1 \le j,k,\cdots,m \le 3$ για να προσδιοριστεί πλήρως και επί πλέον αν περιστρέψουμε το σύστημα αναφοράς οι καινούργιοι αριθμοί $\mathrm{T}'_{jk\cdots m},\ 1 \le j,k \cdots m \le 3$ ικανοποιούν τις σχέσεις

$$S' = \alpha S \qquad T'_{ij\cdots m} = A_{ik} A_{jl} \cdots A_{mn} T_{kl\cdots n} \qquad A_{jk} \in R(3)$$

΄Ενας τανυστής τάξεως 0 είναι ένα βαθμωτό μέγεθος. ΄Ενα βαθμωτό μέγεθος δεν μεταβάλλεται κατά την περιστροφή των αξόνων. ΄Ενας τανυστής τάξεως 1 είναι ένα διάνυσμα.

Παράδειγμα: Θεωρούμε τον χώρο των δύο διαστάσεων και περιστρέφουμε τους άξονες κατά γωνία θ. Αν το σημείο (x, y) στο ακίνητο σύστημα έχει στο περιστρεφόμενο σύστημα συνιστώσες (x', y') τότε ισχύουν οι σχέσεις

$$x' = x\,\text{συν}\,\theta + y\,\text{ημ}\,\theta \qquad\qquad x' = -x\,\text{ημ}\,\theta + y\,\text{συν}\,\theta$$

ή σε μορφή πινάκων γράφουμε

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{συν}\,\theta & \text{ημ}\,\theta \\ -\,\text{ημ}\,\theta & \text{συν}\,\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Αν συμβολίσουμε με A τον πίνακα περιστροφής έχουμε

$$A_{11} = \text{συν}\,\theta \qquad A_{12} = \text{ημ}\,\theta \qquad A_{21} = -\,\text{ημ}\,\theta \qquad A_{22} = \text{συν}\,\theta$$

Είναι εύκολο να αποδείξουμε ότι από τους παρακάτω πίνακες 2×2

$$T = \begin{pmatrix} -xy & -y^2 \\ x^2 & xy \end{pmatrix} \qquad\qquad P = \begin{pmatrix} -xy & -y^2 \\ x^2 & -xy \end{pmatrix}$$

ο πρώτος είναι ένας τανυστής ενώ ο δεύτερος δεν είναι. ΄Ετσι ένας πίνακας 2×2 δεν είναι κατ' ανάγκη τανυστής.

Για το στοιχείο T_{11} για παράδειγμα έχουμε

$$T'_{11} = -x'y' =$$

$$= -(x\,\text{συν}\,\theta + y\,\text{ημ}\,\theta)(-x\,\text{ημ}\,\theta + y\,\text{συν}\,\theta) = x^2\,\text{συν}\,\theta\,\text{ημ}\,\theta - xy\,\text{συν}^2\,\theta +$$

$$xy\,\text{ημ}^2\,\theta - y^2\,\text{συν}\,\theta\,\text{ημ}\,\theta = \text{συν}^2\,\theta T_{11} + \text{συν}\,\theta\,\text{ημ}\,\theta T_{12} + \text{συν}\,\theta\,\text{ημ}\,\theta T_{21} + \text{ημ}^2\,\theta T_{22}$$

Δηλαδή ισχύει

$$T'_{11} = \mathrm{A}_{11}A_{11}T_{11} + \mathrm{A}_{11}A_{12}T_{12} + \mathrm{A}_{12}A_{11}T_{21} + \mathrm{A}_{12}A_{12}T_{22}$$

Παρόμοιοι μετασχηματισμοί ισχύουν και για τα στοιχεία T'_{21}, T'_{12} και T'_{22}

Για τον πίνακα P δεν ισχύει τέτοια σχέση και επομένως ο πίνακας δεν είναι τανυστής.

Αν εργαστούμε σε ένα άλλο σύστημα συντεταγμένων τότε πρέπει να ξεχωρίσουμε δύο είδη τανυστών. Τους συναλλοίωτους και τους αδιαλλοίωτους τανυστές. Το ίδιο διαχωρισμό πρέπει να κάνουμε φυσικά και για τα διανύσματα και για τις βαθμωτές συναρτήσεις.

Ας θεωρήσουμε ότι από το σύστημα x_j πηγαίνουμε σε ένα τονούμενο σύστημα x'_j. Έχουμε δηλαδή μια αλλαγή στις συντεταγμένες της μορφής

$$x'_1 = x'_1(x_1, x_2, x_3) \qquad x'_2 = x'_2(x_1, x_2, x_3) \qquad x'_3 = x'_3(x_1, x_2, x_3)$$

Με αυτή την αλλαγή των συντεταγμένων τα διαφορικά dx'_j δίνονται από την σχέση

$$dx'_j = \sum_k \frac{\partial x'_j}{\partial x_k} dx_k$$

Αντιθέτως αν $V(x, y, z)$ είναι ένα βαθμωτό πεδίο τότε οι παράγωγοι του πεδίου αυτού δίνονται από την σχέση

$$\frac{\partial V}{\partial x_j} = \sum_k \frac{\partial x'_j}{\partial x_k} \frac{\partial V}{\partial x'_j}$$

Οι παραπάνω διαφορετικοί μετασχηματισμοί των διαφορικών dx_j και των συναρτήσεων $\partial V/\partial x_j$ από μία αλλαγή των συντεταγμένων μας βοηθάνε για να ορίσουμε τα δύο είδη των διανυσμάτων.

Ορισμός: Ονομάζουμε ανταλλοίωτο διάνυσμα ή τανυστή τάξεως $(0, 1)$ κάθε μέγεθος T που χρειάζεται τρεις αριθμούς T^j για να προσδιοριστεί και με μια αλλαγή στις συντεταγμένες οι συνιστώσες του μετασχηματίζονται όπως τα διαφορικά δηλαδή

$$T'^j = \sum_k \alpha_k^j T^k \qquad \text{όπου} \qquad \alpha_k^j = \frac{\partial x'_j}{\partial x_k}$$

Ορισμός: Ονομάζουμε συναλλοίωτο διάνυσμα ή τανυστή τάξεως (1,0) κάθε μέγεθος T που χρειάζεται τρεις αριθμούς T_j για να προσδιοριστεί και με μια αλλαγή στις συντεταγμένες οι συνιστώσες του μετασχηματίζονται όπως οι μερικές παράγωγοι του πεδίου V, δηλαδή όπως η σχέση.

$$\mathrm{T}'_j = \sum_k \beta_j^k \mathrm{T}_k \qquad \text{όπου} \qquad \beta_j^k = \frac{\partial x_k}{\partial x'_j}$$

Παρατηρούμε ότι ισχύει η σχέση

$$\sum_j \alpha_i^j \beta_j^k = \frac{\partial x_i}{\partial x_k} = \delta_i^k \qquad \sum_j \alpha_j^i \beta_k^j = \frac{\partial x_i}{\partial x_k} = \delta_k^i$$

Το σύμβολο $\delta_j^k = \delta_k^j$ ονομάζεται τανυστής του Κρόνεκερ και είναι ίσος με το μηδέν για $j \neq k$ και ίσος με την μονάδα για $j = k$.

$$\delta_j^k = \begin{cases} 1 & j = k \\ 0 & j \neq k \end{cases}$$

Μπορούμε τώρα να γενικεύσουμε τους παραπάνω ορισμούς και να ορίσουμε τανυστές με μεγαλύτερη τάξη.

Ορισμός: Ένα φυσικό μέγεθος ονομάζεται αντιαλλοίωτος τανυστής τάξεως N ή τανυστής τάξεως $(N, 0)$ αν χρειάζεται 3^{N} αριθμούς $\mathrm{T}^{jk\cdots m}$, $1 \leq j, k, \cdots, m \leq 3$ για να προσδιοριστεί πλήρως και επί πλέον αν σε μια αλλαγή των συντεταγμένων σε ένα τονούμενο σύστημα αναφοράς οι καινούργιοι αριθμοί $\mathrm{T}'^{pq\cdots r}$, $1 \leq p, q \cdots r \leq 3$ συνδέονται με τους άτονους με την σχέση.

$$\mathrm{T}'^{jk\cdots m} = \alpha_p^j \alpha_q^k \cdots \alpha_r^m \mathrm{T}^{pq\cdots r} \qquad \text{όπου} \qquad \alpha_p^j = \frac{\partial x'_j}{\partial x_p}$$

Ορισμός: Ένα φυσικό μέγεθος ονομάζεται συναλλοίωτος τανυστής τάξεως N ή τανυστής τάξεως $(0, N)$ αν χρειάζεται 3^{N} αριθμούς $\mathrm{T}_{jk\cdots m}$, $1 \leq j, k, \cdots, m \leq 3$ για να προσδιοριστεί πλήρως και επί πλέον αν σε μια αλλαγή των συντεταγμένων σε ένα τονούμενο σύστημα αναφοράς οι καινούργιοι αριθμοί $\mathrm{T}'_{pq\cdots r}$, $1 \leq p, q \cdots r \leq 3$ συνδέονται με τους άτονους με την σχέση.

$$\mathrm{T}'_{jk\cdots m} = \beta_j^p \beta_k^q \cdots \beta_m^r \mathrm{T}_{pq\cdots r} \qquad \text{όπου} \qquad \beta_j^p = \frac{\partial x_p}{\partial x'_j}$$

Ορισμός: Ένα φυσικό μέγεθος ονομάζεται τανυστής τάξεως (N, M) αν χρειάζεται $3^{\mathrm{N}+M}$ αριθμούς $\mathrm{T}^{jk\cdots m}_{j'k'\cdots m'}$ για να προσδιοριστεί πλήρως και επί πλέον αν σε μια αλλαγή των συντεταγμένων σε ένα τονούμενο σύστημα αναφοράς οι καινούργιοι αριθμοί $\mathrm{T}'^{pq\cdots r}_{p'q'\cdots r'}$ συνδέονται με τους άτονους με την σχέση.

$$\mathrm{T}'^{jk\cdots m}_{j'k'\cdots m'} = \beta_p^j \beta_q^k \cdots \beta_r^m \alpha_{j'}^{p'} \alpha_{k'}^{q'} \cdots \alpha_{m'}^{r'} \mathrm{T}^{pq\cdots r}_{p'q'\cdots r'}$$

Όλοι οι δείκτες μεταβάλλονται από 1 έως 3 και τα α_j^k και β_k^j δίνονται από της προηγούμενες σχέσεις.

Μπορούμε να πολλαπλασιάσουμε ένα τανυστή με έναν αριθμό για να πάρουμε έναν καινούργιο τανυστή της ίδιας τάξεως. Μπορούμε επίσης να προσθέσουμε τανυστές που έχουν την ίδια τάξη. Έτσι όλοι οι τανυστές κάποιας τάξεως σχηματίζουν έναν διανυσματικό χώρο.

Αν έχουμε ένα τανυστή τάξεως Ν με 3^{N} στοιχεία και ένα τανυστή τάξεως Μ με 3^{M} στοιχεία μπορούμε να πολλαπλασιάσουμε τα στοιχεία τους ένα προς ένα για να πάρουμε $3^{\mathrm{N}} \times 3^{\mathrm{M}} = 3^{\mathrm{N+M}}$ αριθμούς δηλαδή έναν τανυστή τάξεως $\mathrm{N} + \mathrm{M}$. Η πράξη αυτή ονομάζεται τανυστικό γινόμενο των δύο τανυστών. Για παράδειγμα το τανυστικό γινόμενο δύο διανυσμάτων δίνει έναν τανυστή τάξεως 2. Γράφουμε συμβολικά $\vec{v}_1\vec{v}_2$ για το γινόμενο αυτό.

Αν αθροίσουμε ως προς δύο δείκτες ενός τανυστή T τάξεως Ν παίρνουμε έναν τανυστή S τάξεως $\mathrm{N} - 2$.

$$S_{jk\cdots} = \sum_i T_{ji\cdots ik}$$

Η πράξη ονομάζεται συστολή των δεικτών.

Η πράξη της συστολής συμπίπτει με το ίχνος του πίνακα και σημειώνεται με το σύμβολο Τρ.

$$\mathrm{T}\rho(m) = \mathrm{T}\rho \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{pmatrix} = m_{11} + m_{22} + m_{33}$$

Μια πράξη όμοια με το εσωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων είναι η συστολή. Εξισώνουμε έναν συναλλοίωτο δείκτη και έναν αδιαλλοίωτο δείκτη ή αντιστρόφως και μετά προσθέτουμε ως προς τον κοινό αυτό δείκτη.

Ασκήσεις

Άσκηση 1.1

Να αποδειχτεί ότι αν η διανυσματική συνάρτηση $\vec{r}(t)$ είναι κάθετη στην παραγωγό της τότε έχει σταθερό μέτρο και αντιστρόφως. Επίσης να αποδειχτεί ότι η συνάρτηση $\vec{r}(t)$ έχει σταθερή διεύθυνση εάν και μόνο εάν είναι παράλληλη προς την παράγωγό της.

Λύση: Υποθέτουμε ότι η διανυσματική συνάρτηση έχει σταθερό μέτρο

$$\|\vec{r}(t)\| = r(t) = \text{σταθερό}$$

Παραγωγίζουμε το τετράγωνο του μέτρου του διανύσματος και έχουμε

$$\frac{d}{dt}\|\vec{r}\|^2 = \frac{d}{dt}\left(\vec{r}\cdot\vec{r}\right) = 2\vec{r}\cdot\frac{d}{dt}\vec{r} = 0$$

Επομένως το διάνυσμα $\vec{r}(t)$ είναι κάθετο στην παραγωγό του.

Αντιστρόφως αν το διάνυσμα είναι κάθετο στην παραγωγό του τότε ισχύουν οι παραπάνω ισότητες και επομένως

$$\frac{d}{dt}\|\vec{r}\|^2 = 0 \quad\Longrightarrow\quad \|\vec{r}\|^2 = C \quad\Longrightarrow\quad \|\vec{r}\| = \text{σταθερό}$$

Για το δεύτερο σκέλος της ασκήσεως υποθέτουμε ότι το διάνυσμα $\vec{r}(t)$ έχει σταθερή διεύθυνση. Το διάνυσμα $\vec{r}(t)/r(t)$ είναι ανάλογο του $\vec{r}(t)$ άρα έχει και αυτό σταθερή διεύθυνση. Επί πλέον έχει μέτρο ίσο με την μονάδα. Άρα είναι σταθερό και επομένως η παραγωγός του είναι μηδέν.

Έχουμε

$$\frac{d}{dt}\frac{1}{r}\vec{r} = \frac{1}{r^2}\left(r\frac{d}{dt}\vec{r} - \vec{r}\frac{d}{dt}r\right) = 0 \quad\Longrightarrow\quad r\frac{d}{dt}\vec{r} - \vec{r}\frac{d}{dt}r = 0$$

Πολλαπλασιάζουμε την τελευταία εξίσωση εξωτερικά με το διάνυσμα $\vec{r}(t)$ και παίρνουμε

$$\vec{r}\times\left(r\frac{d}{dt}\vec{r}-\vec{r}\frac{d}{dt}r\right)=r\vec{r}\times\frac{d}{dt}\vec{r}-\vec{r}\times\vec{r}\frac{d}{dt}r=r\vec{r}\times\frac{d}{dt}\vec{r}=0 \quad\Longrightarrow\quad \vec{r}\times\frac{d}{dt}\vec{r}=0$$

Για το αντίστροφο. Υποθέτουμε ότι ισχύει η σχέση

$$\vec{r}\times\frac{d}{dt}\vec{r}=0$$

Το διάνυσμα $\vec{r}(t)/r(t)$ έχει σταθερό μέτρο ίσο με την μονάδα αν αποδείξουμε ότι είναι σταθερό τότε έχει και σταθερή διεύθυνση και επομένως και το $\vec{r}(t)$ έχει σταθερή διεύθυνση.

Παραγωγίζουμε και έχουμε

$$\frac{d}{dt}\frac{1}{r}\vec{r}=-\frac{1}{r^2}\frac{dr}{dt}\vec{r}+\frac{1}{r}\frac{d}{dt}\vec{r}=\frac{1}{r^3}\left(r^2\frac{d}{dt}\vec{r}-r\frac{dr}{dt}\vec{r}\right) \tag{1}$$

Όμως ισχύει προφανώς η σχέση $r^2=\vec{r}\cdot\vec{r}$ την οποία παραγωγίζουμε και έχουμε

$$\frac{d}{dt}r^2=\frac{d}{dt}\vec{r}\cdot\vec{r} \quad\Longrightarrow\quad 2r\frac{d}{dt}r=2\vec{r}\cdot\frac{d}{dt}\vec{r}$$

Αντικαθιστούμε την σχέση αυτή στην (1) και βρίσκουμε

$$\frac{d}{dt}\frac{1}{r}\vec{r}=\frac{1}{r^3}\left((\vec{r}\cdot\vec{r})\frac{d}{dt}\vec{r}-\left(\vec{r}\cdot\frac{d}{dt}\vec{r}\right)\vec{r}\right)=\frac{1}{r^3}\left(\vec{r}\times\frac{d}{dt}\vec{r}\right)\times\vec{r}=0$$

Επομένως το διάνυσμα $\vec{r}(t)$ έχει σταθερή διεύθυνση.

Παρατήρηση: Αν θεωρήσουμε την κίνηση ενός υλικού σημείου σε μια περιφέρεια με ακτίνα r σταθερού μέτρου τότε η άσκηση μας λέει ότι η ταχύτητα είναι πάντα κάθετη στο διάνυσμα θέσεως του υλικού σημείου.

Άσκηση 1.2

Να αποδειχτεί ότι κάθε σωληνοειδές διάνυσμα $\vec{f}$ μπορεί να γραφεί με την μορφή

$$\vec{f}=\vec{\nabla}\times\vec{g} \tag{1}$$

Στη φυσική και ιδιαίτερα στον ηλεκτρομαγνητισμό εμφανίζονται εξισώσεις τέτοιου είδους και το διάνυσμα $\vec{g}$ ονομάζεται διανυσματικό δυναμικό.

Λύση: Το διάνυσμα $\vec{f}$ που δίνεται από την παραπάνω σχέση είναι προφανώς ένα σωληνοειδές διάνυσμα. Πράγματι

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{f}=\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}\times\vec{g}=0$$

Συμβολίζουμε με f_i και με g_i τις συνιστώσες των διανυσμάτων $\vec{f}$ και $\vec{g}$ αντιστοίχως. Επειδή το διάνυσμα $\vec{f}$ είναι σωληνοειδές ισχύει η σχέση

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{f}=0 \quad\Longrightarrow\quad \frac{\partial}{\partial x}f_1+\frac{\partial}{\partial y}f_2+\frac{\partial}{\partial z}f_3=0 \tag{2}$$

Η σχέση (1) γράφεται αναλυτικά

$$\frac{\partial}{\partial y}g_3-\frac{\partial}{\partial z}g_2=f_1 \qquad \frac{\partial}{\partial z}g_1-\frac{\partial}{\partial x}g_3=f_2 \qquad \frac{\partial}{\partial x}g_2-\frac{\partial}{\partial y}g_1=f_3$$

Δηλαδή το πρόβλημα είναι να λυθεί το παραπάνω σύστημα των διαφορικών εξισώσεων.

Ζητάμε στην αρχή μια μερική λύση $\vec{g}_0=(A,B,0)$ τέτοια ώστε

$$\vec{f}=\vec{\nabla}\times\vec{g}_0$$

Αναλύουμε την παραπάνω εξίσωση και παίρνουμε τις εξισώσεις

$$-\frac{\partial}{\partial z}B=f_1 \qquad \frac{\partial}{\partial z}A=f_2 \qquad \frac{\partial}{\partial x}B-\frac{\partial}{\partial y}A=f_3$$

Μπορούμε να ολοκληρώσουμε αμέσως τις δύο πρώτες εξισώσεις. Το αποτέλεσμα είναι

$$A=\int_{z_0}^{z}f_2(x,y,t)dt+\alpha(x,y) \qquad B=-\int_{z_0}^{z}f_1(x,y,t)dt+\beta(x,y)$$

όπου α και β είναι αυθαίρετες συναρτήσεις των μεταβλητών x και y.

Δεδομένου ότι ζητάμε μια μερική λύση και έχουμε μία ακόμα εξίσωση μπορούμε να μηδενίσουμε μια από τις δύο αυτές αυθαίρετες συναρτήσεις.

Υποθέτουμε ότι $\alpha(x,y)=0$ και αντικαθιστούμε τις συναρτήσεις A και B στην τρίτη εξίσωση του διαφορικού συστήματος. Βρίσκουμε

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(-\int_{z_0}^{z} f_1(x,y,t)dt+\beta(x,y)\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\int_{z_0}^{z} f_2(x,y,t)dt\right)=$$

$$=-\int_{z_0}^{z}\left(\frac{\partial}{\partial x}f_2(x,y,t)+\frac{\partial}{\partial y}f_1(x,y,t)\right)dt+\frac{\partial}{\partial x}\beta(x,y)=f_3$$

Το διάνυσμα όμως $\vec{f}$ είναι σωληνοειδές και άρα ικανοποιείται η σχέση (2). Επομένως η παραπάνω εξίσωση γράφεται

$$\int_{z_0}^{z}\left(\frac{\partial}{\partial t}f_3(x,y,t)\right)dt+\frac{\partial}{\partial x}\beta(x,y)=f_3$$

Η εξίσωση αυτή μετά την ολοκλήρωση ως προς t γίνεται

$$\frac{\partial}{\partial x}\beta(x,y)=f_3(x,y,z_0)$$

Από την σχέση αυτή βρίσκουμε την άγνωστη συνάρτηση $\beta(x,y)$ με μία ολοκλήρωση

$$\beta(x,y)=\int f_3(x,y,z_0)dx$$

Οι συνιστώσες A και B του διανύσματος $\vec{g}_0$ είναι

$$A=\int_{z_0}^{z} f_1(x,y,t)dt \qquad B=-\int_{z_0}^{z} f_2(x,y,t)dt+\int f_3(x,y,z_0)dx$$

Η λύση που βρήκαμε είναι μια μερική λύση. Θα βρούμε τώρα την γενική λύση του προβλήματος.

Αν $\vec{g}$ είναι μια άλλη λύση της εξισώσεως $\vec{f}=\vec{\nabla}\times\vec{g}$ τότε προφανώς πρέπει

$$\vec{\nabla}\times\vec{g}-\vec{\nabla}\times\vec{g}_0=\vec{\nabla}\times(\vec{g}-\vec{g}_0)=\vec{0}$$

Επομένως το διάνυσμα $\vec{g}-\vec{g}_0$ είναι αστρόβιλο και άρα υπάρχει βαθμωτή συνάρτηση $\varphi(\vec{r})$ τέτοια ώστε $\vec{g}-\vec{g}_0=\vec{\nabla}\varphi(\vec{r})$.

Άρα έχουμε

$$\vec{g} = \vec{g}_0 + \vec{\nabla}\varphi(\vec{r})$$

όπου $\varphi(\vec{r})$ είναι μια αυθαίρετη συνάρτηση που φυσικά πρέπει να έχει μερικές παραγώγους δεύτερης τάξεως.

Η συνάρτηση $\vec{g}$ είναι τελικά η γενική λύση του προβλήματος.

Άσκηση 1.3

Να αποδειχτούν οι ακόλουθες διανυσματικές ταυτότητες

$$\vec{\nabla}(f+g) = \vec{\nabla}f+\vec{\nabla}g \qquad \vec{\nabla}\cdot(\vec{f}+\vec{g}) = \vec{\nabla}\cdot\vec{f}+\vec{\nabla}\cdot\vec{g} \qquad \vec{\nabla}\times(\vec{f}+\vec{g}) = \vec{\nabla}\times\vec{f}+\vec{\nabla}\times\vec{g}$$

$$\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}f) = \vec{0} \qquad \vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{f}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{f}) - \vec{\nabla}^2 f \qquad \vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{f}) = 0$$

$$\vec{\nabla}\cdot(f\vec{g}) = (\vec{\nabla}f)\cdot\vec{g} + f(\vec{\nabla}\cdot\vec{g}) \qquad \vec{\nabla}\times(f\vec{g}) = (\vec{\nabla}f)\times\vec{g} + f(\vec{\nabla}\times\vec{g})$$

$$\vec{\nabla}(\vec{f}\cdot\vec{g}) = (\vec{g}\cdot\vec{\nabla})\vec{f} + (\vec{f}\cdot\vec{\nabla})\vec{g} + \vec{g}\times(\vec{\nabla}\times\vec{f}) + \vec{f}\times(\vec{\nabla}\times\vec{g})$$

$$\vec{\nabla}\times(\vec{f}\times\vec{g}) = (\vec{g}\cdot\vec{\nabla})\vec{f} - \vec{g}(\vec{\nabla}\cdot\vec{f}) - (\vec{f}\cdot\vec{\nabla})\vec{g} + \vec{f}(\vec{\nabla}\cdot\vec{g})$$

$$\vec{\nabla}\cdot(\vec{f}\times\vec{g}) = \vec{g}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{f}) - \vec{f}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{g})$$

Λύση: Οι αποδείξεις των ταυτοτήτων αυτών είναι απλές. Θα αποδείξουμε μόνο την τελευταία ισότητα.

Έχουμε

$$\vec{\nabla}\cdot(\vec{f}\times\vec{g}) = \begin{vmatrix} \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ f_1 & f_2 & f_3 \\ g_1 & g_2 & g_3 \end{vmatrix} = \frac{\partial}{\partial x}(f_2 g_3 - f_3 g_2) +$$

$$\frac{\partial}{\partial y}(f_3 g_1 - f_1 g_3) + \frac{\partial}{\partial z}(f_1 g_2 - f_2 g_1) = f_2\frac{\partial}{\partial x}g_3 + g_3\frac{\partial}{\partial x}f_2 - f_3\frac{\partial}{\partial x}g_2 - g_2\frac{\partial}{\partial x}f_3 +$$

$$f_3\frac{\partial}{\partial y}g_1 + g_1\frac{\partial}{\partial y}f_3 - f_1\frac{\partial}{\partial y}g_3 - g_3\frac{\partial}{\partial y}f_1 + f_1\frac{\partial}{\partial z}g_2 + g_2\frac{\partial}{\partial z}f_1 - f_2\frac{\partial}{\partial z}g_1 - g_1\frac{\partial}{\partial z}f_2 =$$

Αναπτύσσουμε τώρα το δεύτερο μέλος της ταυτότητας

$$\vec{g}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{f}) - \vec{f}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{g}) = \begin{vmatrix} g_1 & g_2 & g_3 \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ f_1 & f_2 & f_3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} f_1 & f_2 & f_3 \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ g_1 & g_2 & g_3 \end{vmatrix} =$$

$$g_1\frac{\partial}{\partial y}f_3-g_1\frac{\partial}{\partial z}f_2+g_2\frac{\partial}{\partial z}f_1-g_2\frac{\partial}{\partial x}f_3+g_3\frac{\partial}{\partial x}f_2-g_3\frac{\partial}{\partial y}f_1+f_1\frac{\partial}{\partial z}g_2-f_1\frac{\partial}{\partial y}g_3+$$

$$f_2\frac{\partial}{\partial x}g_3 - f_2\frac{\partial}{\partial z}g_1 + f_3\frac{\partial}{\partial y}g_1 - f_3\frac{\partial}{\partial x}g_2$$

΄Οπως διαπιστώνουμε εύκολα τα δύο μέλη της ισότητας είναι πραγματικά ίσα και άρα ή ταυτότητα ισχύει

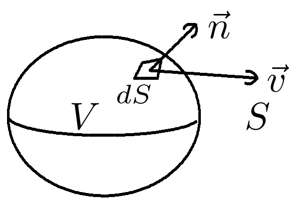
΄Ασκηση 1.4

΄Εστω $\rho(\vec{r},t)$ η πυκνότητα ενός ρευστού μέσα σε ένα όγκο V που περικλείεται από την κλειστή επιφάνεια S. Εάν $v(\vec{r},t)$ είναι το πεδίο ταχυτήτων του ρευστού τότε να αποδειχτεί ότι ισχύει η ακόλουθη εξίσωση συνεχείας

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho(\vec{r},t) + \vec{\nabla}\cdot\vec{j}(\vec{r},t) = 0 \qquad \text{όπου} \qquad \vec{j} = \rho\vec{v}$$

Υποθέτουμε ότι δεν υπάρχουν περιοχές που παράγεται ή εξαφανίζεται μάζα.

Γενικά για κάθε μέγεθος που διατηρείται υπάρχει και μια αντίστοιχη εξίσωση συνεχείας.



Σχήμα 1.9
Στον όγκο V η μάζα διατηρείται

Λύση: Το μέγεθος ρdV είναι η μάζα του ρευστού που βρίσκεται στον στοιχειώδη όγκο dV. Η μάζα του ρευστού που καταλαμβάνει τον όγκο V είναι

$$\int_V \rho dV$$

Η μεταβολή ως προς τον χρόνο της μάζας αυτής είναι

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_V \rho dV = \int_V \frac{\partial\rho}{\partial t}dV$$

Θεωρούμε το dS ένα στοιχείο της επιφάνειας γύρω από το σημείο P και $\vec{n}$ το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα στον επιφάνεια S με φορά από το εσωτερικό προς το εξωτερικό της επιφάνειας. Εάν $\vec{v}$ η ταχύτητα του ρευστού στο σημείο P τότε η προβολή του διανύσματος αυτού κατά την κάθετο διεύθυνση είναι ίση με $\vec{v}\cdot\vec{n}$. Το ποσό της μάζας του ρευστού που βγαίνει από την επιφάνεια dS είναι $\rho\vec{v}\cdot\vec{n}\,dS$. Η συνολική εκροή του ρευστού από την επιφάνεια S που περικλείει τον όγκο V είναι

$$\int_S \rho\vec{v}\cdot\vec{n}\,dS$$

Επειδή δεν παράγεται ούτε εξαφανίζεται μάζα έπεται ότι η μεταβολή της μάζας μέσα στον όγκο V οφείλεται στην εκροή (ή στην εισροή) της μάζας από την επιφάνεια S. Επομένως ισχύει η ισότητα

$$\int_V \frac{\partial\rho}{\partial t}dV = -\int_S \rho\vec{v}\cdot\vec{n}\,dS$$

Εφαρμόζουμε το θεώρημα του Γκάους στο δεύτερο ολοκλήρωμα της παραπάνω σχέσεως και έχουμε

$$\int_V \frac{\partial\rho}{\partial t}dV + \int_V \vec{\nabla}\cdot(\rho\vec{v})\,dV = \int_V \left(\frac{\partial\rho}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot(\rho\vec{v})\right)dV = 0$$

Η σχέση αυτή ισχύει για κάθε όγκο V άρα η ποσότητα κάτω από το ολοκλήρωμα πρέπει να είναι μηδέν. Επομένως έχουμε

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot(\rho\vec{v}) = 0$$

η οποία είναι η εξίσωση συνεχείας.

Η εξίσωση αυτή γράφεται αλλιώς με την μορφή

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho + \rho\vec{\nabla}\cdot\vec{v} + \vec{v}\cdot\vec{\nabla}\rho = 0$$

Επίσης λόγω της σχέσεως

$$\frac{d\rho(\vec{r},t)}{dt} = \frac{\partial\rho}{\partial t} + \vec{\nabla}\rho\cdot\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{\partial\rho}{\partial t} + \vec{\nabla}\rho\cdot\vec{v}$$

η εξίσωση συνεχείας μπορεί να δοθεί προφανώς και με την μορφή

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0$$

Άρα για ένα ασυμπίεστο υγρό που η μάζα έχει σταθερή πυκνότητα δηλαδή $d\rho/dt = 0$ από την παραπάνω σχέση συνεπάγεται ότι

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0$$

Άσκηση 1.5

Στον τετραδιάστατο χωροχρόνο του Μινκόφσκυ (t, x, y, z), $(c = 1)$ δίνονται οι διαφορικές μορφές 2

$$F = (E_1 dx + E_2 dy + E_3 dz) \wedge dt + B_1 dy \wedge dz + B_2 dz \wedge dx + B_3 dx \wedge dy$$

$$F^* = (B_1 dx + B_2 dy + B_3 dz) \wedge dt - E_1 dy \wedge dz - E_2 dz \wedge dx - E_3 dx \wedge dy$$

Τα E_i και B_i, $i = 1, 2, 3$ είναι διανυσματικά πεδία που εξαρτώνται και από τον χρόνο δηλαδή $E_i = E_i(x, y, z, t)$ και $B_i = B_i(x, y, z, t)$. Δίνετε επίσης και η ακόλουθη μορφή 3

$$J = (j_1 dy \wedge dz + j_2 dz \wedge dx + j_3 dx \wedge dy) \wedge dt - \rho dx \wedge dy \wedge dz$$

Να βρείτε μια μορφή 1 τέτοια ώστε $F = dA$.

Να αποδείξετε ότι οι εξισώσεις

$$dF = 0 \qquad dF^* = J$$

οδηγούν στις εξισώσεις του Μάξγουελ.

Λύση:

Θα βρούμε μια μορφή 1 τέτοια ώστε $F = dA$. Υποθέτουμε ότι η μορφή αυτή είναι

$$A = A_0 dt + A_1 dx + A_2 dy + A_3 dz$$

όπου τα A$_i$, $i = 0, 1, 2, 3$ είναι συναρτήσεις του τετρα - διανύσματος (x,y,z,t). Βρίσκουμε παραλείποντας του μηδενικούς όρους

$$dA = dA_0 dt + dA_1 dx + dA_2 dy + dA_3 dz =$$

$$\left(\frac{\partial A_0}{\partial x}dx+\frac{\partial A_0}{\partial y}dy+\frac{\partial A_0}{\partial z}dz\right)\wedge dt+\left(\frac{\partial A_1}{\partial y}dy+\frac{\partial A_1}{\partial z}dz+\frac{\partial A_1}{\partial t}dt\right)\wedge dx+$$

$$\left(\frac{\partial A_2}{\partial x}dx+\frac{\partial A_2}{\partial z}dz+\frac{\partial A_2}{\partial t}dt\right)\wedge dy+\left(\frac{\partial A_3}{\partial x}dx+\frac{\partial A_3}{\partial y}dy+\frac{\partial A_3}{\partial t}dt\right)\wedge dz=$$

$$\left(\frac{\partial A_0}{\partial x}-\frac{\partial A_1}{\partial t}\right)dx\wedge dt+\left(\frac{\partial A_0}{\partial y}-\frac{\partial A_2}{\partial t}\right)dy\wedge dt+\left(\frac{\partial A_0}{\partial z}-\frac{\partial A_3}{\partial t}\right)dz\wedge dt+$$

$$\left(\frac{\partial A_2}{\partial x}-\frac{\partial A_1}{\partial y}\right)dx\wedge dy+\left(\frac{\partial A_3}{\partial y}-\frac{\partial A_2}{\partial z}\right)dy\wedge dz+\left(\frac{\partial A_1}{\partial z}-\frac{\partial A_3}{\partial x}\right)dz\wedge dx=$$

$$F=(E_1dx+E_2dy+E_3dz)\wedge dt+B_1dy\wedge dz+B_2dz\wedge dx+B_3dx\wedge dy$$

Επομένως η ισότητα $F=dA$ ισχύει όταν ισχύουν οι σχέσεις

$$E_1=-\frac{\partial A_1}{\partial t}+\frac{\partial A_0}{\partial x}\qquad E_2=-\frac{\partial A_2}{\partial t}+\frac{\partial A_0}{\partial y}\qquad E_3=-\frac{\partial A_3}{\partial t}+\frac{\partial A_0}{\partial z}$$

$$B_1=\frac{\partial A_3}{\partial y}-\frac{\partial A_2}{\partial z}\qquad B_2=\frac{\partial A_1}{\partial z}-\frac{\partial A_3}{\partial x}\qquad B_3=\frac{\partial A_2}{\partial x}-\frac{\partial A_1}{\partial y}$$

Η παραπάνω σχέσεις είναι οι γνωστές σχέσεις

$$\vec{B}=\vec{\nabla}\times\vec{A}\qquad\qquad \vec{E}=-\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}-\vec{\nabla}\varphi$$

όπου $A_0=-\varphi$ και $\vec{A}=(A_1,A_2,A_3)$.

Ορίζουμε τώρα τους ακόλουθους τανυστές του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου. Οι δείκτες μ, ν παίρνουν τις τιμές $0,1,2,3$ και συμβολίζονται και στην διεθνή βιβλιογραφία με Ελληνικούς χαρακτήρες.

$$F_{\mu\nu}=\begin{pmatrix}0 & E_1 & E_2 & E_3\\ -E_1 & 0 & -B_3 & B_2\\ -E_2 & B_3 & 0 & -B_1\\ -E_3 & -B_2 & B_1 & 0\end{pmatrix}\qquad \tilde{F}_{\mu\nu}=\begin{pmatrix}0 & -B_1 & -B_2 & -B_3\\ B_1 & 0 & -E_3 & E_2\\ B_2 & E_3 & 0 & -E_1\\ B_3 & -E_2 & E_1 & 0\end{pmatrix}$$

Φαίνεται αμέσως ότι ο τανυστής $\tilde{F}$ προκύπτει από τον F με την αντικατάσταση $\vec{B}\to\vec{E}$ και $\vec{E}=-\vec{B}$.

Η πρώτη μήτρα από τις παραπάνω σχέσεις γράφεται

$$F_{\mu\nu} = \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} - \frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu}$$

Έχουμε χρησιμοποιήσει τον συμβολισμό x^0, x^1, x^2, x^3 για τα t, x, y, z αντιστοίχως (c=1). Είναι εύκολο να δούμε ότι ο τανυστής $F_{\mu\nu}$ ικανοποιεί την σχέση

$$\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x^\kappa} + \frac{\partial F_{\nu\kappa}}{\partial x^\mu} + \frac{\partial F_{\kappa\mu}}{\partial x^\nu} = 0$$

Οι μορφές F, F^* και A γράφονται

$$F = -\frac{1}{2}F_{\mu\nu}dx^\mu \wedge dx^\nu \qquad F^* = -\frac{1}{2}\tilde{F}_{\mu\nu}dx^\mu \wedge dx^\nu \qquad\qquad A = \mathrm{A}_\mu dx^\mu$$

όπου εννοείται ότι υπάρχει άθροισμα ως προς κάθε επαναλαμβανόμενο δείκτη.

Θα υπολογίσουμε τώρα τις εκφράσεις $dF = 0$ και $dF^* = J$.

Παραγωγίζουμε την F παραλείποντας τους μηδενικούς όρους και βρίσκουμε

$$dF = (dE_1 dx + dE_2 dy + dE_3 dz)\wedge dt + dB_1 dy\wedge dz + dB_2 dz\wedge dx + dB_3 dx\wedge dy$$

$$= \left(\frac{\partial E_1}{\partial y}dy + \frac{\partial E_1}{\partial z}dz\right)\wedge dx\wedge dt + \left(\frac{\partial E_2}{\partial x}dx + \frac{\partial E_2}{\partial z}dz\right)\wedge dy\wedge dt +$$

$$\left(\frac{\partial E_3}{\partial x}dx + \frac{\partial E_3}{\partial y}dy\right)\wedge dz\wedge dt + \left(\frac{\partial B_1}{\partial x}dx + \frac{\partial B_1}{\partial t}dt\right)\wedge dy\wedge dz +$$

$$\left(\frac{\partial B_2}{\partial y}dy + \frac{\partial B_2}{\partial t}dt\right)\wedge dz\wedge dx + \left(\frac{\partial B_3}{\partial z}dz + \frac{\partial B_3}{\partial t}dt\right)\wedge dx\wedge dy =$$

$$\frac{\partial E_1}{\partial y}dy\wedge dx\wedge dt + \frac{\partial E_1}{\partial z}dz\wedge dx\wedge dt + \frac{\partial E_2}{\partial x}dx\wedge dy\wedge dt + \frac{\partial E_2}{\partial z}dz\wedge dy\wedge dt +$$

$$\frac{\partial E_3}{\partial x}dx\wedge dz\wedge dt + \frac{\partial E_3}{\partial y}dy\wedge dz\wedge dt + \frac{\partial B_1}{\partial x}dx\wedge dy\wedge dz + \frac{\partial B_1}{\partial t}dt\wedge dy\wedge dz +$$

$$\frac{\partial B_2}{\partial y}dy\wedge dz\wedge dx + \frac{\partial B_2}{\partial t}dt\wedge dz\wedge dx + \frac{\partial B_3}{\partial z}dz\wedge dx\wedge dy + \frac{\partial B_3}{\partial t}dt\wedge dx\wedge dy =$$

$$\left(\frac{\partial E_2}{\partial x}-\frac{\partial E_1}{\partial y}+\frac{\partial B_3}{\partial t}\right)\wedge dx\wedge dy\wedge dt+\left(\frac{\partial E_1}{\partial z}-\frac{\partial E_3}{\partial x}+\frac{\partial B_2}{\partial t}\right)\wedge dz\wedge dx\wedge dt+$$
$$\left(\frac{\partial E_3}{\partial y}-\frac{\partial E_2}{\partial z}+\frac{\partial B_1}{\partial t}\right)\wedge dy\wedge dz\wedge dt+\left(\frac{\partial B_1}{\partial x}+\frac{\partial B_2}{\partial y}+\frac{\partial B_3}{\partial z}\right)\wedge dx\wedge dy\wedge dz$$

Επομένως είναι φανερό ότι η σχέση $dF=0$ συνεπάγεται τις ακόλουθες σχέσεις του Μάξγουελ του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου.

$$\vec{\nabla}\times\vec{E}+\frac{\partial\vec{B}}{dt}=0 \qquad \vec{\nabla}\cdot\vec{B}=0$$

Παραγωγίζουμε τέλος την F^*. Δεν θα επαναλάβουμε τις πράξεις κάνουμε απλώς τις αντικαταστάσεις $\vec{B}\to\vec{E}$ και $\vec{E}=-\vec{B}$.

Το αποτέλεσμα είναι

$$dF^*=(-dB_1dx-dB_2dy-dB_3dz)\wedge dt+dE_1dy\wedge dz+dE_2dz\wedge dx+dE_3dx\wedge dy$$
$$\left(-\frac{\partial B_2}{\partial x}+\frac{\partial B_1}{\partial y}+\frac{\partial E_3}{\partial t}\right)\wedge dx\wedge dy\wedge dt+\left(-\frac{\partial B_1}{\partial z}+\frac{\partial B_3}{\partial x}+\frac{\partial E_2}{\partial t}\right)\wedge dz\wedge dx\wedge dt$$
$$+\left(-\frac{\partial B_3}{\partial y}+\frac{\partial B_2}{\partial z}+\frac{\partial E_1}{\partial t}\right)\wedge dy\wedge dz\wedge dt+\left(\frac{\partial E_1}{\partial x}+\frac{\partial E_2}{\partial y}+\frac{\partial E_3}{\partial z}\right)\wedge dx\wedge dy\wedge dz$$

Επομένως είναι φανερό ότι η σχέση $dF^*=J$ συνεπάγεται τις ακόλουθες μη ομογενείς εξισώσεις του Μάξγουελ του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου.

$$-\vec{\nabla}\times\vec{B}+\frac{\partial\vec{E}}{dt}=\vec{J}=(j_1,j_2,j_3) \qquad \vec{\nabla}\cdot\vec{E}=\rho$$

Τέλος επειδή ισχύει η σχέση

$$dJ=d(dF^*)=d^2F^*=0$$

βρίσκουμε παραλείποντας πάλι τους μηδενικούς όρους

$$dJ=(dj_1dy\wedge dz+dj_2dz\wedge dx+dj_3dx\wedge dy)\wedge dt-d\rho dx\wedge dy\wedge dz=$$
$$\left(\frac{\partial j_1}{\partial x}dx\wedge dy\wedge dz+\frac{\partial j_2}{\partial y}dy\wedge dz\wedge dx+\frac{\partial j_3}{\partial z}dz\wedge dx\wedge dy\right)\wedge dt-$$
$$\frac{\partial\rho}{\partial t}dt\wedge dx\wedge dy\wedge dz=\left(\frac{\partial j_1}{\partial x}+\frac{\partial j_2}{\partial y}+\frac{\partial j_3}{\partial z}+\frac{\partial\rho}{\partial t}\right)\wedge dx\wedge dy\wedge dz\wedge dt=0$$

η οποία οδηγεί προφανώς στην εξίσωση συνεχείας.

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{J}+\frac{\partial\rho}{\partial t}=0$$

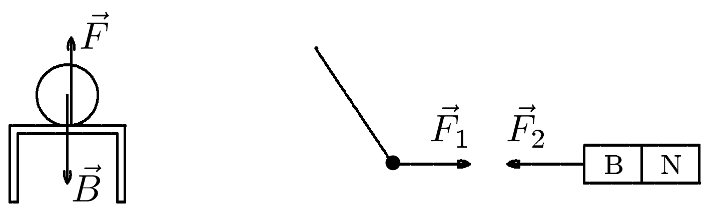
Κεφάλαιο 2

Μ Η Χ Α Ν Ι Κ Η

2.1 Στατική

Η Στατική είναι ο κλάδος της μηχανικής που εξετάζει τις δυνάμεις που ασκούνται στα σώματα και τις συνθήκες ισορροπίας τους. Οι βάσεις της έχουν τεθεί από τον Αρχιμήδη ο οποίος είναι και ο θεμελιωτής της θεωρητικής μηχανικής.

Ορισμός: Δύναμη είναι το αίτιο που προκαλεί την μεταβολή της κινήσεως ενός υλικού σημείου. Σαν υλικό σημείο θεωρούμε ένα σημείο στον τριδιάστατο Ευκλείδειο χώρο $\Re^3$, πού έχει πεπερασμένη μάζα. Αν η δύναμη εξασκείται σε ένα σώμα μπορεί να προκαλέσει όχι μόνο την μετακίνηση του αλλά και την παραμόρφωση του.



Σχήμα 2.1
Οι δυνάμεις εμφανίζονται ανά ζεύγη, δράση - αντίδραση

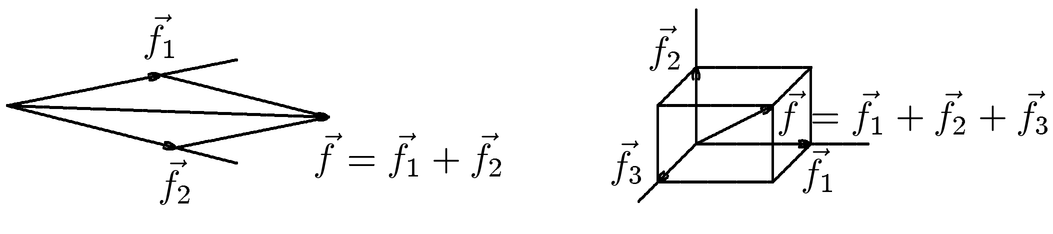
Οι περισσότερο γνωστές δυνάμεις είναι εκείνες που εξασκούνται από ένα σώμα σε ένα άλλο με το οποίο βρίσκεται σε επαφή. Οι δυνάμεις τριβής για παράδειγμα. Εκτός όμως από τις δυνάμεις αυτές υπάρχουν και δυνάμεις που εξασκούνται χωρίς τα δύο σώματα να έρχονται σε επαφή. Για παράδειγμα οι ηλεκτρομαγνητικές δυνάμεις και οι δυνάμεις βαρύτητας. Δυο μαγνήτες έλκονται ή απωθούνται μεταξύ του χωρίς τα δύο σώματα να έρχονται σε επαφή.

Όταν ένα υλικό σημείο A ασκεί σε ένα άλλο υλικό σημείο B μία δύναμη $\vec{F}$ τότε και το Β ασκεί στο Α μια ίση και αντίθετη δύναμη. Οι δυνάμεις δηλαδή εμφανίζονται στην φύση ανά ζεύγη. Οι δύο αυτές ίσες και αντίθετες δυνάμεις εξασκούνται σε διαφορετικά υλικά σημεία. Η πρόταση αυτή διατυπώθηκε από τον Νεύτωνα και είναι γνωστή σαν αξίωμα της δράσεως και αντιδράσεως.

Από την εμπειρίας μας γνωρίζουμε ότι οι δυνάμεις μπορούν να προστεθούν και να αναλυθούν σε συνιστώσες όπως όλα τα διανύσματα. Η δύναμη είναι μέγεθος διανυσματικό έχει δηλαδή μέτρο, φορά και διεύθυνση. Για να ορίσουμε την δύναμη και ποσοτικά χρειαζόμαστε ένα πρότυπο μέτρο το οποίο θεωρούμε σαν μονάδα. Ένα τέτοιο μέτρο για το τεχνικό σύστημα για παράδειγμα είναι το χιλιόγραμμο βάρους Kgr*(kp). Για να προσδιορίσουμε ποσοτικά τις δυνάμεις χρησιμοποιούμε ειδικά όργανα τα δυναμόμετρα.

Εάν δύο δυνάμεις επιδρούν επί ενός υλικού σημείου, τότε είναι δυνατόν να τις αντικαταστήσουμε με μία τρίτη που προκαλεί το ίδιο αποτέλεσμα. Η τρίτη αυτή δύναμη είναι η διαγώνιος του παραλληλογράμμου που σχηματίζεται από τις δύο δυνάμεις (κανόνας του παραλληλογράμμου). Η αντικατάσταση αυτή των δυνάμεων με μία τρίτη την συνισταμένη τους ονομάζεται σύνθεση των συνιστωσών δυνάμεων.

Για να συνθέσουμε πολλές δυνάμεις εφαρμόζουμε τον κανόνα του παραλληλογράμμου για δύο δυνάμεις. Την συνισταμένη των δύο αυτών δυνάμεων την συνθέτουμε με μία τρίτη και η διαδικασία συνεχίζεται μέχρι να τελειώσουν όλες οι δυνάμεις που θέλουμε να συνθέσουμε.



Σχήμα 2.2
Ανάλυση και σύνθεση δυνάμεων

Η αντίστροφη διαδικασία δηλαδή η αντικατάσταση μιας δυνάμεως με δύο άλλες ονομάζεται ανάλυση δυνάμεων σε δύο συνιστώσες. Για την ανάλυση μιας δυνάμεως σε δύο συνιστώσες σχεδιάζουμε παραλληλόγραμμο του οποίου η διαγώνιος να είναι η δοθείσα δύναμη. Είναι προφανές ότι έχουμε άπειρες επιλογές. Η επιλογή των φορέων των συνιστωσών δυνάμεως εξαρτάται από την φύση του προβλήματος.

Είναι επίσης πιθανόν να θέλουμε να αναλύσουμε μια δύναμη σε τρεις συνιστώσες. Στην περίπτωση αυτή η δύναμη θα είναι η διαγώνιος του παραλληλεπιπέδου που σχηματίζεται από τις τρεις ζητούμενες συνιστώσες.

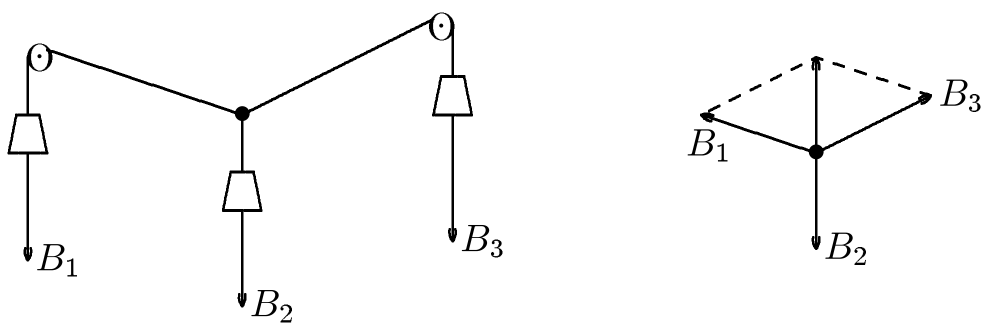
Δύο ή περισσότερες δυνάμεις που εξασκούνται σε ένα υλικό σημείο, ισορροπούν όταν η συνισταμένη τους είναι ίση με το μηδέν.

$$\sum \vec{F} = 0$$

Για να εφαρμόσουμε τη σχέση αυτή είναι συνήθως βολικό να αναλύσουμε τις δυνάμεις σε ορθογώνιες συνιστώσες. Διαλέξουμε τρεις άξονες x, y, z που σχηματίζουν ένα δεξιόστροφο τρισορθογώνιο σύστημα αξόνων με κέντρο το υλικό σημείο. Αναλύουμε τις δυνάμεις ως προς το σύστημα αυτό και εκφράζουμε την συνθήκη ισορροπίας με τις ακόλουθες τρεις εξισώσεις.

$$\sum \vec{F}_x = 0 \qquad \sum \vec{F}_y = 0 \qquad \sum \vec{F}_z = 0$$

Η συνθήκη ισορροπίας μπορεί να διατυπωθεί και με την εξής πρόταση. Ένα υλικό σημείο στο οποίο εξασκούνται οι δυνάμεις $\vec{F}$ ισορροπεί τότε και μόνο τότε όταν οι δυνάμεις αποτελούν τις πλευρές ενός κλειστού πολυγώνου.



Σχήμα 2.3
Οι τρεις δυνάμεις ισορροπούν

Στην περίπτωση που οι δυνάμεις επιδρούν πάνω σε ένα υλικό σώμα και οι προεκτάσεις των φορέων τους τέμνονται σε ένα σημείο τότε η δράση των δυνάμεων μεταφέρεται στο κοινό σημείο τομής. Υποθέτουμε ότι το σώμα δεν παραμορφώνεται. Οι δυνάμεις αυτές φαίνεται να επιδρούν σε ένα υλικό σημείο. Το σημείο αυτό είναι το σημείο τομής των φορέων των δυνάμεων με μάζα ίση με την μάζα του σώματος. Οι δυνάμεις που επιδρούν σε ένα σώμα συμπεριφέρονται σαν ολισθαίνοντα διανύσματα.

Σε ένα σώμα είναι δυνατόν να επιδρούν δυνάμεις που οι φορείς τους δεν διέρχονται από ένα σημείο. Για να βρούμε τις συνθήκες ισορροπίες ενός τέτοιου σώματος πρέπει να ορίσουμε ένα νέο μέγεθος, την ροπή της δυνάμεως. Ροπή είναι η τάση που έχει μια δύναμη για να περιστρέψει ένα σώμα. Διακρίνουμε την ροπή δυνάμεως ως προς κάποιο σημείο και την ροπή δυνάμεως ως προς κάποιον άξονα.

Ορισμός: Ροπή δυνάμεως ως προς κάποιο σημείο. Θεωρούμε μια δύναμη $\vec{F}$ και ένα σημείο O. Η Ροπή της δυνάμεως $\vec{F}$ ως προς σημείο O ορίζεται σαν το εξωτερικό γινόμενο του διανύσματος θέσεως $\vec{r}$, και της δυνάμεως $\vec{F}$.

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$

Η ροπή έχει εξ ορισμού διεύθυνση κάθετη και στο διάνυσμα $\vec{r}$ και στο διάνυσμα $\vec{F}$. Είναι δηλαδή κάθετη στο επίπεδο που ορίζουν η δύναμη $\vec{F}$ και το σημείο O. Η φορά της ορίζεται από τον κανόνα του δεξιόστροφου κοχλία. Αν τοποθετήσουμε μια (δεξιόστροφη) βίδα στην διεύθυνση της ροπής αυτή θα προχωρήσει κατά την φορά της ροπής όταν την βιδώσουμε κατά την φορά της δυνάμεως.

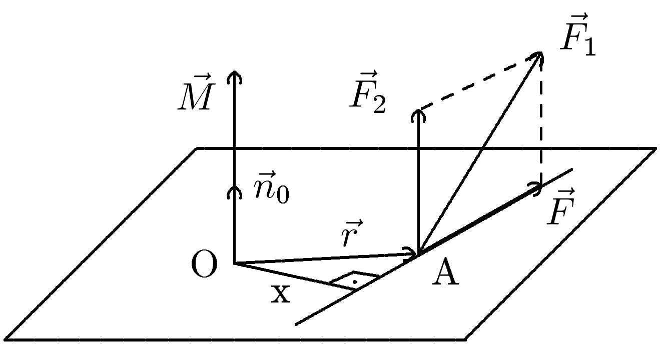
Αν αντιστρέψουμε τους άξονες αναφοράς τα διανύσματα αλλάζουν σημείο. Αντίθετα η ροπή παραμένει αναλλοίωτος. Ένα τέτοιο μέγεθος ονομάζεται αξονικό διάνυσμα ή ψευδοδιάνυσμα. Η ροπή είναι ένα ψευδοδιάνυσμα.

Το μέτρο της ροπής είναι ίσο με το μέτρο της δυνάμεως επί την κάθετη απόσταση της από το σημείο O.

$$\|\vec{M}\| = \|\vec{r} \times \vec{F}\| = \|\vec{r}\|\|\vec{F}\| \,\text{ημ}\, \varphi = \|\vec{F}\| \cdot x$$

Προφανώς η ροπή δεν μεταβάλλεται αν το διάνυσμα της δυνάμεως μετακινηθεί πάνω στον φορέα της.

Είναι φανερό ότι το άθροισμα των ροπών πολλών δυνάμεων που βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο ως προς κάποιο σημείο του επιπέδου είναι ίση με την ροπή της συνισταμένης τους ως προς το σημείο αυτό.



Σχήμα 2.4
Η ροπή δυνάμεως ως προς άξονα

Ορισμός: Ροπή δυνάμεως ως προς κάποιο άξονα. Θεωρούμε έναν άξονα και μια δύναμη $\vec{F}$ που βρίσκεται πάνω σε ένα επίπεδο κάθετο στον άξονα. Ορίζουμε ροπή της δυνάμεως $\vec{F}$ ως προς τον άξονα ένα διάνυσμα με μέτρο ίσο με το μέτρο της δυνάμεως επί την απόσταση. Ο φορέας της ροπής αυτής είναι ο άξονας. Η φορά της βρίσκεται πάλι με τον κανόνα του δεξιόστροφου κοχλία.

Ορισμός: Υποθέτουμε τώρα ότι η δύναμη δεν βρίσκεται πάνω σε κάθετο επίπεδο προς τον άξονα. Έστω $\vec{F}_1$ η δύναμη αυτή. Αναλύουμε την δύναμη $\vec{F}_1$ σε μία συνιστώσα $\vec{F}$ που βρίσκεται πάνω σε κάθετο επίπεδο και σε μία $\vec{F}_2$ κάθετη στο επίπεδο αυτό και παράλληλη προς τον άξονα. Ορίζουμε σαν ροπή της δυνάμεως $\vec{F}_1$ ως προς τον άξονα την ροπή της $\vec{F}$. Η δύναμη $\vec{F}_2$ είναι παράλληλη προς τον άξονα περιστροφής και άρα η ροπή της είναι μηδέν. Αν $\vec{n}_0$ είναι το μοναδιαίο διάνυσμα κατά την διεύθυνση του άξονα τότε η ροπή της δυνάμεως ως προς τον άξονα αυτόν δίνεται από την σχέση

$$\vec{M}_{\vec{F}_1} = \vec{M}_{\vec{F}} = \vec{r} \times \vec{F} = (\vec{r} \times \vec{F} \cdot \vec{n}_0)\vec{n}_0 = (\vec{r} \times \vec{F}_1 \cdot \vec{n}_0)\vec{n}_0$$

Σε ένα υλικό σώμα εξασκούνται πολλές ασύμβατες ή μη δυνάμεις. Μπορούμε το σύστημα αυτό των δυνάμεων να το αντικαταστήσουμε με μία συνισταμένη δύναμη και μία συνισταμένη ροπή. Για να ισορροπεί ένα σύστημα δυνάμεων που ενεργούν σε ένα στερεό σώμα, πρέπει η συνισταμένη δύναμη και η συνισταμένη ροπή ως προς οποιοδήποτε σημείο ή άξονα να είναι ίσες με το μηδέν.

$$\sum \vec{F} = 0 \qquad \sum \vec{M} = 0$$

Συνήθως για να λύσουμε ένα πρόβλημα στατικής αναλύουμε τις δυνάμεις σε τρεις ορθογώνιες συνιστώσες. Αν $\vec{F}_x$, $\vec{F}_y$ και $\vec{F}_z$ είναι οι συνιστώσες αυτές και $\vec{M}_x$, $\vec{M}_y$ και $\vec{M}_z$ οι αντίστοιχες ροπές τους ως προς οποιοδήποτε άξονα ή σημείο, τότε οι συνθήκες ισορροπίας γράφονται.

$$\sum \vec{F}_x = 0 \qquad \sum \vec{F}_y = 0 \qquad \sum \vec{F}_z = 0$$

$$\sum \vec{M}_x = 0 \qquad \sum \vec{M}_y = 0 \qquad \sum \vec{M}_z = 0$$

Ορισμός: Κέντρο βάρους ενός σώματος ονομάζεται το σταθερό σημείο από το οποίο διέρχεται ο φορέας του βάρους του σώματος αν το περιστρέψουμε καθ' οποιονδήποτε τρόπο. Το κέντρο βάρος του σώματος είναι δυνατόν να βρίσκεται έξω από το σώμα.

Αν έχουμε ένα σώμα που αποτελείται από n υλικά σημεία που βρίσκονται στις θέσεις $\vec{r}_1 = (x_1, y_1, z_1), \cdots, \vec{r}_n = (x_n, y_n, z_n)$ με μάζες $(m_1, \cdots, m_n)$, τότε οι συντεταγμένες $\vec{R} = (X, Y, Z)$ του κέντρου μάζας δίνονται από τις σχέσεις

$$X = \frac{\sum_i m_i x_i}{\sum_i m_i} \qquad Y = \frac{\sum_i m_i y_i}{\sum_i m_i} \qquad Z = \frac{\sum_i m_i z_i}{\sum_i m_i}$$

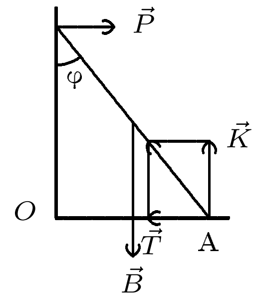
Αν έχουμε ένα σώμα με μάζα που δίνεται από το διανυσματικό πεδίο $\rho(\vec{r}, t)$, που ονομάζεται πυκνότητα μάζας, τότε το κέντρο μάζας του δίνεται πάλι από τους παραπάνω τύπους μόνο που τα αθροίσματα μετατρέπονται σε ολοκληρώματα. Για παράδειγμα αν ένα σώμα έχει την μορφή του τόξου c με πυκνότητα ρ τότε οι τύποι γράφονται

$$\vec{R} = \frac{1}{m}\int_c \rho \vec{r} ds \qquad m = \int_c \rho ds$$

που είναι επικαμπύλια ολοκληρώματα.

Για τα σώματα που έχουν απλό γεωμετρικό σχήμα το κέντρο μάζας τους έχει ορισμένη θέση που εξαρτάται από το σχήμα και την συμμετρία τους. Για παράδειγμα το κέντρο μάζας μιας επιπέδου τριγωνικής επιφάνειας συμπίπτει με την κοινή τομή των τριών διαμέσων, ενώ το κέντρο μάζας της περιμέτρου ενός τριγώνου συμπίπτει με το σημείο τομής των διχοτόμων του τριγώνου που έχει κορυφές τα μέσα των πλευρών του δοθέντος τριγώνου.

Εφαρμογή: Μία σκάλα ισορροπεί ακουμπισμένη σε ένα κατακόρυφο τοίχο. Να υπολογιστούν οι δυνάμεις που ενεργούν στην σκάλα. Η τριβή που εξασκεί ο τοίχος στην σκάλα θεωρείται αμελητέα.



Σχήμα 2.5
Η σκάλα ισορροπεί στον κατακόρυφο τοίχο

Λύση: Στη σκάλα υπάρχουν τρεις δυνάμεις. Το βάρος της $\vec{B}$ με διεύθυνση κατακόρυφα προς τα κάτω. Η δύναμη $\vec{P}$ από τον κατακόρυφο τοίχο που είναι κάθετη προς τον τοίχο επειδή δεν υπάρχει τριβή. Μία δύναμη από το έδαφος που έχει αναλυθεί σε δύο συνιστώσες. Την δύναμη $\vec{K}$ και την δύναμη τριβής $\vec{T}$. Δεδομένου ότι η σκάλα ισορροπεί οι συνθήκη ισορροπίας $\sum \vec{F} = 0$ ως προς τον οριζόντιο και κατακόρυφο άξονα δίνει αντιστοίχως τις εξισώσεις

$$T - P = 0 \qquad \text{και} \qquad K - B = 0$$

Κατόπιν θα εφαρμόσουμε την συνθήκη ισορροπίας $\sum \vec{M} = 0$ των ροπών ως προς το A, το σημείο επαφής δηλαδή της σκάλας με το έδαφος. Αν L είναι το μήκος της σκάλας, και φ η γωνία που σχηματίζει με τον τοίχο, έχουμε

$$-P \cdot L \cdot \text{συν}\,\varphi + \text{B} \cdot \frac{L}{2} \cdot \text{ημ}\,\varphi = 0$$

Η λύση των δύο παραπάνω εξισώσεων δίνει τελικά τις ζητούμενες δυνάμεις. Βρίσκουμε

$$T = \frac{B}{2}\,\text{εφ}\,\varphi, \qquad K = B, \qquad P = \frac{B}{2}\,\text{εφ}\,\varphi$$

Παρατήρηση: Αν δεν υπήρχαν οι δυνάμεις τριβής καμία σκάλα δεν θα μπορούσε να ισορροπήσει στην θέση αυτή.

2.2 Κινηματική

Ορισμός: Ένα υλικό σημείο θα λέμε ότι κινείται όταν αλλάζει θέση ως προς κάποιο σύστημα συντεταγμένων, που το θεωρούμε ακίνητο. Όλες οι κινήσεις είναι σχετικές κινήσεις και κίνηση που δεν αναφέρεται το σύστημα αναφοράς δεν έχει έννοια στην Φυσική. Η κινηματική εξετάζει τις κινήσεις στον χώρο χωρίς να εξετάζει το αίτιο που τις προκαλεί.

Η θέση ενός υλικού σημείου στον χώρο καθορίζεται σε κάθε χρονική στιγμή από ένα διάνυσμα $\vec{r}(t)$, που ονομάζεται διάνυσμα θέσεως του κινητού. Οι συνιστώσες του διανύσματος θέσεως σε καρτεσιανές συντεταγμένες είναι

$$x = x(t), \qquad y = y(t), \qquad z = z(t)$$

Οι συναρτήσεις αυτές ονομάζονται παραμετρικές εξισώσεις της τροχιάς με παράμετρο τον χρόνο t. Η κίνηση είναι δεδομένη αν οριστούν οι τρεις αυτές συναρτήσεις. Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι το κινητό έχει τρεις βαθμούς ελευθερίας. Ένα υλικό σημείο είναι δυνατό να υπόκειται σε κάποιους δεσμούς και έτσι να έχει δύο βαθμούς ελευθερίας ή ακόμα και έναν βαθμό ελευθερίας. Βαθμός ελευθερίας μιας κινήσεως είναι ο μικρότερος αριθμός δεδομένων που απαιτείται ώστε να οριστεί πλήρως η κίνηση.

Όταν το υλικό σημείο κινείται οι συντεταγμένες του μεταβάλλονται σαν συναρτήσεις του χρόνου, οπότε το σημείο θα διαγράφει μια καμπύλη στο χώρο που ονομάζεται τροχιά του κινητού. Θα θεωρήσουμε ότι η συνάρτηση $\vec{r}(t)$ έχει συνεχείς παραγώγους μέχρι δεύτερη τάξη.

$$\vec{r}(t) \in C^2(\Re) \qquad t \in I = [\alpha, \beta]$$

Αν απαλείψουμε τον χρόνο από τις τρεις παραμετρικές εξισώσεις της τροχιάς παίρνουμε τις εξισώσεις της τροχιάς του κινητού με την μορφή

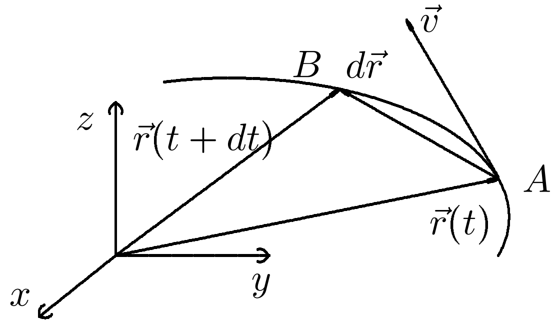
$$y = y(x) \qquad z = z(x)$$

Έστω ότι ένα κινητό βρίσκεται στην θέση Α με διάνυσμα θέσεως $\vec{r}(t)$ τη χρονική στιγμή t. Μετά από χρόνο dt το υλικό σημείο έχει μετακινηθεί στην θέση Β με διάνυσμα θέσεως $\vec{r}(t+dt)$. Το διάνυσμα θέσεως έχει μεταβληθεί κατά $d\vec{r} = \vec{r}(t+dt) - \vec{r}(t)$.

Ορισμός: Ταχύτητα ενός κινητού ορίζεται το διάνυσμα

$$\vec{\upsilon} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \left(\frac{dx(t)}{dt}, \ \frac{dy(t)}{dt}, \ \frac{dz(t)}{dt} \right)$$

Η μονάδα του μεγέθους αυτού είναι το $1cm/sec$ στο σύστημα C.G.S. ή το 1 m/sec στο διεθνές σύστημα.



Σχήμα 2.6
Η ταχύτητα είναι εφαπτομενική της τροχιάς.

Η διεύθυνση του διανύσματος αυτού συμπίπτει με την διεύθυνση του $d\vec{r}$. Στο όριο $dt \to 0$ το σημείο A τείνει να συμπέσει με το B και άρα η ταχύτητα συμπίπτει με τη εφαπτομένη της τροχιάς στο σημείο A.

Εφαρμογή: Ένα κινητό βρίσκεται την χρονική στιγμή $t = 0$ σε ένα σημείο με διάνυσμα θέσεως $\vec{r}(t) = \vec{r}(0) = \vec{r}_0$. Αν η ταχύτητα του είναι σταθερή $\vec{\upsilon}(t) = \vec{\upsilon} =$ σταθερή τότε η τροχιά του βρίσκεται αν λύσουμε το ακόλουθο πρόβλημα αρχικών τιμών.

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \upsilon = \text{σταθερή} \qquad\qquad \vec{r}(t)|_{t=0} = \vec{r}(0) = \vec{r}_0$$

Η λύση βρίσκεται αν ολοκληρώσουμε την διαφορική εξίσωση και προσδιορίσουμε μετά τις σταθερές από την αρχική συνθήκη. Βρίσκουμε

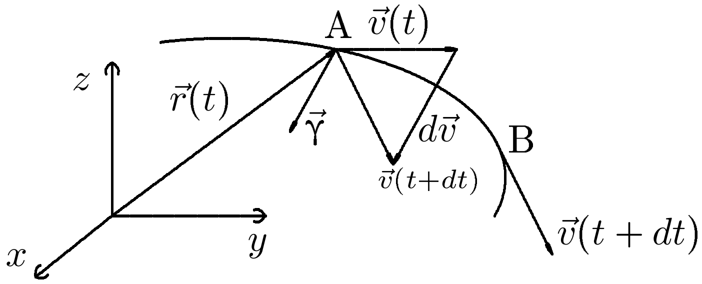
$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{\upsilon}\, t$$

Οι συντεταγμένες του διανύσματος θέσεως είναι

$$x(t) = x_0 + \upsilon_x t, \qquad y(t) = y_0 + \upsilon_y t, \qquad z(t) = z_0 + \upsilon_z t$$

Η τροχιά του κινητού που κινείται με σταθερή ταχύτητα είναι μία ευθεία γραμμή. Μια τέτοια κίνηση ονομάζεται ευθύγραμμη ομαλή κίνηση.

Έστω ότι ένα κινητό βρίσκεται στην θέση Α με ταχύτητα $\vec{\upsilon}(t)$ τη χρονική στιγμή t. Μετά από χρόνο dt το υλικό σημείο έχει μετακινηθεί στην θέση Β με ταχύτητα $\vec{\upsilon}(t+dt)$. Το διάνυσμα της ταχύτητας έχει μεταβληθεί κατά $d\vec{\upsilon} = \vec{\upsilon}(t+dt) - \vec{\upsilon}(t)$.



Σχήμα 2.7
Η επιτάχυνση είναι παράλληλη στο διάνυσμα $d\vec{v}$

Ορισμός: Επιτάχυνση ενός κινητού ορίζεται το διάνυσμα

$$\vec{\gamma} = \frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = \left(\frac{d\upsilon_x(t)}{dt},\ \ \frac{d\upsilon_y(t)}{dt},\ \ \frac{d\upsilon_z(t)}{dt} \right)$$

Η μονάδα του μεγέθους είναι το $1cm/sec^2$ στο σύστημα C.G.S. ή το $1\ m/sec^2$ στο διεθνές σύστημα.

Η διεύθυνση του διανύσματος αυτού συμπίπτει με την διεύθυνση του $d\vec{\upsilon}$. Η επιτάχυνση είναι η δεύτερη παράγωγος του διανύσματος θέσεως του υλικού σημείου ως προς τον χρόνο.

$$\vec{\gamma}(t) = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right) = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$

Την αρνητική επιτάχυνση την ονομάζουμε επιβράδυνση.

Πολλές φορές χρησιμοποιούμε τελείες για να συμβολίσουμε τις παραγώγους ως προς τον χρόνο. Για παράδειγμα

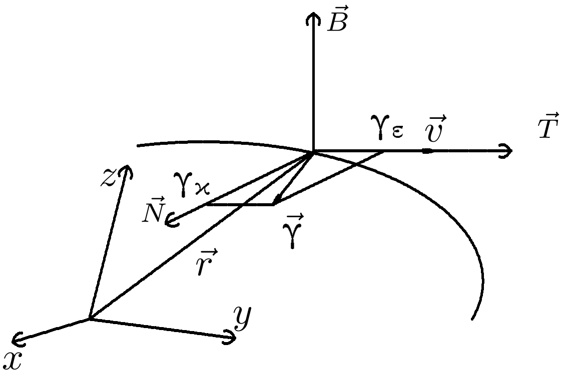
$$\dot{\vec{r}} = \frac{d\vec{r}}{dt}, \qquad \dot{\vec{\upsilon}} = \frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \ddot{\vec{r}}$$

Μπορούμε να θεωρήσουμε ένα ορθογώνιο σύστημα αξόνων που κινείται με το υλικό σημείο. Το σύστημα αυτό ορίζεται από το εφαπτομενικό διάνυσμα $\vec{T}$, την πρώτη κάθετο $\vec{\mathrm{N}}$ και την δεύτερη κάθετο στη τροχιά $\vec{B}$. Αν με

s συμβολίσουμε το μήκος του τόξου τότε τα τρία αυτά διανύσματα δίνονται από τις σχέσεις

$$\vec{\mathrm{T}} = \frac{d\vec{r}}{ds}, \qquad \vec{\mathrm{N}} = R\frac{d\vec{T}}{ds}, \qquad \vec{\mathrm{B}} = \vec{\mathrm{T}} \times \vec{N}$$

Τα διανύσματα είναι μοναδιαία και σχηματίζουν ένα δεξιόστροφο σύστημα αξόνων. Το R ονομάζεται ακτίνα καμπυλότητας.



Σχήμα 2.8
Ανάλυση της επιταχύνσεως στο συνοδεύον τρίεδρο

Ενδιαφέρουσα για τις εφαρμογές είναι η ανάλυση της επιταχύνσεως στις εξής δύο συνιστώσες. Την εφαπτομένη επί της τροχιάς και την κάθετο σε αυτήν, που διευθύνεται προς το κοίλο της τροχιάς. Η κάθετος συνιστώσα ονομάζεται κεντρομόλος επιτάχυνση $\gamma_\varkappa$, και η εφαπτομενική ονομάζεται επιτρόχιος επιτάχυνση γ_ε. Δηλαδή

$$\vec{\gamma} = \gamma_\varepsilon \vec{T} + \gamma_\varkappa \vec{N}$$

Το διάνυσμα της ταχύτητας είναι συγραμμικό με το $\vec{\mathrm{T}}$ και επειδή το $\vec{\mathrm{T}}$ είναι μοναδιαίο έχουμε $\vec{\upsilon} = \upsilon\vec{\mathrm{T}}$, όπου υ είναι το μέτρο του διανύσματος $\vec{\upsilon}$.

Παραγωγίζουμε ως προς τον χρόνο την σχέση αυτή και έχουμε

$$\vec{\gamma} = \frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\upsilon\vec{\mathrm{T}}\right) = \frac{d\upsilon}{dt}\vec{T} + \upsilon\frac{d\vec{T}}{dt} = \frac{d\upsilon}{dt}\vec{T} + \upsilon\frac{d\vec{T}}{ds}\frac{ds}{dt} = \frac{d\upsilon}{dt}\vec{T} + \frac{\upsilon^2}{R}\vec{N}$$

και επομένως

$$\gamma_\varepsilon = \frac{d\upsilon}{dt} = \frac{d^2 s}{dt^2} \qquad \gamma_\varkappa = \frac{\upsilon^2}{R} = \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 \frac{1}{R}$$

Εφαρμογή: Ένα κινητό βρίσκεται την χρονική στιγμή $t = 0$ σε ένα σημείο με διάνυσμα θέσεως $\vec{r}(0) = \vec{r}_0$ και έχει ταχύτητα $\vec{\upsilon}(0) = \vec{\upsilon}_0$. Αν η επιτάχυνση του είναι σταθερή $\vec{\gamma}(t) = \vec{\gamma}_0 =$ σταθερή τότε η τροχιά του βρίσκεται αν λύσουμε το ακόλουθο πρόβλημα αρχικών τιμών.

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{\gamma}_0 \qquad [\vec{r}(t)]_{t=0} = \vec{r}(0) = \vec{r}_0 \qquad \left[\frac{d\vec{r}(t)}{dt}\right]_{t=0} = \vec{\upsilon}(0) = \vec{\upsilon}_0$$

Η λύση βρίσκεται αν ολοκληρώσουμε δύο φορές την διαφορική εξίσωση και προσδιορίσουμε μετά τις σταθερές από τις αρχικές συνθήκες.

Η πρώτη ολοκλήρωση δίνει την ταχύτητα

$$\vec{\gamma}_0 = \frac{d\vec{\upsilon}}{dt} \qquad \Longrightarrow \qquad \vec{\gamma}_0 dt = d\vec{\upsilon} \qquad \Longrightarrow \qquad \vec{\upsilon} = \vec{\gamma}_0 t + \vec{c}$$

Η δεύτερη των αρχικών συνθηκών δίνει την σταθερά $\vec{c}$. Έχουμε $\vec{\upsilon}(0) = \upsilon_0 = \vec{c}$. Άρα

$$\vec{\upsilon}(t) = \vec{\gamma}_0 t + \vec{\upsilon}_0$$

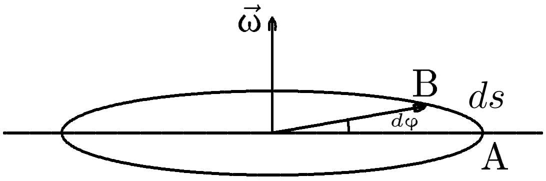
Την παραπάνω σχέση την ολοκληρώνουμε άλλη μια φορά και βρίσκουμε

$$\vec{\upsilon} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{\gamma}_0 t + \vec{\upsilon}_0 \quad \Longrightarrow \quad d\vec{r} = [\vec{\gamma}_0 t + \vec{\upsilon}_0]dt \quad \Longrightarrow \quad \vec{r}(t) = \vec{c}\,' + \vec{\upsilon}_0 t + \frac{1}{2}\vec{\gamma}_0 t^2$$

Η σταθερά υπολογίζεται από την πρώτη αρχική συνθήκη. Τελικά βρίσκουμε

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{\upsilon}_0 t + \frac{1}{2}\vec{\gamma}_0 t^2$$

Στην ιδική περίπτωση που $\vec{\gamma}_0 = 0$ η ταχύτητα είναι σταθερή και η κίνηση ευθύγραμμη.



Σχήμα 2.9
Η κίνηση σε κυκλική τροχιά

Θεωρούμε ένα υλικό σημείο που κινείται σε κυκλική τροχιά. Το κινητό βρίσκεται στην θέση Α με διάνυσμα θέσεως $\vec{r}(t)$ τη χρονική στιγμή t. Μετά από χρόνο dt το υλικό σημείο έχει μετακινηθεί στην θέση Β με διάνυσμα θέσεως $\vec{r}(t+dt)$. Η ακτίνα έχει διαγράψει την γωνία $d\varphi$.

Ορισμός: Γωνιακή ταχύτητα ενός κινητού ορίζεται το διάνυσμα $\vec{\omega}$ που έχει μέτρο

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt}$$

Η διεύθυνση του διανύσματος αυτού είναι κάθετη στο επίπεδο της τροχιάς, και η φορά του είναι η φορά προς την οποία κινείται ένας δεξιόστροφος κοχλίας όταν περιστραφεί προς την φορά της κινήσεως. Η γωνιακή ταχύτητα είναι αξονικό διάνυσμα.

Ορισμός: Γωνιακή επιτάχυνση ενός κινητού ορίζεται από διάνυσμα

$$\vec{\dot{\omega}} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}$$

Ένα υλικό σημείο που κινείται με ταχύτητα υ σε κυκλική τροχιά, μετά από χρόνο dt έχει διατρέξει διάστημα ίσο με $ds = \upsilon dt$. Το τόξο ds για μικρές γωνίες ισούται με το γινόμενο της ακτίνας επί την γωνία $d\varphi$. Δηλαδή $ds = rd\varphi$ και επομένως

$$\upsilon = \frac{ds}{dt} = r\frac{d\varphi}{dt} = \omega r$$

Η εξίσωση αυτή γράφεται διανυσματικά ως εξής

$$\vec{\upsilon} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

Μία κυκλική κίνηση ονομάζεται ομαλή όταν το μέτρο της ταχύτητας του παραμένει σταθερό και η ταχύτητα αλλάζει μόνο κατά την διεύθυνση της. Σε μία τέτοια κίνηση προφανώς η επιτρόχιος επιτάχυνση είναι μηδέν.

Θα υπολογίζουμε την κεντρομόλο επιτάχυνση. Για μικρές γωνίες το $d\upsilon$ είναι ίσο με το μήκος του τόξου και άρα $d\upsilon = \upsilon d\varphi$. Διαιρούμε με dt την σχέση αυτή και έχουμε

$$\gamma_\kappa = \upsilon\frac{d\varphi}{dt} = \upsilon\,\omega \;=\; r\,\omega^2 \;=\; \frac{\upsilon^2}{r}$$

Η κεντρομόλος επιτάχυνση είναι σταθερή.

Ορισμός: Ονομάζουμε περίοδο και συμβολίζουμε με Τ, τον χρόνο που απαιτείται για να εκτελέσει το κινητό μία πλήρη περιστροφή.

Το μέγεθος

$$\nu = \frac{1}{\mathrm{T}}$$

ονομάζεται συχνότητα.

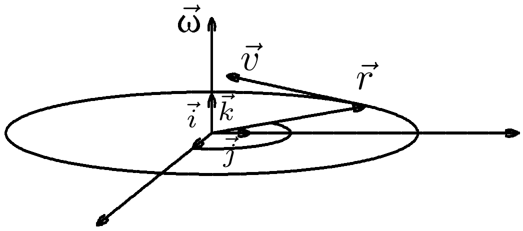
Αποδεικνύεται εύκολα ότι ισχύει η σχέση

$$\omega \;=\; 2\pi\,\nu = \frac{2\pi}{\mathrm{T}}$$

Εφαρμογή: Ένα υλικό σωμάτιο εκτελεί την τροχιά με διάνυσμα θέσεως

$$\vec{r}(t) = \text{συν}\,\omega t\vec{i} + \text{ημ}\,\omega t\vec{j}$$

να βρείτε την ταχύτητα, την επιτάχυνση και την γωνιακή ταχύτητα του κινητού.



Σχήμα 2.10
Η τροχιά του υλικού σημείου της εφαρμογής

Η ταχύτητα δίνεται από την παράγωγο του διανύσματος θέσεως.

$$\vec{\upsilon} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \left(\frac{d}{dt}\,\text{συν}\,\omega t,\ \frac{d}{dt}\,\text{ημ}\,\omega t\right) = (-\omega\,\text{ημ}\,\omega t,\ \omega\,\text{συν}\,\omega t)$$

Η ταχύτητα είναι κάθετος προς το διάνυσμα θέσεως. Πράγματι φαίνεται εύκολα ότι

$$\vec{\upsilon}\cdot\vec{r} = 0$$

Άλλη μια παραγώγηση θα δώσει την επιτάχυνση.

$$\vec{\gamma} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = \left(-\omega^2\,\text{συν}\,\omega t,\ -\omega^2\,\text{ημ}\,\omega t\right) = -\omega^2\vec{r}$$

Η επιτάχυνση έχει φορά αντίθετη προς την φορά του διανύσματος $\vec{r}$ και κατευθύνεται προς την αρχή. Το μέτρο της είναι ανάλογο του μέτρου του $\vec{r}$ δηλαδή ανάλογο της αποστάσεως από το κέντρο, με σταθερά αναλογίας ίση με ω^2.

Βρίσκουμε τέλος την γωνιακή ταχύτητα

$$\vec{\omega} = \vec{r} \times \vec{\upsilon} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \text{συν}\,\omega t & \text{ημ}\,\omega t & 0 \\ -\omega\,\text{ημ}\,\omega t & \omega\,\text{συν}\,\omega t & 0 \end{vmatrix} = \omega \left(\text{συν}^2\,\omega t + \text{ημ}^2\,\omega t\right) \vec{k} = \omega \vec{k}$$

Η γωνιακή ταχύτητα είναι ένα σταθερό διάνυσμα κάθετο στο επίπεδο της τροχιάς με μέτρο ίσο με ω. Η γωνιακή επιτάχυνση είναι ίση με μηδέν.

2.3 Μηχανική του υλικού σημείου

Ορισμός: Δυναμική είναι ο κλάδος της μηχανικής που εξετάζει τις σχέσεις μεταξύ των δυνάμεων και των κινήσεων που προκαλούν οι δυνάμεις αυτές.

Εάν $\vec{F}$ είναι η δύναμη που επιδρά σε ένα υλικό σημείο και $\vec{\gamma}$ η επιτάχυνση που προκαλείται από την δύναμη τότε ισχύει ή σχέση

$$\vec{F} \;=\; m\vec{\gamma} = m\frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$

Δηλαδή η δύναμη και η επιτάχυνση είναι μεγέθη ανάλογα με σταθερά αναλογίας την μάζα του σώματος. Η μάζα δεν εξαρτάται από τον χρόνο. Η σχέση αυτή είναι ο θεμελιώδης νόμος της μηχανικής ή νόμος του Νεύτωνα.

Αν στην σχέση αυτή θέσουμε $\vec{F} = \vec{0}$ τότε συνεπάγεται ότι $\vec{\gamma} = \vec{0}$ και άρα η ταχύτητα $\vec{\upsilon} =$ σταθερά. Η πρόταση αυτή είναι το αξίωμα της αδράνειας.

Ορισμός: Ορίζουμε το διάνυσμα της ορμής από την σχέση

$$\vec{p} = m\vec{\upsilon} = m\frac{d\vec{r}}{dt}$$

και επομένως ο νόμος του Νεύτωνα παίρνει την μορφή

$$\vec{F} = \frac{d}{dt}\vec{p}$$

Η σχέση αυτή είναι γενικότερη, γιατί περιλαμβάνει και την περίπτωση που η μάζα εξαρτάται από τον χρόνο, όπως συμβαίνει στην ειδική θεωρία της σχετικότητας (εξαρτάται από την ταχύτητα). Αν η δύναμη που ασκείται στο σώμα είναι μηδέν τότε η ορμή του παραμένει σταθερή. Η πρόταση αναφέρεται συχνά σαν το θεώρημα διατηρήσεως της ορμής.

Ένα από τα προβλήματα της δυναμικής είναι το εξής:

Δίνεται η δύναμη $\vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t)$ και ζητείται η τροχιά του σώματος. Ζητείται δηλαδή να βρεθεί ή θέση $\vec{r}(t)$ και η ταχύτητα $\vec{\upsilon}(t)$ (ή η ορμή $\vec{p} = m\vec{\upsilon}$) του υλικού σημείου σε κάθε χρονική στιγμή t.

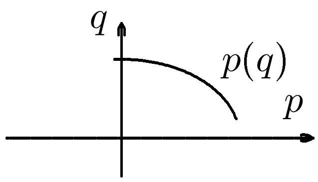
Το μαθηματικό πρόβλημα είναι να λυθεί η εξίσωση του Νεύτωνα που είναι μια διαφορική εξίσωση δευτέρας τάξεως. Η λύση περιέχει δύο αυθαίρετες σταθερές που μπορούν να προσδιοριστούν από δύο αρχικές συνθήκες που συνήθως είναι η αρχική θέση $\vec{r}(0)$ και η αρχική ταχύτητα $\vec{\upsilon}(0)$ στον χρόνο $t = 0$. Δηλαδή να λυθεί το ακόλουθο πρόβλημα αρχικών τιμών

$$\vec{F} = m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}, \qquad \vec{r}(0) = \vec{r}_0 \qquad \text{και} \qquad \vec{\upsilon}(0) = \vec{\upsilon}_0$$

Η λύση του προβλήματος δίνει την θέση και την ταχύτητα του υλικού σημείου σε παραμετρική μορφή με παράμετρο τον χρόνο t. Η κατάσταση ενός συστήματος έχει προσδιοριστεί πλήρως όταν βρεθούν η θέση και η ταχύτητα του ή η ορμή του σε κάθε χρονική στιγμή.

$$\vec{r} = \vec{r}(t) \qquad\qquad \vec{p} = \vec{p}(t)$$

Αν απαλείψουμε τον χρόνο από τις παραπάνω εξισώσεις παίρνουμε την ορμή σαν συνάρτηση της θέσεως $\vec{p} = \vec{p}(\vec{r})$. Μπορούμε να σχεδιάζουμε την συνάρτηση αυτή στον χώρο των συντεταγμένων και των ορμών, γνωστό σαν χώρο των φάσεων.



Σχήμα 2.11
Μια τροχιά στο χώρο των φάσεων

Ορισμός: Χώρος των φάσεων είναι ο Ευκλείδειος χώρος με $2n$ διαστάσεις όπου n είναι ο βαθμός ελευθερίας του συστήματος. Οι n διαστάσεις του χώρου αυτού είναι οι συντεταγμένες της θέσεως του συστήματος και οι άλλες n οι αντίστοιχες ορμές. Συμβολίζουμε πολλές φορές σαν $q_1, q_2, \cdots, q_n$ τις συντεταγμένες της θέσεως. Για ένα υλικό σημείο που κινείται στον χώρο για παράδειγμα το n είναι ίσο με 3 και ο χώρος των φάσεως είναι 6 διαστάσεων.

Για να προσδιορίσουμε την θέση ενός συστήματος με N σωμάτια στον χώρο πρέπει να ορίσουμε N διανύσματα θέσεως $\vec{r}_i, i = 1, 2, \cdots, N$. Βαθμός ελευθερίας του συστήματος είναι $3N$. Συνεπώς για N υλικά σημεία ο χώρος των φάσεων έχει διάσταση 6N.

Ορισμός: Ορίζουμε σαν στροφορμή το μέγεθος που ισούται με την ροπή της ορμής, δηλαδή

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$

Η διεύθυνση της στροφορμής είναι κάθετη στο διάνυσμα θέσεως του υλικού σημείου αλλά και προς την ταχύτητα του. Αν η κίνηση είναι επίπεδη το διάνυσμα αυτό είναι κάθετο στο επίπεδο της τροχιάς.

Έχουμε ορίσει την ροπή δυνάμεως ως προς κάποιο σημείο το εξωτερικό γινόμενο

$$\vec{\mathrm{M}} = \vec{r} \times \vec{F}$$

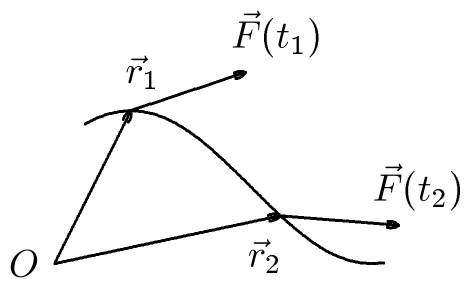
όπου $\vec{r}$ το διάνυσμα θέσεως της δυνάμεως ως προς το σημείο. Αν η δύναμη δίνεται από τον νόμο του Νεύτωνα, έχουμε

$$\vec{\mathrm{M}} = \vec{r} \times m\frac{d}{dt}\vec{\mathrm{v}} = \frac{d}{dt}\left(m\vec{r} \times \vec{\mathrm{v}}\right) = \frac{d}{dt}\left(\vec{r} \times \vec{p}\right) = \frac{d}{dt}\vec{L}$$

Άρα η ροπή που ασκείται στο σώμα είναι ίση με την παράγωγο της στροφορμής ως προς τον χρόνο. Συνεπώς αν η ροπή που ασκείται σε ένα σώμα είναι μηδέν τότε η στροφορμή είναι σταθερή. Η πρόταση αναφέρεται συχνά σαν το θεώρημα διατηρήσεως της στροφορμής.

Ορισμός: Ορίζουμε σαν διανυσματικό πεδίο μια περιοχή του χώρου που σε κάθε σημείο της αντιστοιχεί ένα διάνυσμα. Αν το διάνυσμα αυτό παριστάνει μία δύναμη έχουμε ένα δυναμικό πεδίο. Γράφουμε την δύναμη σαν συνάρτηση του διανύσματος θέσεως και του χρόνου

$$\vec{F} = \vec{F}(\vec{r}(t), t)$$



Σχήμα 2.12
Το διανυσματικό πεδίο $\vec{F}(\vec{r},t)$

Ορισμός: Ένα υλικό σημείο μετακινείται κατά το στοιχειώδες διάστημα $d\vec{r}$ υπό την επίδραση της δυνάμεως $\vec{F}(\vec{r},t)$. Ορίζουμε σαν έργο της δυνάμεως και το συμβολίζουμε με Α το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα

$$A = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F}\cdot d\vec{r}$$

Αν το υλικό σημείο στον χρόνο t_1 βρίσκεται στην θέση $\vec{r}_1$ και στον χρόνο t_2 στην θέση $\vec{r}_2$ τότε το παραπάνω επικαμπύλιο ολοκλήρωμα γράφεται

$$A = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}\cdot \frac{d\vec{r}}{dt}\,dt$$

που είναι ένα απλό ολοκλήρωμα Ρήμαν.

Αν η δύναμη δίνεται από τον νόμο του Νεύτωνα τότε

$$\vec{F}\cdot d\vec{r} = m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\cdot d\vec{r} = m\frac{d\vec{\upsilon}}{dt}\cdot d\vec{r} = m d\vec{\upsilon}\cdot\frac{d\vec{r}}{dt} = m\vec{\upsilon}\cdot d\vec{\upsilon}$$

Εκτελούμε την ολοκλήρωση και παίρνουμε

$$A = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} m\vec{\upsilon}\cdot d\vec{\upsilon} = \frac{1}{2}m\left(\vec{\upsilon}_2^{\,2} - \vec{\upsilon}_1^{\,2}\right)$$

Ορισμός: Ορίζουμε σαν κινητική ενέργεια και την συμβολίζουμε με E_κ το μέγεθος

$$\mathrm{E}_\kappa = \frac{1}{2}m\vec{\upsilon}^{\,2} = \frac{1}{2}m\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)^2 = \frac{\vec{p}^{\,2}}{2m}$$

Συνεπώς η μεταβολή της κινητικής ενέργειας από το σημείο $\vec{r}_1$ στο σημείο $\vec{r}_2$ ισούται με το έργο που παράγεται αν η διαφορά είναι αρνητική ή καταναλίσκετε αν η διαφορά είναι θετική.

2.4 Συντηρητικά δυναμικά πεδία

Για κάθε μηχανικό σύστημα η συνάρτηση $\vec{F}$ βρίσκεται πειραματικά, και η μορφή της δυνάμεως ορίζει το σύστημα. Θα εξετάσουμε τώρα την ειδική περίπτωση που η δύναμη δίνεται από μια δεδομένη βαθμωτή συνάρτηση $V(\vec{r})$, από την σχέση:

$$\vec{F} = -\left(\frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y}, \frac{\partial V}{\partial z}\right)$$

Δηλαδή αν συμβολίσουμε με F_x, F_y και F_z τις συνιστώσες της δυνάμεως, αυτές δίνονται από τις σχέσεις:

$$F_x = -\frac{\partial V}{\partial x}, \qquad F_y = -\frac{\partial V}{\partial y}, \qquad F_z = -\frac{\partial V}{\partial z}$$

Αποδεικνύεται παραγωγίζοντας την παραπάνω σχέση κατάλληλα ότι, ένα τέτοιο δυναμικό πεδίο ικανοποιεί τις σχέσεις

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x}, \quad \frac{\partial F_y}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial y}, \quad \frac{\partial F_z}{\partial x} = \frac{\partial F_x}{\partial z}$$

Έχουμε ορίσει τον διανυσματικό τελεστή ανάδελτα $\vec{\nabla}$ από την σχέση:

$$\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$$

Με την βοήθεια αυτού του τελεστή γράφουμε για την δύναμη την σχέση $\vec{F} = -\vec{\nabla}V(\vec{r})$, ενώ οι αναγκαίες σχέσεις γράφονται $\vec{\nabla} \times \vec{F} = \vec{0}$. Αποδεικνύεται ότι οι σχέσεις αυτές είναι αναγκαίες και ικανές. Άρα

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}V(\vec{r}), \qquad \Longleftrightarrow \qquad \vec{\nabla} \times \vec{F} = \vec{0}$$

Μια διανυσματική συνάρτηση που ικανοποιεί της παραπάνω σχέσεις ονομάζεται αστρόβιλη και το δυναμικό πεδίο που παράγει πεδίο αστρόβιλο.

Θα βρούμε ακολούθως το έργο που παράγεται σε ένα τέτοιο δυναμικό πεδίο. Είναι γνωστό ότι το διαφορικό μιας συναρτήσεως $V(\vec{r})$ δίνεται από την σχέση

$$dV(x,y,z) = \frac{\partial V}{\partial x}dx + \frac{\partial V}{\partial y}dy + \frac{\partial V}{\partial z}dz$$

Οι μερικές παράγωγοι της V όμως είναι οι συνιστώσες της δυνάμεως $\vec{F}$. Επομένως

$$-dV(\vec{r}) = F_x dx + F_y dy + F_z dz = (F_x, F_y, F_z)\cdot(dx, dy, dz) = \vec{F}\cdot d\vec{r}$$

και άρα μπορούμε να υπολογίσουμε εύκολα το έργο. Έχουμε

$$\mathrm{A} = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F}\cdot d\vec{r} = -\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} dV(\vec{r}) = V(\vec{r}_1) - V(\vec{r}_2)$$

Η σχέση αυτή λέει ότι σε ένα αστρόβιλο δυναμικό πεδίο το έργο που παράγεται ή καταναλίσκετε εξαρτάται από την τιμή της συναρτήσεως $V(\vec{r})$ στα σημεία $\vec{r}_1$ και $\vec{r}_2$. Το έργο αυτό δεν εξαρτάται από την τροχιά του σώματος. Φυσικά εννοείται ότι οι συναρτήσεις είναι "καλές" δηλαδή τέτοιες ώστε οι σημειούμενες παράγωγοι να υπάρχουν και να είναι συνεχείς σε όλο το πεδίο ορισμού τους.

Επειδή το έργο είναι ίσο με την διαφορά των κινητικών ενεργειών στα σημεία $\vec{r}_1$ και $\vec{r}_2$ έχουμε

$$A = \frac{1}{2}m\left(\vec{\upsilon}_2^{\,2} - \vec{\upsilon}_1^{\,2}\right) = V(\vec{r}_1) - V(\vec{r}_2) \qquad \Longrightarrow$$

$$\frac{1}{2}m\vec{\upsilon}_2^{\,2} + V(\vec{r}_2) = \frac{1}{2}m\vec{\upsilon}_1^{\,2} + V(\vec{r}_1)$$

Η σχέση αυτή δικαιολογεί την εκλογή της συναρτήσεως $V(\vec{r})$ με το αρνητικό σημείο.

Συνεπώς το παραπάνω μέγεθος έχει την ίδια τιμή σε δύο (οποιαδήποτε) σημεία δηλαδή παραμένει σταθερό κατά την διάρκεια της κινήσεως. Είναι όπως λέμε ένα ολοκλήρωμα της κινήσεως. Το μέγεθος αυτό ονομάζεται (ολική) ενέργεια του συστήματος και η συνάρτηση $V(\vec{r})$ δυναμική ενέργεια ή απλά δυναμικό. Συνήθως γράφουμε την ενέργεια σαν συνάρτηση της ορμής μάλλον παρά της ταχύτητας

$$E = \frac{1}{2}m\vec{\upsilon}^{\,2} + V(\vec{r}) = \frac{\vec{p}^{\,2}}{2m} + V(\vec{r})$$

Τέτοια δυναμική πεδία ονομάζονται λόγω της παραπάνω σχέσεως πεδία συντηρητικά. Ένα συντηρητικό δυναμικό πεδίο είναι το πεδίο της βαρύτητας.

Εφαρμογή: Να βρεθεί η ταχύτητα που έχει ένα σώμα όταν πέσει στο έδαφος. Το σώμα αφήνεται να πέσει (χωρίς αρχική ταχύτητα) από ύψος h.

Λύση: Είναι πειραματικό δεδομένο ότι η δύναμη που ασκεί το πεδίο βαρύτητας σε ένα σώμα είναι

$$\vec{F} = (0, 0, -mg)$$

όπου $g = 9,8\ m/sec^2$ και ονομάζεται επιτάχυνση της βαρύτητας. Η σταθερά m είναι η μάζα του σώματος. Ο άξονας των z έχει την διεύθυνση της κατακορύφου.

Αποδεικνύεται εύκολα ότι το δυναμικό πεδίο είναι αστρόβιλο δηλαδή $\vec{\nabla} \times \vec{F} = \vec{0}$. Συνεπώς υπάρχει δυναμική συνάρτηση $V(\vec{r})$ που ικανοποιεί τις εξισώσεις

$$\frac{\partial V}{\partial x} = 0 \qquad \frac{\partial V}{\partial y} = 0 \qquad \frac{\partial V}{\partial z} = mg$$

Η λύση του παραπάνω διαφορικού συστήματος είναι

$$V(\vec{r}) = mgz$$

όπου χωρίς βλάβη της γενικότητας, έχουμε μηδενίσει τις σταθερές.

Το δυναμικό πεδίο είναι συντηρητικό και η ενέργεια του πεδίου είναι μια σταθερά. Αν $\upsilon = dz/dt$ είναι η ταχύτητα του σώματος κατά την $z-$ διεύθυνση τότε ισχύει

$$E = \frac{1}{2}m\upsilon^2 + mgz = \text{σταθερά}$$

Επομένως η ενέργεια του σώματος στο ύψος h και στο έδαφος είναι ίσες. Η εξίσωση αυτή δίνει και τη ζητούμενη ταχύτητα. Έχουμε

$$E = mgh = \frac{1}{2}m\upsilon^2 \qquad \Longrightarrow \qquad \upsilon = \sqrt{2gh}$$

Παρατηρούμε ότι η ταχύτητα δεν εξαρτάται από την μάζα του σώματος.

2.5 Μηχανική συστήματος υλικών σημείων

Μπορούμε να επεκτείνουμε τους ορισμούς και τα συμπεράσματα των προηγουμένων παραγράφων για σύστημα υλικών σημείων. Η εξίσωση κινήσεως για το i υλικό σημείο γράφεται

$$\sum_j \vec{F}_{ij} + \vec{F}_i = m_i \ddot{\vec{r}}_i$$

Οι δυνάμεις $\vec{F}_{ij}$ είναι οι δυνάμεις που ασκεί στο i υλικό σημείο το j υλικό σημείο. Οι δυνάμεις αυτές ονομάζονται εσωτερικές. Η δύναμη $\vec{F}_i$ είναι η εξωτερική δύναμη που ασκείται πάνω στο i υλικό σημείο.

Αν αθροίσουμε όλες τις εξισώσεις αυτές για όλα τα υλικά σημεία βρίσκουμε

$$\sum_i \sum_j \vec{F}_{ij} + \sum_i \vec{F}_i = \sum_i \vec{F}_i = \sum_i m_i \ddot{\vec{r}}_i$$

Το άθροισμα των εσωτερικών δυνάμεων είναι μηδέν διότι κάθε όρος $\vec{F}_{ij} + \vec{F}_{ji}$ είναι μηδέν. Η μία δύναμη είναι αντίθετη της άλλης διότι αποτελούν το ζεύγος δράση - αντίδραση.

Ορίζουμε το διάνυσμα

$$\vec{R} = \frac{1}{\sum m_i} \sum m_i \vec{r}_i = \frac{1}{M} \sum m_i \vec{r}_i$$

Το σημείο του χώρου που ορίζει το διάνυσμα αυτό είναι το κέντρο μάζας του συστήματος των υλικών σημείων. Η εξίσωση κινήσεως γράφεται

$$M \ddot{\vec{R}} = \sum \vec{F}_i = \vec{F}$$

Άρα οι εσωτερικές δυνάμεις δεν επηρεάζουν την κίνηση του κέντρου μάζας.

Το κέντρο μάζας κινείται υπό την επίδραση της συνισταμένης των εξωτερικών δυνάμεων σαν υλικό σημείο με μάζα ίση με το άθροισμα όλων των υλικών σημείων του συστήματος.

Η ολική ορμή ενός συστήματος υλικών σημείων βρίσκεται εύκολα ότι είναι

$$\vec{P} = \sum_i m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt} = M \frac{d\vec{R}}{dt}$$

Δηλαδή η ορμή του συστήματος είναι η ορμή ενός υλικού σημείου που βρίσκεται στο κέντρου μάζας και έχει μάζα ίση με την συνολική μάζα του συστήματος.

Ανάλογο θεώρημα ισχύει και για την στροφορμή.

Η συνολική στροφορμή ως προς ένα σημείο O είναι ίση με την στροφορμή του κέντρου μάζας με μάζα ίση με την συνολική μάζα ως προς το σημείο O συν το άθροισμα των στροφορμών του κάθε υλικού σημείου του συστήματος ως προς το κέντρο μάζας. Δηλαδή

$$\vec{L} = \sum_i \vec{r}_i \times m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt} = \vec{R} \times M \frac{d\vec{R}}{dt} + \sum_i \vec{r}_i{}' \times m_i \frac{d\vec{r}_i{}'}{dt}$$

όπου $\vec{r}_i$ και $\vec{r}\,'$ είναι τα διανύσματα θέσεως του υλικού σημείου ως προς το σημείο O και ως προς το κέντρο μάζας αντιστοίχως. Το $\vec{R}$ είναι το διάνυσμα θέσεως του κέντρου μάζας ως προς το O. Η απόδειξη είναι απλή αρκεί να παρατηρήσουμε ότι ισχύει

$$\vec{r}_i = \vec{R} + \vec{r}_i{}'$$

Τέλος το έργο των δυνάμεων είναι επίσης το άθροισμα των έργων όλων των δυνάμεων εσωτερικών και εξωτερικών που ασκούνται στα υλικά σημεία. Προκειμένου για στερεά σώματα οι εσωτερικές δυνάμεις δεν παράγουν έργο εφόσον η απόσταση των υλικών σημείων μεταξύ τους θεωρείται σταθερή. Άρα για να μελετήσουμε την κίνηση του στερεού σώματος μπορούμε να αγνοήσουμε το δυναμικό των εσωτερικών δυνάμεων που είναι σταθερό.

Το πρόβλημα του συστήματος υλικών σημείων είναι συνεπώς η λύση των εξισώσεων του Νεύτωνα που φυσικά δεν είναι εύκολη υπόθεση. Το πρόβλημα περιπλέκεται αν τα υλικά σημεία υπόκεινται σε δεσμούς. Για παράδειγμα το σύστημα μπορεί να είναι ένα στερεό που η απόσταση των υλικών σημείων μεταξύ τους μένει σταθερή.

$$\|\vec{r}_i - \vec{r}_j\| = c \qquad\qquad i \neq j$$

Τέτοιοι δεσμοί ονομάζονται ολόνομοι.

Άλλο παράδειγμα είναι το σύστημα των υλικών σημείων που κινούνται μόνο στο εσωτερικό κάποιας σφαίρας.

$$\|\vec{r}_i\| \leq c \qquad\qquad \forall i$$

Τέτοιοι δεσμοί ονομάζονται μη ολόνομοι.

Ορισμός: Ονομάζουμε τους δεσμούς ολόνομους αν μπορούν να εκφραστούν από σχέσεις της μορφής

$$f(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \cdots, \vec{r}_n; t) = 0$$

Οι συντεταγμένες τους δηλαδή δεν είναι ανεξάρτητες αλλά συνδέονται με κάποια συναρτησιακή σχέση. Αν δεν υπάρχει τέτοια σχέση οι δεσμοί ονομάζονται μη ολόνομοι.

Προβλήματα με ολόνομους δεσμούς αντιμετωπίζονται συνήθως με την εισαγωγή των γενικευμένων συντεταγμένων. Η θέση στο χώρο ενός συστήματος N σωματιδίων καθορίζεται από 3N ανεξάρτητες καρτεσιανές συντεταγμένες. Λέμε ότι το σύστημα έχει 3N βαθμούς ελευθερίας. Αν υπάρχουν k δεσμοί αυτό σημαίνει ότι k από τις συντεταγμένες αυτές είναι εξαρτημένες και επομένως το σύστημα έχει $3N-k$ βαθμούς ελευθερίας. Δεχόμαστε τώρα ότι το σύστημα έχει $3N-k$ ανεξάρτητες γενικευμένες συντεταγμένες $q_1, q_2, \cdots, q_{3N-k}$ τέτοιες ώστε να ισχύουν ταυτοτικά οι δεσμοί. Οι καρτεσιανές συντεταγμένες δίνονται τώρα από τις σχέσεις

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i(q_1, q_2, \cdots, q_{3N-k}) \qquad\qquad i = 1, 2, \cdots, N$$

όπου οι γενικευμένες συντεταγμένες εμφανίζονται σαν παράμετροι.

Προβλήματα με μη ολόνομους δεσμούς αντιμετωπίζονται διαφορετικά κατά περίπτωση. Ένας τρόπος για την αντιμετώπιση προβλημάτων με δεσμούς είναι η μέθοδος του Λαγκράνζ.

Ασκήσεις

Άσκηση 2.1

Δύο παράλληλες δυνάμεις $\vec{f_1}$ και $\vec{f_2}$ $(f_1 \leq f_2)$ που απέχουν απόσταση l μεταξύ τους, εξασκούνται επί ενός σώματος. Να υπολογίσετε την συνισταμένη τους $\vec{f}_{\sigma\upsilon\nu}$ και το σημείο εφαρμογής της.

Σχήμα 2.13
Ισορροπία ομορρόπων και αντιρρόπων παραλλήλων δυνάμεων

Λύση: Συμβολίζουμε με x_1 την απόσταση της μικρότερης από τις δυνάμεις από την συνισταμένη τους και με l την απόσταση των δύο δυνάμεων μεταξύ τους.

α) Αν οι δυνάμεις είναι παράλληλες και ομόρροπες, έχουμε

$$f_{\sigma\upsilon\nu} = f_2 + f_1$$

Το άθροισμα των ροπών των δυνάμεων ως προς το σημείο Β πρέπει να είναι ίσο με το μηδέν. Δηλαδή

$$F_1 x - F_2(\mathrm{B\Gamma}) = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad F_1 x - F_2(l - x) = 0$$

Λύνουμε την παραπάνω εξίσωση ως προς x και βρίσκουμε

$$x = \frac{f_2 \cdot l}{f_1 + f_2} \leq l$$

β) Αν οι δυνάμεις είναι παράλληλες και αντίρροπες, έχουμε

$$f_{\sigma\upsilon\nu} = f_2 - f_1 \qquad \text{και} \qquad x = \frac{f_2 \cdot l}{f_1 - f_2} \geq l$$

Παρατηρούμε ότι αν οι δύο δυνάμεις είναι ίσες $f_1 = f_2 = f$ τότε η συνισταμένη τους είναι μηδέν και ο φορέας της βρίσκεται σε άπειρη απόσταση. Το σύστημα αυτό των δυνάμεων ονομάζεται ζεύγος δυνάμεων. Η ροπή του ζεύγους έχει μέτρο ίσο με

$$M = f \cdot l$$

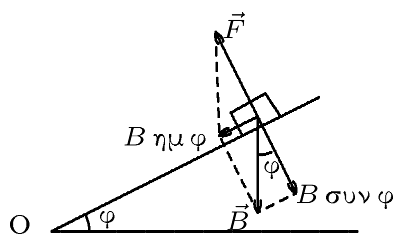
Άσκηση 2.2

Σε κεκλιμένο επίπεδο με κλίση φ ως προς το οριζόντιο επίπεδο ισορροπεί σώμα βάρους $\vec{B}$.

α) Να σχεδιαστούν οι δυνάμεις που επενεργούν στο σώμα όταν η τριβή είναι μηδέν. β) Όταν η τριβή (τριβή ολισθήσεως) είναι ανάλογη της καθέτου δυνάμεως

$$\vec{\mathrm{T}} = \mu \vec{F}_k$$

Να βρεθεί η ελάχιστη γωνία $\varphi_{\tau\rho}$ ώστε το σώμα να αρχίσει να ολισθαίνει.



Σχήμα 2.14
Το κεκλιμένο επίπεδο

Λύση: Οι δυνάμεις που εξασκούνται στο σώμα είναι το βάρος $\vec{\mathrm{B}}$ του σώματος και η δύναμη $\vec{F}$ που προέρχεται από το κεκλιμένο επίπεδο. Η δύναμη αυτή είναι κάθετη στο επίπεδο αν η τριβή είναι μηδέν.

Αναλύουμε την δύναμη $\vec{\mathrm{B}}$ σε δύο συνιστώσες. Μια κάθετη στο επίπεδο $\vec{F}_\kappa$ και μία παράλληλη προς αυτό $\vec{F}_\pi$.

$$F_\pi = B\,\eta\mu\,\varphi \leq B \qquad\qquad F_\kappa = B\,\sigma\upsilon\nu\,\varphi$$

Η δύναμη $\vec{F}_\kappa$ είναι ίση και αντίθετη προς την δύναμη $\vec{F}$. Για να ισορροπεί το σώμα πρέπει να εφαρμόσουμε μια δύναμη ίση και αντίθετη προς την δύναμη $\vec{F}_\pi$. Η δύναμη αυτή ονομάζεται δύναμη ανυψώσεως και είναι μικρότερη από το βάρος του σώματος. Για παράδειγμα για $\varphi = 30^0$ η δύναμη ανυψώσεως είναι ίση με $\vec{F} = \vec{B}/2$.

Στην περίπτωση που υπάρχει τριβή η δύναμη που προέρχεται από το κεκλιμένο επίπεδο δεν είναι κάθετη. Αναλύουμε την δύναμη αυτή σε δύο συνιστώσες. Μια κάθετη προς το επίπεδο και μια παράλληλη. (Οι δυνάμεις αυτές δεν έχουν σχεδιαστεί στο σχήμα). Επειδή το σώμα ισορροπεί ισχύουν οι σχέσεις

$$F_\kappa = \mathrm{B}\,\sigma\upsilon\nu\,\varphi \qquad\qquad F_\pi = \mathrm{B}\,\eta\mu\,\varphi$$

Από τα δεδομένα του προβλήματος έχουμε

$$T = F_\pi = \mathrm{B}\,\eta\mu\,\varphi = \mu F_\kappa = \mu\mathrm{B}\,\sigma\upsilon\nu\,\varphi \qquad \Longrightarrow \qquad \mu = \varepsilon\varphi\,\varphi$$

Η παραπάνω σχέση δίνει την ελάχιστη γωνία ώστε το σώμα να αρχίσει να ολισθαίνει.

Άσκηση 2.3

Δύο ράβδοι ΑΒ και ΟΓ είναι συνδεδεμένοι κατά ορθή γωνία στο σημείο Γ, στη μέση της ΑΒ. Δίνεται ότι $\mathrm{A\Gamma} = \mathrm{\Gamma B} = \alpha$ και $\mathrm{O\Gamma} = \beta$. Στα σημεία Α και Β υπάρχουν δύο βάρη B_1 και B_2. Το σύστημα κρέμεται από το σημείο Ο. Να βρεθεί η γωνία που θα σχηματίσει η ράβδος ΑΒ με το οριζόντιο επίπεδο όταν το σύστημα ισορροπήσει.

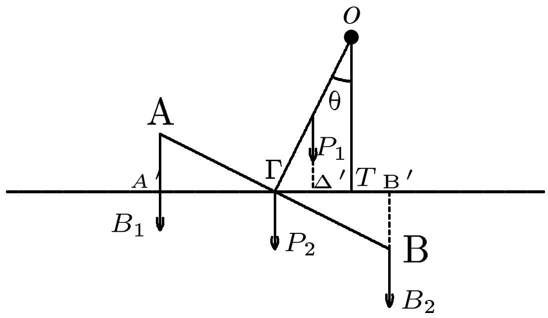
Υποθέσατε πρώτον ότι οι ράβδοι έχουν βάρος και ότι το βάρος τους είναι ίσο με $2P$ ανά μονάδα μήκους και δεύτερον ότι δεν έχουν βάρος.

Λύση: Από τα δεδομένα του προβλήματος προφανώς τα βάρη των ράβδων είναι

$$\mathrm{P}_1 = 2P\beta \qquad\qquad \mathrm{P}_2 = 2\mathrm{P}2\alpha = 4\alpha P$$

Η γωνία θ είναι η κλήση της ράβδου ΟΓ από την κατακόρυφο ΟΤ και είναι ίση με την ζητούμενη κλήση διότι οι δύο αυτές γωνίες έχουν τις πλευρές τους κάθετες.

Επειδή το σύστημα ισορροπεί, το άθροισμα των ροπών των βαρών B_1 και B_2 και των βαρών P_1 και P_2 των ράβδων ΟΓ και ΑΒ ως προς το σημείο Ο, πρέπει να είναι μηδέν.



Σχήμα 2.15
Το άθροισμα των δυνάμεων και το άθροισμα των ροπών είναι μηδέν

Οι φορείς των δυνάμεων B_1, P_1 και B_2 τέμνουν την οριζόντιο που περνάει από το σημείο Γ στα σημεία Α′, Δ′ και Β′ αντιστοίχως. Έχουμε

$$M_{B_1} = M_{P_1} + M_{P_2} + M_{B_2} \implies B_1(TA') = 2P\beta(T\Delta') + 4\alpha P(T\Gamma) + B_2(TB')$$

Από το σχήμα φαίνεται εύκολα ότι

$$T\Delta' = (O\Delta)\,\eta\mu\,\theta = \frac{\beta}{2}\,\eta\mu\,\theta \qquad\qquad T\Gamma = (O\Gamma)\,\eta\mu\,\theta = \beta\,\eta\mu\,\theta$$

$$TA' = \Gamma A' - T\Gamma = (A\Gamma)\,\sigma\upsilon\nu\,\theta - (O\Gamma)\,\eta\mu\,\theta = \alpha\,\sigma\upsilon\nu\,\theta - \beta\,\eta\mu\,\theta$$

$$TB' = \Gamma B' + T\Gamma = (B\Gamma)\,\sigma\upsilon\nu\,\theta + (O\Gamma)\,\eta\mu\,\theta = \alpha\,\sigma\upsilon\nu\,\theta + \beta\,\eta\mu\,\theta$$

Επομένως έχουμε

$$B_1(\alpha\,\sigma\upsilon\nu\,\theta - \beta\,\eta\mu\,\theta) = 2\beta P\left(\frac{\beta}{2}\,\eta\mu\,\theta\right) + 4\alpha P(\beta\,\eta\mu\,\theta) + B_2(\alpha\,\sigma\upsilon\nu\,\theta + \beta\,\eta\mu\,\theta)$$

$$\implies \quad \left(\beta B_1 + 4\alpha\beta P + \beta^2 P + \beta B_2\right)\eta\mu\,\Theta = (\alpha B_1 - \alpha B_2)\,\sigma\upsilon\nu\,\theta \quad \implies$$

$$\varepsilon\varphi\,\theta = \frac{\alpha B_1 - \alpha B_2}{\beta B_1 + 4\alpha\beta P + \beta^2 P + \beta B_2} = \frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{B_1 - B_2}{B_1 + B_2 + P\,(4\alpha + \beta)}$$

Αν οι ράβδοι δεν έχουν βάρος τότε η ζητούμενη γωνία βρίσκεται αν θέσουμε $P = 0$ στην παραπάνω σχέση. Το αποτέλεσμα είναι

$$\varepsilon\varphi\,\theta = \frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\mathrm{B}_1 - \mathrm{B}_2}{\mathrm{B}_1 + B_2}$$

Άσκηση 2.4

Να υπολογίσετε το έργο που παράγεται από την δύναμη $\vec{F}(x,y,z) = (ayz, bxz, cxy)$ κατά την μετακίνηση μιας μάζας από το σημείο $(1,1,1)$ στο σημείο $(2,4,8)$, α) Πάνω στην ευθεία που ενώνει τα δύο σημεία και β) πάνω στην καμπύλη με παραμετρικές εξισώσεις $\vec{r} = (t, t^2, t^3)$.

Να προσδιοριστούν οι σταθερές a, b και c ώστε τα δύο επικαμπύλια ολοκληρώματα να είναι ίσα. Πότε το πεδίο είναι αστρόβιλο;.

Λύση: Θα υπολογίσουμε το έργο πάνω στην ευθεία.

Θα βρούμε πρώτα την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από τα δοσμένα σημεία. Με παράμετρο το t αποδεικνύεται εύκολα ότι η ευθεία αυτή έχει παραμετρικές εξισώσεις

$$x(t) = t + 1 \qquad y(t) = 3t + 1 \qquad z(t) = 7t + 1$$

Υπολογίζουμε τώρα το έργο

$$A = \int \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^1 \vec{F} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} dt =$$

$$\int_0^1 (a(3t+1)(7t+1), b(t+1)(7t+1), c(t+1)(3t+1)) \cdot (1,3,7) dt =$$

$$\int_0^1 dt \left[a(3t+1)(7t+1) + 3b(t+1)(7t+1) + 7c(t+1)(3t+1)\right] dt =$$

$$\int_0^1 dt \left[a(21t^2 + 10t + 1) + b(21t^2 + 24t + 3) + c(21t^2 + 28t + 7)\right] dt =$$

$$\left[a(7t^3 + 5t^2 + t) + b(7t^3 + 12t^2 + 3t) + c(7t^3 + 14t^2 + 7t)\right]_0^1 =$$

$$a(7 + 5 + 1) + b(7 + 12 + 3 + c(7 + 14 + 7) = 13a + 22b + 28c$$

Θα υπολογίσουμε τώρα το έργο πάνω στον δεύτερο δρόμο. Βρίσκουμε

$$A = \int \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_1^2 \vec{F} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} dt = \int_1^2 (at^5, bt^4, ct^3) \cdot (1, 2t, 3t^2) dt =$$

$$\int_1^2 \left[at^5 + 2bt^5 + 3ct^5\right] dt = \left[(a + 2b + 3x)t^6/6\right]_1^2 = (a+2b+3c)(2^6 - 1)/6 =$$

$$63(a + 2b + 3c)/6$$

Το ολοκλήρωμα είναι το ίδιο πάνω στους δύο αυτούς δρόμους αν η σταθερές ικανοποιούν την σχέση

$$13a + 22b + 28c = 63(a + 2b + 3c)/6 \qquad \Longrightarrow \qquad 15a + 6b - 21c = 0$$

Παρατηρούμε ότι για $a = b = c$ η παραπάνω σχέση ικανοποιείται. Η λύση δεν είναι μοναδική. Για παράδειγμα $a = 1$, $b = 2$, $c = 27/21$.

Θα βρούμε τώρα πότε το πεδίο είναι αστρόβιλο δηλαδή πότε $\vec{\nabla} \times \vec{F} = 0$. Βρίσκουμε

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ ayz & bxz & cxy \end{vmatrix} = (cx - bx, ay - cy, bz - az) = 0 \qquad \Longrightarrow$$

$$a = b = c$$

Για την τιμή αυτή των σταθερών υπάρχει βαθμωτή συνάρτηση $V(x, y, z)$ τέτοια ώστε $\vec{F} = (P, Q, R) = a(yz, xz, xy) = \vec{\nabla} V(x, y, z)$.

Θα βρούμε την συνάρτηση αυτή με την βοήθεια του γενικού τύπου

$$V = \int_{x_0}^{x} P(t, y_0, z_0) dt + \int_{y_0}^{y} Q(x, t, z_0) dt + \int_{z_0}^{z} R(x, y, t) dt =$$

$$a \int_{x_0}^{x} y_0 z_0 dt + a \int_{y_0}^{y} x z_0 dt + a \int_{z_0}^{z} xy dt = a \left[y_0 z_0 t\right]_{x_0}^{x} + a \left[x z_0 t\right]_{y_0}^{y} + a \left[xyt\right]_{z_0}^{z} =$$

$$ay_0 z_0 x - ay_0 z_0 x_0 + axz_0 y - axz_0 y_0 + axyz - axyz_0 = axyz - ax_0 y_0 z_0$$

Στην περίπτωση αυτή το έργο εξαρτάται μόνο από την τιμή της συνάρτησης $V(\vec{r})$ στα σημεία $(1, 1, 1)$ και $(2, 4, 8)$.

Πραγματικά βρίσκουμε

$$A = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} \cdot dt = A = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} dV = V(\vec{r}_2) - V(\vec{r}_1) = a2 \cdot 4 \cdot 8 - a = 63a$$

Παρατηρούμε ότι για τις τιμές $a \neq b \neq c \neq a$ όπου

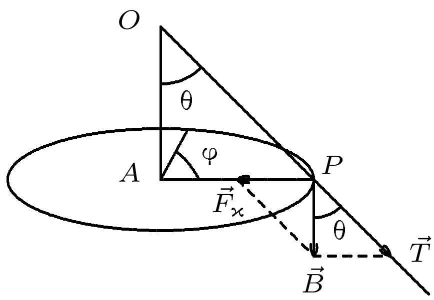
$$15a + 6b - 21c = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad c = \frac{15a + 6b}{21}$$

τα δύο έργα πάνω στις δύο δοσμένες τροχιές είναι ίσα όμως το πεδίο δεν είναι αστρόβιλο. Ο στροβιλισμός του είναι

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = (cx - bx, ay - cy, bz - az) = (15x, 6y, -21z)\frac{a - b}{21} \neq 0$$

Άσκηση 2.5

Μια κατακόρυφος ράβδος περιστρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα ω. Ένα νήμα μήκους l είναι δεμένο στο σημείο O της ράβδου ενώ στο άλλο άκρο του P είναι δεμένη μία μάζα m. Να βρείτε την γωνία του νήματος με την κατακόρυφο και την τάση του νήματος.



Σχήμα 2.16
Η ράβδος περιστρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα

Λύση: Φέρουμε την κάθετο PA. Θεωρούμε ένα σταθερό σύστημα αξόνων με κέντρο το σημείο A. Ως προς το σύστημα αυτό η μάζα κινείται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα

$$\vec{\omega} = \omega\vec{k}$$

Αν $\vec{r}(t)$ είναι το διάνυσμα θέσεως της μάζας το διάνυσμα αυτό έχει σταθερό μήκος

$$r = l\,\text{ημ}\,\theta$$

Αναλύουμε το βάρος σε δύο συνιστώσες. Μία κατά την διεύθυνση του νήματος και μία κατά την διεύθυνση της PΑ. Η πρώτη συνιστώσα είναι ίση με την τάση Τ του νήματος και η δεύτερη με την κεντρομόλο δύναμη F_k.

Από το σχήμα φαίνεται αμέσως ότι

$$F_k = T\,\text{ημ}\,\theta \qquad T = \frac{mg}{\text{συν}\,\theta} \qquad \Longrightarrow \qquad F_k = mg\,\text{εφ}\,\theta$$

Αν συμβολίσουμε με $\varphi(t)$ την γωνία που διαγράφει το διάνυσμα θέσεως της μάζας τότε επειδή η γωνιακή ταχύτητα είναι σταθερή βρίσκουμε

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \text{σταθ.} \qquad \Longrightarrow \qquad \varphi(t) = \omega\,t + \varphi_0$$

Η κεντρομόλος επιτάχυνση είναι σε πολικές συντεταγμένες ίση με

$$\gamma_k = r\dot{\varphi}^2 = r\,\omega^2$$

εφόσον το διάνυσμα θέσεως έχει σταθερό μέτρο και επομένως

$$F_k = m\gamma_k = mr\,\omega^2 = ml\,\text{ημ}\,\theta\,\omega^2 = mg\,\text{εφ}\,\theta$$

Από την σχέση αυτή προκύπτουν εύκολα τα ζητούμενα μεγέθη. Η γωνία του νήματος με την κατακόρυφο είναι

$$\text{συν}\,\theta = \frac{g}{l\omega^2} \qquad \Longrightarrow \qquad \theta = \text{τοξσυν}\left(\frac{g}{l\omega^2}\right)$$

Επειδή προφανώς το νήμα και η μάζα διαγράφουν την επιφάνεια ενός κώνου το σύστημα ονομάζεται κωνικό εκκρεμές.

Η τάση του νήματος είναι

$$\mathrm{T} = ml\omega^2$$

Άσκηση 2.6

Ένα σώμα εκτοξεύεται από μια θέση που την θεωρούμε σαν αρχή ενός συστήματος συντεταγμένων. Η αρχική ταχύτητα του σώματος σχηματίζει γωνία α με τον ορίζοντα. Διαλέγουμε τον προσανατολισμό των αξόνων x και y έτσι ώστε το διάνυσμα $\vec{\upsilon}$ να βρίσκεται πάνω στο $xz-$επίπεδο και ο άξονα z να είναι κατακόρυφος. Η επιτάχυνση του πεδίου βαρύτητας είναι ίση με $-g\vec{k}$.

Να βρεθεί η τροχιά του α) στο κενό όπου δεν υπάρχει τριβή και β) στον αέρα που η τριβή είναι ανάλογη της ταχύτητας και δίνεται από την σχέση

$$\vec{T} = -mc\vec{\upsilon}$$

Λύση: Η αρχική ταχύτητα από τα δεδομένα του προβλήματος δίνεται από την σχέση

$$\vec{\upsilon}_0 = (\upsilon_0 \,\text{συν}\, \alpha, 0, \upsilon_0 \,\text{ημ}\, \alpha)$$

α) Στο κενό η δύναμη που επιδρά στο σώμα είναι μόνο το βάρος του σώματος. Επομένως η εξίσωση του Νεύτωνα είναι

$$\vec{F} = m\vec{\gamma} \qquad \Longrightarrow \qquad -mg\vec{k} = m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$

όπου $\vec{k}$ είναι το κατακόρυφο μοναδιαίο διάνυσμα. Άρα οι συνιστώσες του διανύσματος θέσεως του σώματος ικανοποιούν τις ακόλουθες διαφορικές εξισώσεις

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 0 \qquad \frac{d^2y}{dt^2} = 0 \qquad \frac{d^2z}{dt^2} = -g$$

Η y συνιστώσα του προβλήματος έχει προφανώς την λύση

$$y(t) = 0$$

και επομένως η κίνηση του σώματος γίνεται στο επίπεδο xz.

Για την x συνιστώσα έχουμε το ακόλουθο πρόβλημα αρχικών τιμών

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 0 \qquad x(0) = 0 \qquad \dot{x}(0) = \upsilon_0 \,\text{συν}\, \alpha$$

Ολοκληρώνουμε την σχέση και βρίσκουμε

$$\dot{x} = c_1$$

Από την δεύτερη αρχική συνθήκη βρίσκουμε ότι η σταθερά c_1 είναι ίση με v_0 συν α. Επομένως η ταχύτητα στην $x-$διεύθυνση είναι

$$\dot{x}(t) = \upsilon_0 \,\text{συν}\,\alpha$$

Μία ακόμα ολοκλήρωση δίνει

$$x(t) = c_2 + t\,\upsilon_0 \,\text{συν}\,\alpha$$

και λόγω της πρώτης αρχικής συνθήκης $c_2 = 0$. Άρα η λύση είναι

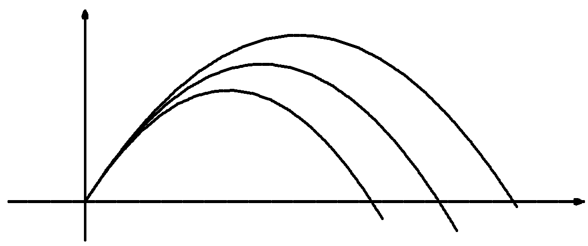
$$x(t) = t\,\upsilon_0 \,\text{συν}\,\alpha$$

Η z συνιστώσα του διανύσματος θέσεως του σώματος είναι λύση του ακόλουθου προβλήματος αρχικών τιμών

$$\frac{d^2 z}{d\,t^2} = -g \qquad\qquad z(0) = 0 \qquad\quad \dot{z}(0) = \upsilon_0 \,\text{ημ}\,\alpha$$

Η λύση του προβλήματος βρίσκεται με όμοιο τρόπο. Το αποτέλεσμα είναι τελικά

$$z(t) = -\frac{1}{2} g\,t^2 + t\,\upsilon_0 \,\text{ημ}\,\alpha$$



Σχήμα 2.17
Τροχιές με αρχικές ταχύτητες με ίσες κλίσεις και διαφορετικά μήκη

Στο σχήμα φαίνονται οι τροχιές ενός σώματος για αρχικές ταχύτητες που έχουν την ίδια κλίση α ως προς τον $x-$άξονα και διαφορετικό μήκος.

Θα βρούμε ακολούθως το μέγιστο ύψος και το βεληνεκές της τροχιάς

Το σώμα θα φθάσει στο μέγιστο ύψος του σε χρόνο που βρίσκεται από την λύση της εξισώσεως $dz(t)/dt = 0$. Έχουμε

$$\frac{dz(t)}{dt} = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad -g\,t + \upsilon_0\,\text{ημ}\,\alpha = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad t = \frac{\upsilon_0}{g}\,\text{ημ}\,\alpha$$

Το μέγιστο ύψος είναι

$$z_{\mu\epsilon\gamma} = z\left(\frac{\upsilon_0}{g}\,\text{ημ}\,\alpha\right) = -\frac{1}{2}g\frac{\upsilon_0^2}{g}\,\text{ημ}^2\,\alpha + \frac{\upsilon_0^2}{g}\,\text{ημ}^2\,\alpha = \frac{\upsilon_0}{2g}\,\text{ημ}^2\,\alpha$$

Το σώμα θα φθάσει στο μέγιστο μήκος (βεληνεκές) στο χρόνο που το $z(t)$ θα μηδενιστεί. Δηλαδή

$$z(t) = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad -\frac{1}{2}g\,t^2 + t\,\upsilon_0\,\text{ημ}\,\alpha = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad t = 2\frac{\upsilon_0}{g}\,\text{ημ}\,\alpha$$

και το βεληνεκές είναι

$$x_{\mu\epsilon\gamma} = x\left(2\frac{\upsilon_0}{g}\,\text{ημ}\,\alpha\right) = 2\frac{\upsilon_0}{g}\,\text{ημ}\,\alpha\,\text{συν}\,\alpha = \frac{\upsilon_0^2}{g}\,\text{ημ}\,2\alpha$$

Η λύση του προβλήματος είναι σε παραμετρική μορφή με παράμετρο τον χρόνο t. Μπορούμε να βρούμε την τροχιά του σώματος αν απαλείψουμε τον χρόνο t. Έχουμε

$$x(t) = t\,\upsilon_0\,\text{συν}\,a \qquad \Longrightarrow \qquad t = \frac{x}{\upsilon_0\,\text{συν}\,a}$$

Την τιμή αυτή του t την βάζουμε στην έκφραση του $z(t)$ και τελικά βρίσκουμε

$$z = \frac{-g}{2\upsilon_0^2\,\text{συν}^2\,\alpha}x^2 + \frac{\text{ημ}\,\alpha}{\text{συν}\,\alpha}x \tag{1}$$

Η τροχιά του σώματος είναι μια παραβολή.

Θεωρούμε την γωνία α σαν παράμετρο και θα υπολογίσουμε την περιβάλλουσα των παραβολών αυτών. Εργαζόμαστε ως εξής.

Παραγωγίσουμε ως προς την γωνία α την παραπάνω εξίσωση και έχουμε

$$0 = -\frac{gx^2}{2\upsilon_0^2}(-2)\frac{\text{ημ}\,\alpha}{\text{συν}^3\,\alpha} + \frac{x}{\text{συν}^2\,\alpha} \qquad \Longrightarrow \qquad 0 = -\frac{gx}{\upsilon_0^2}\frac{\text{ημ}\,\alpha}{\text{συν}\,\alpha} + 1$$

Από την σχέση αυτή και από την εξίσωση (1) της παραβολής θα απαλείψουμε την γωνία α. Έχουμε

$$\frac{\text{ημ}\,\alpha}{\text{συν}\,\alpha} = -\frac{\upsilon_0^2}{gx} \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{1}{\text{συν}^2\,\alpha} = 1 + \frac{\upsilon_0^4}{g^2x^2}$$

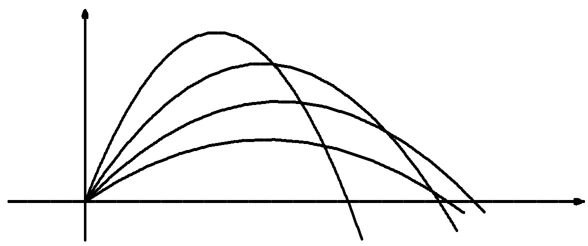
και επομένως η εξίσωση της παραβολής δίνει την σχέση

$$z = -\frac{gx^2}{2\upsilon_0^2}\left[\frac{\upsilon_0^4}{g^2x^2} + 1\right] + \frac{\upsilon_0^2}{gx}x = -\frac{g}{2\upsilon_0^2}x^2 + \frac{\upsilon_0^2}{2g}$$

που είναι επίσης μια παραβολή και ονομάζεται παραβολή ασφαλείας. Για δεδομένο $\vec{v}_0$ το βλήμα δεν θα υπερβεί την περιβάλλουσα παραβολή για οποιοδήποτε γωνίας α. Η εστία της παραβολής είναι στο σημείο

$$x = 0 \qquad\qquad z = \frac{v_0^2}{2g}$$

Το παρακάτω σχήμα δείχνει τις τροχιές του ίδιου σώματος για αρχικές ταχύτητες με το ίδιο μήκος και με διαφορετικές κλίσεις ως προς τον $x-$άξονα.



Σχήμα 2.18

Τροχιές με αρχικές ταχύτητες με ίδια μήκη και διαφορετικές κλίσεις

β) Δεχόμαστε τώρα ότι υπάρχει η τριβή του αέρα που είναι ανάλογη της ταχύτητας. Θα λύσουμε την εξίσωση του Νεύτωνα με τις δεδομένες αρχικές συνθήκες.

Έχουμε

$$-mg\vec{k} - mc\dot{\vec{r}} = m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} + g\vec{k} + c\dot{\vec{r}} = 0$$

Οι εξισώσεις της κινήσεως ως προς τον x και z άξονα είναι τώρα

$$\ddot{x} + c\dot{x} = 0 \qquad \ddot{z} + c\dot{z} + g = 0$$

με τις ίδιες αρχικές συνθήκες.

Ολοκληρώνουμε μια φορά τις παραπάνω σχέσεις. Με τη βοήθεια των αρχικών συνθηκών υπολογίζουμε και τις σταθερές που προκύπτουν. Έχουμε

$$\dot{x} + cx = \upsilon_0 \,\text{συν}\,\alpha \qquad \dot{z} + cz = -gt + \upsilon_0 \,\text{ημ}\,\alpha$$

Οι εξισώσεις είναι πρώτης τάξεως γραμμικές μη ομογενείς. Οι γενικές λύσεις τέτοιων εξισώσεων είναι το άθροισμα δύο μερικών λύσεων. Η μία είναι η λύση της ομογενούς που περιέχει και τις σταθερές που θα υπολογιστούν από τις αρχικές συνθήκες. Η άλλη είναι μία μερική λύση της μη ομογενούς

Η λύση της ομογενούς της πρώτης είναι

$$x_{\text{ομ}} = c\,e^{-ct}$$

ενώ μια μερική λύση της μη ομογενούς είναι προφανώς η

$$x_{\mu} = \frac{\upsilon_0}{c}\,\text{συν}\,\alpha$$

Θα λύσουμε τώρα την δεύτερη. Η λύση της ομογενούς είναι πάλι η

$$z_{\text{ομ}} = c'e^{-ct}$$

Για να βρούμε μία μερική λύση της μη ομογενούς εργαζόμαστε ως ακολούθως.

Υποθέτουμε ότι η ζητούμενη λύση είναι της μορφής

$$z_{\mu} = f(t)e^{-ct}$$

Αντικαθιστούμε την λύση αυτή στην διαφορική εξίσωση και έχουμε

$$\dot{f}e^{-ct} - cfe^{-ct} + cfe^{-ct} = gt - \upsilon_0 \,\text{ημ}\,\alpha \quad \Longrightarrow \quad \dot{f} = (gt - \upsilon_0 \,\text{ημ}\,\alpha)\, e^{-ct}$$

Ολοκληρώνουμε την παραπάνω σχέση και βρίσκουμε την συνάρτηση $f(t)$.

$$f(t) = \int (g\,t - \upsilon_0\,\text{ημ}\,\alpha)\,e^{-c\,t}dt \quad\Longrightarrow\quad f(t) = \Big(\frac{\upsilon_0}{c}\,\text{συν}\,\alpha - \frac{g}{c}\,t + \frac{g}{c^2}\Big)\,e^{-c\,t}$$

Από τις αρχικές συνθήκες υπολογίζουμε και τις σταθερές της ολοκληρώσεως. Το αποτέλεσμα είναι

$$x(t) = \big(1 - e^{-c\,t}\big)\,\frac{\upsilon_0}{c}\,\text{συν}\,\alpha \qquad\qquad z(t) = \big(1 - e^{-c\,t}\big)\,\Big(\frac{\upsilon_0}{c}\,\text{ημ}\,\alpha + \frac{g}{c^2}\Big) - \frac{g}{c}\,t$$

που είναι τελικά οι παραμετρικές εξισώσεις της τροχιάς.

Για να βρούμε την εξίσωση της τροχιάς θα απαλείψουμε τον χρόνο από τις δύο παραμετρικές εξισώσεις. Λύνουμε ως προς τον χρόνο και βρίσκουμε

$$z = \frac{x c}{\upsilon_0\,\text{συν}\,\alpha}\,\Big(\frac{\upsilon_0}{c}\,\text{ημ}\,\alpha + \frac{g}{c^2}\Big) - \frac{g}{c}\,t \quad\Longrightarrow\quad t = \frac{x}{\text{συν}\,\alpha}\,\Big(\frac{c}{g}\,\text{ημ}\,\alpha + \frac{1}{\upsilon_0}\Big) - \frac{c}{g}z$$

Αντικαθιστούμε στην πρώτη παραμετρική σχέση και βρίσκουμε την εξίσωση της τροχιάς.

$$\frac{x c}{\upsilon_0\,\text{συν}\,\alpha} = 1 - e^{-\frac{c x}{\text{συν}\,\alpha}\left(\frac{c}{g}\,\text{ημ}\,\alpha - \frac{1}{\upsilon_0}\right) + \frac{c^2}{g}\,z}$$

Μπορούμε να εργαστούμε όπως και στην προηγούμενη περίπτωση του κενού για να βρούμε ανάλογες εκφράσεις για το μέγιστο ύψος και το βεληνεκές. Μπορούμε επίσης να βρούμε τα μεγέθη αυτά με την βοήθεια του υπολογιστή.

Εδώ Θα βρούμε προσεγγιστηκές εκφράσεις για τα μεγέθη αυτά αναλύοντας τις λύσεις $x(t)$ και $z(t)$ ως προς την σταθερά c μέχρι τους όρους πρώτης τάξεως.

Υποθέτουμε

$$c << 1$$

και αναλύουμε το εκθετικό κατά Τέιλορ μέχρι c^2

$$e^{-c\,t} = 1 - c\,t + \frac{1}{2!}c^2 t^2 + \cdots$$

Αντικαθιστούμε την ανάλυση αυτή του εκθετικού στις λύσεις του προβλήματος και μετά από απλές πράξεις παίρνουμε

$$x(t) = \left(1 - \frac{1}{2}c\,t\right) t\,\upsilon_0\,\text{συν}\,a, \qquad z(t) = -\frac{1}{2}g\,t^2 + \left(1 - \frac{1}{2}c\,t\right) t\,\upsilon_0\,\text{ημ}\,\alpha$$

Το σώμα θα φθάσει στο μέγιστο ύψος της τροχιάς του σε χρόνο που βρίσκεται από την λύση της εξισώσεως

$$\frac{dz(t)}{dt} = 0$$

Παραγωγίζουμε και βρίσκουμε

$$-g\,t + (1 - c\,t)\,\upsilon_0\,\text{ημ}\,\alpha = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad t = \frac{\upsilon_0\,\text{ημ}\,\alpha}{g + c\,\upsilon_0\,\text{ημ}\,\alpha} \;<\; \frac{\upsilon_0}{g}\,\text{ημ}\,\alpha$$

Ο χρόνος αυτός είναι μικρότερος από τον χρόνο που θα φθάσει το βλήμα στο μέγιστο ύψος της τροχιάς του χωρίς τριβή. Σημειώστε ότι η γωνία α παίρνει τιμές στο διάστημα από 0 έως $\pi/2$ όπου το ημίτονο και το συνημίτονο είναι θετικοί αριθμοί.

Για το βεληνεκές του βλήματος πρέπει να λύσουμε την εξίσωση

$$z(t) = 0$$

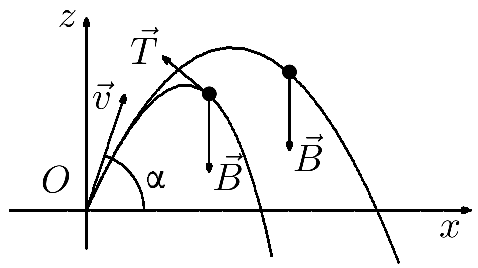
Η λύση της εξισώσεως αυτής δίνει για τον χρόνο που το βλήμα θα πέσει στο έδαφος την τιμή

$$t = \frac{2\upsilon_0\,\text{ημ}\,\alpha}{c\,\upsilon_0\,\text{ημ}\,\alpha + g} \;<\; 2\frac{\upsilon_0}{g}\,\text{ημ}\,\alpha$$

ενώ το βεληνεκές είναι

$$x_{\mu\varepsilon\gamma} = \frac{\upsilon_0^2\,\text{ημ}\,2\alpha}{c\,\upsilon_0\,\text{ημ}\,\alpha + g} - \frac{1}{2}c\,\upsilon_0\,\text{συν}\,\alpha\left(\frac{2\upsilon_0\,\text{ημ}\,\alpha}{c\,\upsilon_0\,\text{ημ}\,\alpha + g}\right)^2 \;<\; \frac{\upsilon_0^2}{g}\,\text{ημ}\,2\alpha$$

Είναι εύκολο να αποδείξουμε ότι όλες οι εκφράσεις καταλήγουν στις προηγούμενες εκφράσεις που έχουμε βρει για το ανάλογο πρόβλημα χωρίς τριβές στο όριο $c \to 0$.

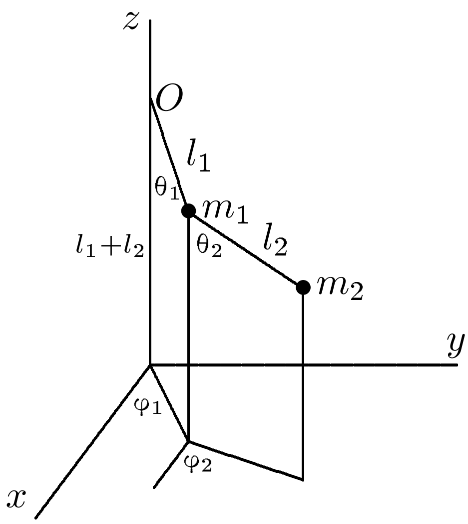


Σχήμα 2.19
Τροχιές όταν υπάρχει η τριβή του αέρα και όταν θεωρηθεί αμελητέα

Στο σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι τροχιές ενός σώματος που εκτοξεύεται με την ίδια αρχική ταχύτητα με συντελεστή τριβής α) $c = 0.1$ και β) $c = 0$.

Άσκηση 2.7

Να μελετηθεί το πρόβλημα του διπλού εκκρεμούς του σχήματος. Οι μάζες m_1 και m_2 κινούνται στον χώρο υπό την επίδραση του πεδίου βαρύτητας.



Σχήμα 2.20
Το διπλό εκκρεμές στον χώρο κινείται με την επίδραση της βαρύτητας

Λύση: Θεωρούμε σύστημα αξόνων με κέντρο το σημείο O. Συμβολίζουμε με

$$\vec{r}_1 = (x_1, y_1, z_1) \qquad \vec{r}_2 = (x_2, y_2, z_2)$$

τα διανύσματα θέσεως των μαζών m_1 και m_2. Ένα σύστημα δύο υλικών σημείων περιγράφεται από $2 \times 3 = 6$ ανεξάρτητες καρτεσιανές συντεταγμένες και άρα έχει 6 βαθμούς ελευθερίας. Το σύστημα της ασκήσεως υπόκειται σε δύο ολόνομους δεσμούς και επομένως δύο από τις μεταβλητές είναι εξαρτημένες. Οι βαθμοί ελευθερίας του συστήματος είναι επομένως $6 - 2 = 4$.

Οι δεσμοί μπορούν να εκφραστούν με τις ισότητες.

$$\|\vec{r}_1\| = l_1 \qquad\qquad \|\vec{r}_2 - \vec{r}_1\| = l_2$$

Οι σχέσεις απλοποιούνται αν εργαστούμε σε σφαιρικές συντεταγμένες. Το διάνυσμα $\vec{r}$ έχει σφαιρικές συντεταγμένες $r = l_1$, θ_1 και φ_1. Δηλαδή έχουμε

$$x_1 = l_1\, ημ\,\theta_1\, συν\,\varphi_1 \qquad\qquad y_1 = l_1\, ημ\,\theta_1\, ημ\,\varphi_1 \qquad\qquad z_1 = l_1\, συν\,\theta_1$$

Το διάνυσμα $\vec{r}_2 - \vec{r}_1$ έχει σφαιρικές συντεταγμένες $r_2 = l_2$, θ_2 και φ_2. Δηλαδή έχουμε

$$x_2 - x_1 = l_2\, ημ\,\theta_2\, συν\,\varphi_2 \qquad y_2 - y_1 = l_2\, ημ\,\theta_2\, ημ\,\varphi_2 \qquad z_2 - z_1 = l_2\, συν\,\theta_2$$

Επιλέγουμε τις γωνίες θ_1, φ_1 και θ_2, φ_2 να είναι οι τέσσερις γενικευμένες συντεταγμένες του προβλήματος. Έτσι οι δεσμοί ικανοποιούνται ταυτοτικά και οι συντεταγμένες του συστήματος εκφράζονται παραμετρικά από τις γενικευμένες συντεταγμένες. Οι σχέσεις είναι

$$\begin{aligned} x_1 &= l_1\, ημ\,\theta_1\, συν\,\varphi_1 & x_2 &= l_1\, ημ\,\theta_1\, συν\,\varphi_1 + l_2\, ημ\,\theta_2\, συν\,\varphi_2 \\ y_1 &= l_1\, ημ\,\theta_1\, ημ\,\varphi_1 & y_2 &= l_1\, ημ\,\theta_1\, ημ\,\varphi_1 + l_2\, ημ\,\theta_2\, ημ\,\varphi_2 \\ z_1 &= l_1\, συν\,\theta_1 & z_2 &= l_1\, συν\,\theta_1 + l_2\, συν\,\theta_2 \end{aligned}$$

Παραγωγίζουμε δύο φορές τις σχέσεις αυτές ως προς τον χρόνο και βρίσκουμε τις αντίστοιχες επιταχύνσεις του συστήματος. Θα βρούμε την δεύτερη παράγωγο ως προς τον χρόνο του x_1. Η πρώτη παράγωγος είναι

$$\frac{dx_1}{dt} = \frac{d\theta_1}{dt}\frac{\partial}{\partial\theta_1}x_1 + \frac{d\varphi_1}{dt}\frac{\partial}{\partial\varphi_1}x_1 = l_1\dot{\theta}_1\, συν\,\theta_1\, συν\,\varphi_1 - l_1\dot{\varphi}_1\, ημ\,\theta_1\, ημ\,\varphi_1$$

Παραγωγίζουμε μια φορά ακόμα και βρίσκουμε την δεύτερη παράγωγο.

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} = \frac{d\theta_1}{dt}\frac{\partial}{\partial\theta_1}\left(l_1\dot{\theta}_1\, συν\,\theta_1\, συν\,\varphi_1 - l_1\dot{\varphi}_1\, ημ\,\theta_1\, ημ\,\varphi_1\right)$$

$$+\frac{d\varphi_1}{dt}\frac{\partial}{\partial\varphi_1}\left(l_1\dot{\theta}_1\,\text{συν}\,\theta_1\,\text{συν}\,\varphi_1 - l_1\dot{\varphi}_1\,\text{ημ}\,\theta_1\,\text{ημ}\,\varphi_1\right) + l_1\ddot{\theta}_1\,\text{συν}\,\theta_1\,\text{συν}\,\varphi_1 -$$

$$l_1\ddot{\varphi}_1\,\text{ημ}\,\theta_1\,\text{ημ}\,\varphi_1 = -l_1\dot{\theta}_1^2\,\text{ημ}\,\theta_1\,\text{συν}\,\varphi_1 - 2l_1\dot{\theta}_1\dot{\varphi}_1\,\text{συν}\,\theta_1\,\text{ημ}\,\varphi_1 -$$

$$l_1\dot{\varphi}_1^2\,\text{ημ}\,\theta_1\,\text{συν}\,\varphi_1 + l_1\ddot{\theta}_1\,\text{συν}\,\theta_1\,\text{συν}\,\varphi_1 - l_1\ddot{\varphi}_1\,\text{ημ}\,\theta_1\,\text{ημ}\,\varphi_1$$

Δεν θα προχωρήσουμε τον υπολογισμό περισσότερο διότι οι σχέσεις είναι αρκετά μακροσκελείς.

Θα βρούμε τώρα τις δυνάμεις που ασκούνται στις δύο μάζες. Το πεδίο της βαρύτητας είναι συντηρητικό και η δυναμική του ενέργεια είναι ίση με mgh όπου h το ύψος που βρίσκεται το σώμα πάνω από το σημείο που η δυναμική ενέργεια είναι μηδέν. Επειδή το σύστημα μπορεί να ηρεμίσει σε απόσταση $1_1 + l_2$ κάτω από το σημείο O, διαλέγουμε αυτό το σημείο σαν το σημείο αναφοράς της δυναμικής ενέργειας.

Αν h_1 και h_2 είναι τα ύψη που βρίσκονται οι μάζες m_1 και m_2 από το επίπεδο αναφοράς βρίσκουμε

$$\begin{aligned} h_1 =& l_1 + l_2 - z_1 = l_1 + l_2 - l_1\,\text{συν}\,\theta_1 \\ h_2 =& l_1 + l_2 - z_2 = l_1 + l_2 - l_1\,\text{συν}\,\theta_1 - l_2\,\text{συν}\,\theta_2 \end{aligned}$$

Επομένως η δυναμική ενέργεια είναι

$$\begin{aligned} V = m_1 g\left(l_1 + l_2 - l_1\,\text{συν}\,\theta_1\right) + m_2 g\left(l_1 + l_2 - l_1\,\text{συν}\,\theta_1 - l_2\,\text{συν}\,\theta_2\right) = \\ g\left(m_1 + m_2\right)\left(l_1 + l_2\right) - g\left(m_1 + m_2\right) l_1\,\text{συν}\,\theta_1 - m_2 g l_2\,\text{συν}\,\theta_2 \end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι το δυναμικό δεν εξαρτάται από τις γωνίες φ_1 και φ_2.

Η δύναμη που ασκείται στο σωμάτιο m_1 από το πεδίο βαρύτητας είναι

$$\vec{F}_1 = -\vec{\nabla}_1 V = -\frac{\partial V}{\partial\vec{r}_1} = -\frac{1}{\frac{\partial\vec{r}}{\partial\theta_1}}\frac{\partial V}{\partial\theta_1} = -\left(\frac{1}{\frac{\partial x_1}{\partial\theta_1}}, \frac{1}{\frac{\partial y_1}{\partial\theta_1}}, \frac{1}{\frac{\partial z_1}{\partial\theta_1}}\right)\frac{\partial V}{\partial\theta_1}$$

Η δύναμη που ασκείται στο σωμάτιο m_2 είναι

$$\vec{F}_2 = -\vec{\nabla}_2 V = -\frac{\partial V}{\partial\vec{r}_2} = -\left(\frac{1}{\frac{\partial x_2}{\partial\theta_1}}, \frac{1}{\frac{\partial y_2}{\partial\theta_1}}, \frac{1}{\frac{\partial z_2}{\partial\theta_1}}\right)\frac{\partial V}{\partial\theta_1} - \left(\frac{1}{\frac{\partial x_2}{\partial\theta_2}}, \frac{1}{\frac{\partial y_2}{\partial\theta_2}}, \frac{1}{\frac{\partial z_2}{\partial\theta_2}}\right)\frac{\partial V}{\partial\theta_2}$$

Εκτελούμε τις παραπάνω παραγωγίσεις και μετά από απλές πράξεις βρίσκουμε

$$\vec{F}_1 = g\left(m_1 + m_2\right)\left(\frac{\text{ημ}\,\theta_1}{\text{συν}\,\theta_1\,\text{συν}\,\varphi_1}, \frac{\text{ημ}\,\theta_1}{\text{συν}\,\theta_1\,\text{ημ}\,\varphi_1}, -1\right)$$

$$\begin{aligned}\vec{F}_2 = g\left(m_1 + m_2\right)&\left(\frac{\text{ημ}\,\theta_1}{\text{συν}\,\theta_1\,\text{συν}\,\varphi_1}, \frac{\text{ημ}\,\theta_1}{\text{συν}\,\theta_1\,\text{ημ}\,\varphi_1}, -1\right) + \\ gm_2&\left(\frac{\text{ημ}\,\theta_2}{\text{συν}\,\theta_2\,\text{συν}\,\varphi_2}, \frac{\text{ημ}\,\theta_2}{\text{συν}\,\theta_2\,\text{ημ}\,\varphi_2}, -1\right)\end{aligned}$$

Γράφουμε τέλος τις εξισώσεις τις κινήσεως

$$\vec{F}_1 = m_1\dot{\vec{r}}_1 \qquad\qquad \vec{F}_2 = m_2\dot{\vec{r}}_2$$

Από τις έξι αυτές εξισώσεις της κινήσεως μόνο οι τέσσερις είναι ανεξάρτητες. Για την λύση τους θα χρειαστούμε μάλλον έναν υπολογιστή. Πάντως ένα πρώτο ολοκλήρωμα της κινήσεως είναι η ενέργεια που παραμένει σταθερή.

$$E = \frac{1}{2}m_1\dot{r}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{r}_2^2 + V$$

Κεφάλαιο 3

Ταλαντώσεις

3.1 Αρμονική ταλάντωση

Ονομάζουμε αρμονική ταλάντωση μια επαναλαμβανόμενη κίνηση ενός σώματος γύρω από ένα σημείο ευσταθούς ισορροπίας. Παράδειγμα τέτοιων κινήσεως είναι ένα εκκρεμές που κινείται υπό την επίδραση του βάρους του. Άλλο παράδειγμα είναι η κίνηση ενός σώματος που είναι δεμένο από κάποιο ελατήριο. Η κίνηση της χορδής ενός μουσικού οργάνου είναι επίσης μια αρμονική ταλάντωση. Αυτός είναι και ο λόγος που οι ταλαντώσεις ονομάστηκαν αρμονικές.

Απλές αρμονικές ταλαντώσεις περιγράφονται από συναρτήσεις της μορφής

$$x(t) = \mathrm{A}\,\text{συν}\,\omega\,t + \mathrm{B}\,\text{ημ}\,\omega\,t$$

Η παραπάνω έκφραση μπορεί επίσης να γραφεί και με την μορφή

$$x(t) = \Gamma\,\text{συν}\,(\omega\,t - \delta)$$

Αν αναπτύξουμε το συνημίτονο της παραπάνω σχέσεως με την βοήθεια του τύπου

$$\text{συν}\,(\omega\,t - \delta) = \text{συν}\,\omega\,t\,\text{συν}\,\delta + \text{ημ}\,\omega\,t\,\text{ημ}\,\delta$$

και συγκρίνουμε τις δυο εκφράσεις βρίσκουμε εύκολα ότι

$$\mathrm{A} = \Gamma\,\text{συν}\,\delta \qquad \mathrm{B} = \Gamma\,\text{ημ}\,\delta \qquad \Longrightarrow \qquad \Gamma = \sqrt{\mathrm{A}^2 + \mathrm{B}^2} \qquad \delta = \text{τοξεφ}(\mathrm{B}/\mathrm{A})$$

Μία ακόμα έκφραση μιας αρμονικής κινήσεως δίνεται από την μιγαδική συνάρτηση

$$x(t) = C_1 e^{i\omega\, t} + C_2 e^{-i\omega\, t}$$

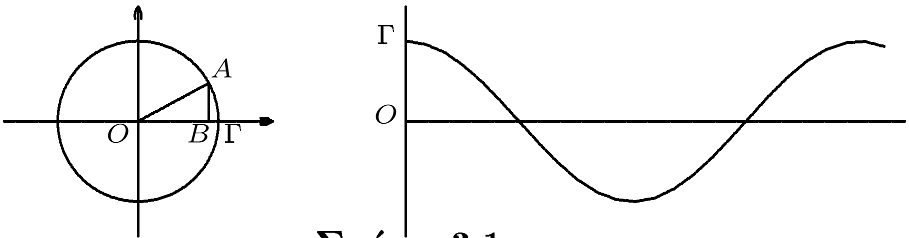
Είναι γνωστό ότι η μιγαδική συνάρτηση $e^{i\omega\, t}$ έχει πραγματικό μέρος το $\text{συν}\,\omega\, t$ και φανταστικό το $\text{ημ}\,\omega t$, δηλαδή ισχύουν οι σχέσεις

$$e^{i\omega\, t} = \text{συν}\,\omega\, t + i\,\text{ημ}\,\omega\, t \qquad\qquad e^{-i\omega\, t} = \text{συν}\,\omega\, t - i\,\text{ημ}\,\omega\, t$$

Αν αναλύσουμε τα εκθετικά από τις παραπάνω σχέσεις αποδεικνύεται εύκολα ότι

$$\mathrm{A} = C_1 + iC_2 \quad \mathrm{B} = C_1 - iC_2 \qquad \Longrightarrow \qquad C_1 = \frac{1}{2}(\mathrm{A}+\mathrm{B}) \quad C_2 = \frac{1}{2i}(\mathrm{A}-\mathrm{B})$$

Πολλές μαθηματικές εκφράσεις είναι απλούστερες αν εργαζόμαστε με τις εκθετικές συναρτήσεις. Ένα ακόμα πλεονέκτημα είναι ότι οι εκθετικές συναρτήσεις δεν αλλάζουν κατά την παραγώγιση ή την ολοκλήρωση.



Σχήμα 3.1
Απλή αρμονική ταλάντωση

Ένα υλικό σημείο κινείται με σταθερά γωνιακή ταχύτητα ω σε μια περιφέρεια ακτίνας x_0. Η προβολή του υλικού σημείου στην διάμετρο του κύκλου εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση γύρω από το σημείο 0. Η γωνία που διαγράφει η επιβατική ακτίνα του υλικού σημείου είναι ίση με $\varphi = \omega\, t$. Αν x είναι η απομάκρυνση της προβολής από το σημείο 0 τότε αυτή είναι ίση με

$$x(t) = x_0\, \text{συν}\,\omega\, t \qquad\qquad \varphi = \omega\, t$$

Το x_0 είναι η μεγαλύτερη απομάκρυνση από την θέση ισορροπίας και ονομάζεται πλάτος της ταλαντώσεως. Το όρισμα του συνημιτόνου $\varphi = \omega\, t$ ονομάζεται φάση και το ω κυκλική συχνότητα της ταλαντώσεως.

Η Περίοδος της ταλαντώσεως είναι ίση με $\mathrm{T} = 2\pi/\omega$. Πράγματι ισχύει η σχέση

$$x(t+\mathrm{T}) = x_0 \,\text{συν}\, \omega\,(t + 2\pi/\omega) = x_0 \,\text{συν}\,(\omega\, t + 2\pi) = x_0 \,\text{συν}\, \omega\, t = x(t)$$

Η δύναμη που εξασκείται ώστε το σώμα να εκτελεί μια τέτοια κίνηση είναι

$$F = m\frac{d^2x}{dt^2} = -m\omega^2 x_0 \,\text{συν}\, \omega\, t = -m\omega^2 x$$

Το αρνητικό σημείο σημαίνει ότι η δύναμη είναι αντίθετη της απομακρύνσεως και επομένως τείνει να επαναφέρει το υλικό σημείο στη θέση ισορροπίας.

Η εξίσωση κινήσεως μιας τέτοιας τροχιάς είναι

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0$$

Η δύναμη είναι αστρόβιλη και το δυναμικό βρίσκεται αν ολοκληρώσουμε την δύναμη. Εκτελούμε την ολοκλήρωση και βρίσκουμε

$$V(x) = -\int F(x)dx = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$$

Η θέση ευσταθούς ισορροπίας του υλικού σημείου είναι το σημείο $x = 0$ όπου η δυναμική ενέργεια γίνεται ελάχιστη. Το δυναμικό πεδίο είναι συντηρητικό και η ενέργεια είναι μία σταθερά της κινήσεως. Η ενέργεια είναι το άθροισμα της κινητικής και της δυναμικής ενέργεια. Βρίσκουμε

$$\mathrm{E} = \frac{1}{2}m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$$

Αν ολοκληρώσουμε την παραπάνω εξίσωση θα βρούμε πάλι την εξίσωση της τροχιάς. Λύνουμε την εξίσωση ως προς την ταχύτητα και βρίσκουμε

$$\frac{dx}{dt} = \pm\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - \frac{1}{2}m\omega^2 x^2\right)} = \pm\sqrt{\frac{2E}{m}\left(1 - \frac{m\omega^2}{2E}x^2\right)}$$

Ολοκληρώνουμε την εξίσωση και βρίσκουμε

$$t = \pm\int \frac{dx}{\sqrt{\frac{2E}{m}\left(1 - \frac{m\omega^2}{2E}x^2\right)}} = \pm\frac{1}{\omega}\int \frac{d\left(\sqrt{\frac{m\omega^2}{2E}}x\right)}{\sqrt{\left(1 - \frac{m\omega^2}{2E}x^2\right)}}$$

$$= \pm \frac{1}{\omega} \text{τοξσυν} \left(\sqrt{\frac{m\omega^2}{2E}} x \right) + C$$

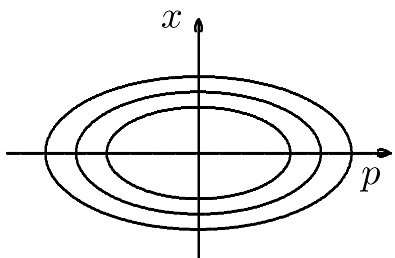
Διαλέγουμε τον χρόνο έτσι ώστε οι σταθερά να μηδενίζεται. Λύνουμε την εξίσωση ως προς x και παίρνουμε

$$x = x_0 \,\text{συν}\, \omega\, t \qquad \text{όπου} \qquad x_0 = \sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}}$$

Η λύση είναι φυσικά όμοια με την αρχική. Εδώ όμως το πλάτος της ταλαντώσεως δίνεται σαν συνάρτηση της ενέργειας.

Συνήθως γράφουμε την ενέργεια σαν συνάρτηση της ορμής παρά της ταχύτητας. Αν χρησιμοποιήσουμε την έκφραση $\upsilon = p/m$ έχουμε

$$\mathrm{E} = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega\, 2x^2 \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{p^2}{\left(\sqrt{2mE}\right)^2} + \frac{x^2}{\left(\sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}}\right)^2} = 1$$



Σχήμα 3.2
Γραφική παράσταση τριών αρμονικών ταλαντωτών στο χώρο των φάσεων

Η γραφική παράσταση της σχέσεως αυτής στον χώρο των φάσεων είναι μία έλλειψη. Για διάφορες τιμές τις ενέργειας παίρνουμε ομόκεντρες ελλείψεις. Οι ημιάξονες και το εμβαδόν των ελλείψεων αυτών είναι

$$a = \sqrt{\frac{2E}{m}} \qquad b = \sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}} = \frac{a}{\omega} \qquad \text{Εμβ} = \pi a b = \pi \frac{2E}{m\omega} = \pi x_0^2 \omega$$

Υποθέτουμε ότι έχουμε να λύσουμε το ακόλουθο πρόβλημα αρχικών τιμών

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0 \qquad \dot{x}(0) = v_0 \qquad x(0) = x_0$$

Η διαφορική εξίσωση έχει δύο ανεξάρτητες λύσεις

$$x_1 = \text{συν}\,\omega t \qquad\qquad x_2 = \text{ημ}\,\omega t$$

Οι λύσεις αυτές είναι ανεξάρτητες γιατί η ορίζουσα

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ x_1' & x_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \text{συν}\,\omega t & \text{ημ}\,\omega t \\ -\omega\,\text{ημ}\,\omega t & \omega\,\text{συν}\,\omega t \end{vmatrix} = \omega$$

είναι διαφορετική από το μηδέν. Επομένως η γενική λύση είναι ένας γραμμικός συνδυασμός αυτών των δύο μερικών λύσεων

$$x(t) = A\,\text{συν}\,\omega t + B\,\text{ημ}\,\omega t$$

Θα προσδιορίσουμε τώρα τις σταθερές Α και Β έτσι ώστε να ικανοποιούνται οι αρχικές συνθήκες. Έχουμε

$$x(0) = A = x_0$$

Επομένως η σταθερά Α είναι ίση με την αρχική θέση του υλικού σημείου. Η δεύτερη σταθερά υπολογίζεται από την αρχική ταχύτητα. Βρίσκουμε

$$\dot{x}(0) = (-A\omega\,\text{ημ}\,\omega t + B\omega\,\text{συν}\,\omega t)_{t=0} = \mathrm{B}\omega = v_0 \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{B} = v_0/\omega$$

Άρα η λύση της εξισώσεως που ικανοποιεί και τις αρχικές συνθήκες είναι

$$x(t) = x_0\,\text{συν}\,\omega t + \frac{v_0}{\omega}\,\text{ημ}\,\omega t$$

Ένα πρόβλημα στην κλασσική μηχανική θα λέμε ότι έχει λυθεί και επομένως το σύστημα είναι πλήρως ορισμένο αν ξέρουμε την θέση του και την ταχύτητα του (ή συνηθέστερα την θέση και την ορμή του) για κάθε χρονική στιγμή. Η θέση και η ταχύτητα του προβλήματος που λύνουμε εδώ δίνονται από τις σχέσεις

$$x(t) = x_0\,\text{συν}\,\omega t + \frac{v_0}{\omega}\,\text{ημ}\,\omega t, \qquad\qquad v(t) = v_0\,\text{συν}\,\omega t - x_0\omega\,\text{ημ}\,\omega t$$

Παρατηρούμε ότι η ενέργεια είναι σταθερή ως προς τον χρόνο. Πράγματι

$$\begin{aligned} \mathrm{E} = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 = \frac{1}{2}m\left(x_0\,\text{συν}\,\omega t + \frac{v_0}{\omega}\,\text{ημ}\,\omega t\right)^2 + \\ +\frac{1}{2}m\omega^2\left(v_0\,\text{συν}\,\omega t - x_0\omega\,\text{ημ}\,\omega t\right)^2 = \frac{1}{2}mv_0^2 + \frac{1}{2}m\omega^2 x_0^2 = E_0 \end{aligned}$$

3.2 Αποσβεννυμένη ταλάντωση

Θα θεωρήσουμε τώρα ότι υπάρχει μια ακόμα δύναμη που αντιδρά στη κίνηση του υλικού σημείου. Στην πράξη τέτοιες δυνάμεις υπάρχουν πάντα και η ταλάντωση βαθμιαία σβήνει με αποτέλεσμα τελικά την ισορροπία του συστήματος. Ένα παράδειγμα αποσβεννυμένης ταλαντώσεως είναι η κίνηση ενός εκκρεμούς στον αέρα όπου υπάρχει η αεροδυναμική τριβή. Προφανώς μια τέτοια δύναμη εξαρτάται από την ταχύτητα και ως εκ τούτου δεν προέρχεται από κανένα δυναμικό. Η ενέργεια δεν είναι μια σταθερά της κινήσεως αλλά ελαττώνεται με τον χρόνο. Η ενέργεια που χάνεται μετατρέπεται συνήθως σε θερμότητα.

Υποθέτουμε ότι η τριβή είναι ανάλογη της ταχύτητας $T = -c\upsilon$. Η εξίσωση κινήσεως στην προκείμενη περίπτωση είναι

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + m\omega^2 x = -c\left(\frac{dx}{dt}\right)$$

Γράφουμε την εξίσωση στην μορφή

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\rho\frac{dx}{dt} + \omega^2 x = 0 \qquad \text{όπου} \qquad \rho = \frac{c}{2m}$$

Υποθέτουμε επίσης ότι ισχύουν οι ακόλουθες αρχικές συνθήκες

$$x(0) = x_0 \qquad \dot{x}(0) = \upsilon_0$$

Η εξίσωση είναι μια διαφορική εξίσωση γραμμική ομογενής με σταθερούς συντελεστές. Τέτοιες διαφορικές εξισώσεις οποιασδήποτε τάξεως λύνονται ως εξής

Θέτουμε λύσεις της μορφής $x = e^{rt}$ όπου r είναι μία κατάλληλη σταθερά που πρέπει να υπολογίσουμε. Οι συναρτήσεις αυτές είναι ιδιοδιανύσματα των διαφορικών τελεστών d^n/dt^n με ιδιοτιμές r^n. Δηλαδή

$$\frac{d^n}{dt^n}e^{rt} = r^n e^{rt}$$

Έτσι η διαφορική εξίσωση μετατρέπεται σε μια αλγεβρική εξίσωση με άγνωστο το r που λύνεται εύκολα.

Εισάγουμε την λύση $x = e^{r\,t}$ στην διαφορική εξίσωση και έχουμε

$$r^2 e^{r\,t} + 2\rho r e^{r\,t} + \omega^2 r^2 e^{r\,t} = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad r^2 + 2\rho r + \omega^2 = 0$$

Η αλγεβρική εξίσωση έχει δύο λύσεις

$$r_1 = -\rho + \sqrt{\rho^2 - \omega^2} \qquad \text{και} \qquad r_2 = -\rho - \sqrt{\rho^2 - \omega^2}$$

Ανάλογα με την τιμή του ρ οι δύο αυτές ρίζες είναι πραγματικές και άνισες ή μιγαδικές και συζυγείς ή πραγματικές και ίσες. Διακρίνουμε τις εξής τρεις περιπτώσεις ανάλογα με το είδος των ριζών του τριωνύμου.

Στην περίπτωση που οι ρίζες είναι άνισες $r_1 \neq r_2$ τότε οι συναρτήσεις $x_1 = e^{r_1 t}$ και $x_2 = e^{r_1 t}$ είναι δύο ανεξάρτητες ιδιολύσεις της διαφορικής εξισώσεως και η γενική λύση είναι ένας γραμμικός συνδυασμός των δύο αυτών λύσεων.

$$x(t) = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t}$$

Περίπτωση 1. **Ασθενής απόσβεση**

Αν $\rho^2 < \omega^2$ τότε οι λύσεις είναι συζυγείς μιγαδικές.

Αν θέσουμε $\lambda = \sqrt{\omega^2 - \rho^2} \in \Re$ η γενική λύση γράφεται

$$x(t) = C_1 e^{(-\rho + i\lambda)t} + C_2 e^{(-\rho - i\lambda)t} = e^{-\rho\,t}\left(C_1 e^{i\lambda t} + C_2 e^{-i\lambda t}\right)$$

Η λύση αυτή είναι μια μιγαδική συνάρτηση. Μια άλλη λύση της διαφορικής εξισώσεως είναι της μορφής

$$x(t) = e^{-\rho t}\left(A\,\text{συν}\,\lambda t + B\,\text{ημ}\,\lambda t\right)$$

που είναι μια πραγματική συνάρτηση.

Θα προσδιορίσουμε τις σταθερές από τις αρχικές συνθήκες του προβλήματος. Έχουμε

$$x(0) = \left[e^{-\rho t}\left(A\,\text{συν}\,\lambda t + B\,\text{ημ}\,\lambda t\right)\right]_{t=0} = A = x_0$$

$$\dot{x}(0) = \left[-\rho e^{-\rho t}\left(A\,\text{συν}\,\lambda t + B\,\text{ημ}\,\lambda t\right) + e^{-\rho t}\left(-\lambda A\,\text{ημ}\,\lambda t + B\lambda\,\text{συν}\,\lambda t\right)\right]_{t=0} =$$

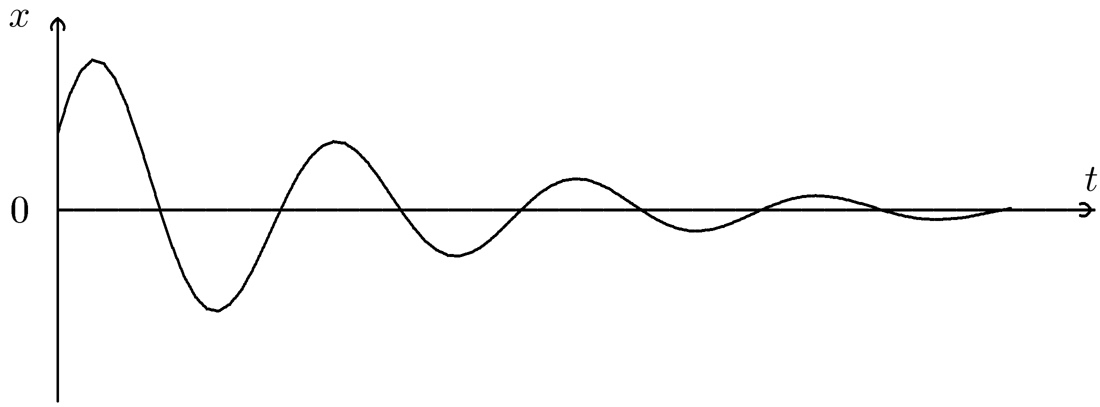
$$-\rho \mathrm{A} + \lambda \mathrm{B} = v_0$$

Οι δύο παραπάνω εξισώσεις είναι σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους τις σταθερές Α και Β. Η λύση του είναι

$$\mathrm{A} = x_0 \qquad\qquad B = \frac{1}{\lambda}\left(v_0 + \rho \mathrm{A}\right)$$

Κατά συνέπεια η λύση της διαφορικής εξισώσεως που ικανοποιεί και τις αρχικές συνθήκες είναι

$$x(t) = e^{-\rho t}\left(x_0\, \text{συν}\, \lambda t + \frac{v_0 + \rho x_0}{\lambda}\, \text{ημ}\, \lambda t\right)$$



Σχήμα 3.3
Αποσβενυμένος αρμονικός ταλαντωτής με μικρή απόσβεση

Στην περίπτωση αυτή η απόσβεση είναι μικρή και έτσι γίνονται ταλαντώσεις γύρω από το σημείο $x = 0$ της ευσταθούς ισορροπίας. Η περίοδος της ταλαντώσεως είναι $\mathrm{T} = 2\pi/\lambda$. Το πλάτος όμως της ταλαντώσεως λόγω του όρου $e^{-\rho\, t}$ ελαττώνεται με τον χρόνο και τελικά μηδενίζεται.

Θα υπολογίσουμε τώρα πόσο ελαττώνεται το πλάτος κατά την διάρκεια μια περιόδου. Την χρονική στιγμή t το πλάτος της ταλαντώσεως είναι $x(t)$ και την χρονική στιγμή $t+\mathrm{T}$ μετά από μία περίοδο είναι $x(t+\mathrm{T})$. Ο λόγος αυτών των δύο τιμών ονομάζεται λόγος αποσβέσεως. Όμως έχουμε

$$\begin{aligned} x(t+\mathrm{T}) &= e^{-\rho(t+\mathrm{T})}\left(\text{συν}\left(\lambda(t+\mathrm{T})\right) + \text{ημ}\left(\lambda(t+\mathrm{T})\right)\right) = \\ &= e^{-\rho \mathrm{T}} e^{-\rho t}\left(\text{συν}\left(\lambda t\right) + B\, \text{ημ}\left(\lambda t\right)\right) = e^{-\rho \mathrm{T}} x(t) \end{aligned}$$

Επομένως ο λόγος αποσβέσεως είναι $e^{\rho T}$ και είναι σταθερός ως προς τον χρόνο. Ο εκθέτης ρT ονομάζεται λογαριθμική μείωση.

Περίπτωση 2. **Ισχυρή απόσβεση**

Αν $\rho^2 > \omega^2$ οι δύο ρίζες του τρυωνύμου είναι πραγματικές και αρνητικές και άνισες $r_1 < r_2 < 0$. Έχουμε ισχυρή απόσβεση. Το σύστημα μετά από κάποιο χρονικό διάστημα $t \to \infty$ επιστρέφει στην θέση ισορροπίας $x = 0$. Η κίνηση δεν είναι περιοδική.

Η γενική λύση του προβλήματος είναι

$$x(t) = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t}$$

Για να ικανοποιούνται και οι αρχικές συνθήκες, οι σταθερές c_1 και c_2, πρέπει να είναι λύσεις του παρακάτω γραμμικού συστήματος.

$$c_1 + c_2 = x_0 \qquad\qquad r_1 c_1 + r_2 c_2 = \upsilon_0$$

Η λύση του συστήματος είναι

$$c_1 = \frac{x_0 r_2 - v_0}{r_2 - r_1} \qquad\qquad c_2 = -\frac{x_0 r_1 - v_0}{r_2 - r_1}$$

Τελικά η λύση του προβλήματος που ικανοποιεί και τις αρχικές συνθήκες είναι

$$x(t) = \frac{x_0 r_2 - v_0}{r_2 - r_1} e^{r_1 t} - \frac{x_0 r_1 - v_0}{r_2 - r_1} e^{r_2 t}$$

Η μεγαλύτερη τιμή που μπορεί να πάρει η συνάρτηση αυτή είναι μετά από χρόνο $t_{\mu\epsilon\gamma}$ που είναι λύση της εξισώσεως $dx/dt = 0$. Βρίσκουμε

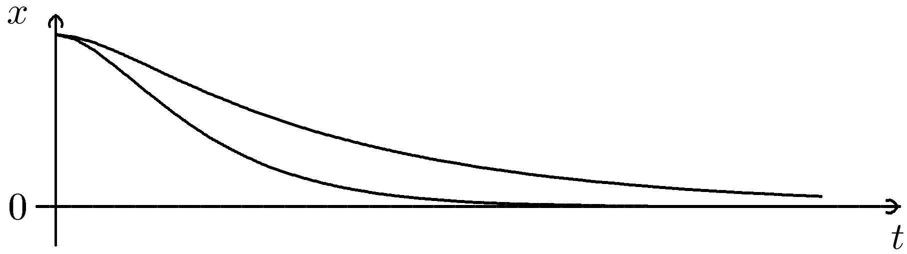
$$\frac{dx}{dt} = r_1 c_1 e^{r_1 t} + r_2 c_2 e^{r_2 t} = 0$$

Η λύση της εξισώσεως δίνει τον ζητούμενο χρόνο.

$$t_{\mu\epsilon\gamma} = \frac{1}{r_2 - r_1} \ln \frac{-c_1 r_1}{c_2 r_2} = \frac{1}{r_2 - r_1} \ln \frac{r_1}{r_2} \frac{v_0 - x_0 r_2}{v_0 - x_0 r_1}$$

Η εξίσωση έχει μια λύση. Αν η αρχική τιμή της ταχύτητας είναι μηδέν $v_0 = 0$ η τιμή του $t_{\mu\epsilon\gamma}$ είναι ίση με το μηδέν και επομένως $x_{\mu\epsilon\gamma} = x_0$.

Ένα υλικό σημείο που αφήνεται από την θέση της μέγιστης απομακρύνσεως $x = x_0$, επιστρέφει στο σημείο ισορροπίας $x = 0$ μετά από κάποιο χρονικό διάστημα χωρίς να το ξεπεράσει.



Σχήμα 3.4
Αποσβενυμένος ταλαντωτής. Κρίσιμη και ισχυρή απόσβεση

Περίπτωση 3. **Κρίσιμη απόσβεση**

Αν οι ρίζες του τρυωνύμου είναι ίσες $r_1 = r_2 = -\rho$ τότε έχουμε βρει μόνο μία λύση της διαφορικής εξισώσεως την $e^{-\rho t}$. Μια δεύτερη ανεξάρτητη λύση της διαφορικής εξισώσεως είναι η $te^{\rho t}$ και επομένως η γενική λύση είναι

$$x(t) = (\mathrm{A} + \mathrm{B}t)e^{-\rho t}$$

όπου οι σταθερές δίνονται από τις σχέσεις

$$\mathrm{A} = x_0 \qquad\qquad \mathrm{B} = \upsilon_0 + \rho x_0$$

ώστε να ικανοποιούνται και οι αρχικές συνθήκες. Επομένως η λύση του προβλήματος είναι

$$e^{-\rho t}\left(x_0 + t(x_0\rho + v_0)\right)$$

Την λύση αυτή μπορούμε να την βρούμε και από την λύση του προηγούμενου προβλήματος αν πάρουμε το όριο για $r_2 \to r_1$.

Η κίνηση είναι πάλι μη περιοδική. Αν το υλικό σημείο αφεθεί από την θέση $x = x_0$ χωρίς αρχική ταχύτητα τότε θα επιστρέψει στην θέση ισορροπίας, πιο γρήγορα από την προηγούμενη περίπτωση, χωρίς να την ξεπεράσει

3.3 Εξαναγκασμένη ταλάντωση

Εάν στα προηγούμενα συστήματα των αρμονικών ταλαντωτών επιδράσει επί πλέον και μια εξωτερική δύναμη που είναι συνάρτηση του χρόνου τότε έχουμε μια εξαναγκασμένη ταλάντωση. Μια ενδιαφέρουσα περίπτωση είναι εκείνη που η εξωτερική δύναμη είναι περιοδική περιόδου Ω της μορφής $f_0\,\text{ημ}\,\Omega t$ ή $f_0 cos\Omega t$.

Για να αντιμετωπίσουμε και τις δύο περιπτώσεις μαζί θα θεωρήσουμε μια εξωτερική δύναμη της μορφής $e^{i\Omega t}$. Η λύση της διαφορικής εξισώσεως θα είναι μια μιγαδική συνάρτηση. Το πραγματικό μέρος της λύσεως θα είναι η λύση της περιπτώσεως που η εξωτερική δύναμη είναι ανάλογη του συνημιτόνου και το φανταστικό η περίπτωση του ημιτόνου

Αν απλοποιήσουμε επουσιώδης παραμέτρους η εξίσωση της κινήσεως του συστήματος είναι.

$$\ddot{x} + 2\rho\dot{x} + \omega^2 x = f_0 e^{i\Omega t} = f_0\left(\text{συν}\,\Omega t + i\,\text{ημ}\,\Omega t\right)$$

Η διαφορική εξίσωση είναι γραμμική μη ομογενής. Η γενική λύση είναι το άθροισμα της λύσεως της ομογενούς και μιας μερικής λύσεως της μη ομογενούς. Η λύση της ομογενούς περιέχει και τις δύο αυθαίρετες σταθερές και επομένως περιέχει τις αρχικές συνθήκες του προβλήματος. Την ομογενή εξίσωση την έχουμε λύσει στις προηγούμενες παραγράφους. Θα βρούμε μια μερική λύση.

Υποθέτουμε ότι η μερική λύση είναι της μορφής $x_\mu = Be^{i\Omega t}$ και θα προσδιορίσουμε την σταθερά B. Αντικαθιστούμε της λύση στην διαφορική εξίσωση απλοποιούμε και βρίσκουμε τελικά

$$B = \frac{f_0}{\omega^2 - \Omega^2 + 2i\rho\Omega} = f_0\frac{\omega^2 - \Omega^2 - 2i\rho\Omega}{(\omega^2 - \Omega^2)^2 + 4\rho^2\Omega^2}$$

Παρατηρούμε ότι όταν δεν υπάρχει τριβή $\rho = 0$ τότε το πλάτος B της μερικής λύσεως μεγαλώνει απεριόριστα όσο το Ω πλησιάζει την τιμή ω. Το φαινόμενο ονομάζεται συντονισμός. Όταν $\Omega = \omega$ το πλάτος γίνεται άπειρο και πρέπει να αναζητήσουμε άλλη μερική λύση.

Αντιθέτως όταν υπάρχει απόσβεση ρ όσο μικρή και αν είναι το πλάτος γίνεται μεγάλο για $\Omega \to \omega$ αλλά δεν απειρίζεται.

Παρατήρηση: Η γενική λύση του προβλήματος του αποσβεννυμένου αρμονικού ταλαντωτή με εξωτερική δύναμη είναι

$$x = e^{-\rho t}x_1 + Be^{i\Omega t}$$

Ο πρώτος όρος περιέχει τον παράγοντα $e^{-\rho t}$ και μετά από ένα χρονικό διάστημα ο όρος αυτός που περιέχει και τις αρχικές συνθήκες μηδενίζεται.

Δηλαδή μετά από ένα μεγάλο χρονικό διάστημα οι αρχικές συνθήκες δεν παίζουν κανένα ρόλο στην εξέλιξη του φαινομένου.

Θα βρούμε τώρα μια μερική λύση του προβλήματος του αρμονικού ταλαντωτή χωρίς τριβή όταν $\Omega = \omega$ και η εξωτερική δύναμη είναι ίση με

$$f = f_0 e^{i\omega\, t}$$

Υποθέτουμε ότι η μερική λύση έχει την μορφή $x_\mu = \Gamma t e^{i\omega t}$. Αντικαθιστούμε την λύση αυτή στην διαφορική εξίσωση και βρίσκουμε το Γ. ΄Εχουμε

$$\frac{d^2}{dt^2}\Gamma t e^{i\omega t} + \omega^2 \Gamma t e^{i\omega t} = 2i\omega\Gamma e^{i\omega t} - \omega^2\Gamma t e^{i\omega t} + \omega^2 \Gamma t e^{i\omega t} = 2i\omega\Gamma e^{i\omega t} = f_0 e^{i\omega t}$$

οπότε $\Gamma = f_0/2i\omega\Gamma$ και η ζητούμενη μερική λύση είναι

$$x_\mu = -i\frac{f_0}{2\omega} t e^{i\omega t}$$

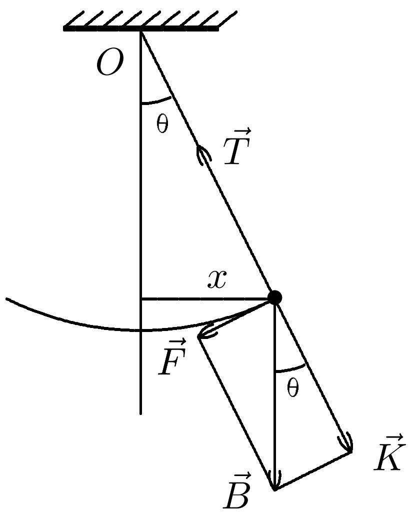
Για παράδειγμα γράφουμε πιο κάτω την διαφορική εξίσωση ενός αρμονικού ταλαντωτή με εξωτερική δύναμη και τη γενική λύση της

$$\ddot{x} + \omega^2 x = f_0 \,\text{συν}\, \omega\, t \qquad\qquad x(t) = x_0 \,\text{συν}\, \omega\, t + \frac{2\upsilon_0 + f_0 t}{2\omega}\, \text{ημ}\, \omega\, t$$

Ασκήσεις

Άσκηση 3.1

Ένα υλικό σημείο μάζας m είναι κρεμασμένο από ένα σημείο O με ένα αβαρές νήμα μήκους l. Το υλικό σημείο απομακρύνεται λίγο από το κατώτατο σημείο ευσταθούς ισορροπίας και αφήνεται να κινηθεί υπό την επίδραση του βάρους του. Να μελετηθεί η κίνηση στο κενό. Να λάβετε υπόψη την περιστροφή της γης (εκκρεμές Φουκώ).



Σχήμα 3.5
Το απλό εκκρεμές

Λύση: Ονομάζουμε θ τη γωνία του νήματος με την κατακόρυφο και x την κάθετο απόσταση της μάζας από την κατακόρυφο. Έχουμε ότι

$$x = l\,\text{ημ}\,\theta$$

Αναλύουμε το βάρος του σώματος $\mathrm{B} = mg$ σε δύο συνιστώσες. Μία κατά την διεύθυνση του νήματος και μία κάθετο προς αυτή. Η δεύτερη δύναμη είναι

$$F = mg\,\text{ημ}\,\theta$$

και είναι αυτή που κινεί την μάζα, ενώ η πρώτη ισορροπεί από την τάση του νήματος. Η κίνηση γίνεται σε ένα επίπεδο που περιέχει την κατακόρυφο.

Η επιτάχυνση ως γνωστό αναλύεται σε δύο συνιστώσες μία εφαπτομενική της τροχιάς ίση με d^2s/dt^2 και μία κεντρομόλο. Η κεντρομόλος ισορροπεί από την τάση του νήματος ενώ η επιτρόχιος είναι ίση με την δύναμη που κινεί την μάζα. Έχουμε

$$m\frac{d^2s}{dt^2} = -mg\,\text{ημ}\,\theta$$

Επειδή επί πλέον $s = l\theta$ βρίσκουμε την εξίσωση της κινήσεως του εκκρεμούς

$$\ddot{\theta} + \omega^2\,\text{ημ}\,\theta = 0 \qquad\qquad \omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

Για μικρές γωνίες μπορούμε να αντικαταστήσουμε το $\text{ημ}\,\theta$ με το θ και να γράψουμε την εξίσωση

$$\ddot{\theta} + \omega^2\theta = 0$$

Το πρόβλημα έχει λυθεί και η λύση που ικανοποιεί και τις αρχικές συνθήκες $\theta(0) = \theta_0$, και $\dot{\theta}(0) = \dot{\theta}_0$ είναι

$$\theta(t) = \theta_0\,\text{συν}\,\omega\,t + \frac{\dot{\theta}_0}{\omega}\,\text{ημ}\,\omega\,t$$

Είναι δηλαδή μια αρμονική κίνηση με περίοδο $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ ανεξάρτητη της μάζας του σώματος.

Θα λύσουμε τώρα την διαφορική εξίσωση της κινήσεως για οποιαδήποτε γωνία. Η διαφορική εξίσωση δεν περιέχει αναλυτικά την μεταβλητή t και τέτοιες εξισώσεις μπορούμε να υποβιβάσουμε την τάξη του κατά ένα αν θεωρήσουμε σαν άγνωστη συνάρτηση την $\dot{\theta}$ και μεταβλητή την συνάρτηση θ. Θέτουμε $\dot{\theta} = u(\theta)$ και έχουμε

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{du}{dt} = \frac{du}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = u\frac{du}{d\theta}$$

Η εξίσωση κινήσεως γίνεται

$$u\frac{du}{d\theta} + \omega^2 \,\text{ημ}\,\theta = 0$$

Η εξίσωση αυτή είναι μια εξίσωση που μπορούμε να διαχωρίσουμε τις μεταβλητές u και θ και να ολοκληρώσουμε. Βρίσκουμε

$$udu = -\omega^2 \,\text{ημ}\,\theta d\theta \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{2}u^2 = \omega^2 \,\text{συν}\,\theta + c$$

Η σταθερά υπολογίζεται από τις αρχικές συνθήκες.

Για να απλοποιήσουμε τις εκφράσεις θεωρούμε τις εξής αρχικές συνθήκες. Για $t = 0$ τότε $\theta = \theta_0$ και $\dot{\theta} = u = 0$ επομένως $c = -\omega^2 \,\text{συν}\,\theta_0$ και η λύση που ικανοποιεί και τις αρχικές συνθήκες είναι

$$u = \sqrt{2}\omega\sqrt{\text{συν}\,\theta - \text{συν}\,\theta_0}$$

Μία ακόμα ολοκλήρωση δίνει τελικά την λύση. Έχουμε

$$u = \frac{d\theta}{dt} = \sqrt{2}\omega\sqrt{\text{συν}\,\theta - \text{συν}\,\theta_0} \quad \Longrightarrow \quad t = \frac{1}{\sqrt{2}\omega}\int \frac{d\theta}{\sqrt{\text{συν}\,\theta - \text{συν}\,\theta_0}}$$

Το ολοκλήρωμα είναι ένα ελλειπτικό ολοκλήρωμα και δεν μπορεί να λυθεί ακριβώς με στοιχειώδης συναρτήσεις.

Η περίοδος του εκκρεμούς είναι

$$\mathrm{T} = \frac{4}{\sqrt{2}\omega}\int_0^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{\text{συν}\,\theta - \text{συν}\,\theta_0}}$$

Με την βοήθεια της ταυτότητας $cos\theta = 2\,\text{ημ}\,\theta/2 - 1$ και με τον μετασχηματισμό $\text{ημ}\,\theta/2 = \text{ημ}\,\theta_0/2\,\text{ημ}\,\varphi$, η παραπάνω εξίσωση τελικά γίνεται

$$\mathrm{T} = \frac{4}{\omega}\int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \,\text{ημ}^2\,\varphi}} \qquad\qquad k = \text{ημ}\,\theta_0/2$$

Θα βρούμε μια προσεγγιστική έκφραση του ολοκληρώματος. Χρησιμοποιούμε την ακόλουθη ανάλυση σε σειρά Τέηλορ

$$(1+x)^a = 1 + ax + \frac{a(a-1)}{2!}x^2 + \frac{a(a-1)(a-2)}{3!}x^3 + \cdots \qquad\qquad |x| < 1$$

και το ολοκλήρωμα γίνεται

$$\mathrm{T} = \frac{4}{\omega}\int_0^{\pi/2} d\varphi \left(1 + \frac{1}{2}k^2\,\eta\mu^2\varphi + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}k^4\,\eta\mu^4\varphi + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}k^6\,\eta\mu^6\varphi + \cdots\right)$$

Εκτελούμε την ολοκλήρωση και βρίσκουμε

$$\mathrm{T} = \frac{2\pi}{\omega}\left(1 + \frac{1}{4}\,\eta\mu^2\frac{\theta_0}{2} + \frac{9}{64}\,\eta\mu^4\frac{\theta_0}{2} + \frac{225}{2304}\,\eta\mu^6\frac{\theta_0}{2} + \cdots\right)$$

Για μικρές γωνίες τα ημίτονα είναι μηδέν και η περίοδος είναι πάλι $\mathrm{T} = 2\pi/\omega$. Για γωνία $\theta_0 = 5^o$ το σφάλμα της πραγματικής τιμής από την τιμή $\mathrm{T} = 2\pi/\omega$ είναι $0,05\%$.

Θα λύσουμε τώρα το ίδιο πρόβλημα για μικρές γωνίες όπου θα λάβουμε υπόψη και την κίνηση της γης γύρω από τον άξονα της. Η κίνηση αν αγνοήσουμε την κατακόρυφη κίνηση σαν πολύ μικρή γίνεται σε ένα οριζόντιο επίπεδο xy. Η περιστροφή της γης γίνεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα $\vec{\Omega}$ το διάνυσμα αυτό έχει την διεύθυνση του άξονα περιστροφής. Λόγω περιστροφής εμφανίζεται η δύναμη Κοριόλις που δίνεται από την σχέση

$$\vec{F} = 2\vec{\Omega}\times\vec{\upsilon} = 2(\Omega_1,\Omega_2,\Omega_3)\times(\dot{x},\dot{y},0) = 2(\Omega_3\dot{y}, -\Omega_3\dot{x}, F_z)$$

Η τρίτη συνιστώσα της δυνάμεως F_z δεν μας ενδιαφέρει και δεν την γράφουμε αναλυτικά. Το Ω_3 είναι για γεωγραφικό πλάτος λ ίσο με $\Omega\,\eta\mu\,\lambda$. Επομένως για τους άξονες x και y έχουμε τις εξισώσεις κινήσεως

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 2\Omega_3\dot{y} \qquad\qquad \ddot{y} + \omega^2 y = -2\Omega_3\dot{x}$$

Τις παραπάνω εξισώσεις θα τις λύσουμε και τις δύο μαζί.

Πολλαπλασιάζουμε την δεύτερη εξίσωση με το i και προσθέτουμε κατά μέλη. Θέσουμε μετά $z = x + iy$ στην εξίσωση και έχουμε

$$\ddot{z} + \omega^2 z = -2i\Omega_3\dot{z}$$

Η εξίσωση περιγράφει έναν αρμονικό ταλαντωτή με φανταστική τριβή ίση με $i\Omega_3$. Αν θεωρήσουμε το Ω_3 πολύ μικρότερο από το ω, $(\Omega_3 << \omega)$ τότε η λύση είναι

$$z = x + iy = e^{-i\Omega_3 t}\left(A\,\sigma\upsilon\nu\,\omega t + B\,\eta\mu\,i\omega t\right)$$

και επομένως το πραγματικό μέρος της λύσεως είναι το x και το φανταστικό το y.

$$x = (A\,\text{συν}\,\omega t + B\,\text{ημ}\,i\omega t)\,\text{συν}\,\Omega_3 t \qquad y = -\,(A\,\text{συν}\,\omega t + B\,\text{ημ}\,i\omega t)\,\text{ημ}\,\Omega_3 t$$

Σε διανυσματική μορφή έχουμε

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} = (A\,\text{συν}\,\omega t + B\,\text{ημ}\,i\omega t)\,\vec{n} \qquad \text{όπου} \qquad \vec{n} = \text{ημ}\,\Omega_3 t\vec{i} - \text{συν}\,\Omega_3 t\vec{j}$$

Το διάνυσμα $\vec{n}$ έχει την διεύθυνση της τροχιάς του εκκρεμούς βρίσκεται δηλαδή πάνω στο επίπεδο της τροχιάς. Άρα το επίπεδο αυτό περιστρέφεται με τον χρόνο όπως περιστρέφεται και το διάνυσμα $\vec{n}$.

Την χρονική στιγμή $t = 0$ το διάνυσμα έχει την διεύθυνση του $-\vec{j}$ δηλαδή δείχνει την δύση. Μετά από ένα χρονικό διάστημα ας πούμε ίσο με $t = \pi/2\Omega_3$ τότε το διάνυσμα $\vec{n}$ έχει την διεύθυνση του $\vec{i}$ δηλαδή δείχνει τον νότο. Η περιστροφή του επιπέδου γίνεται κατά την ανάδρομο φορά. Στο νότιο ημισφαίριο η περιστροφή αυτή γίνεται κατά την ορθή φορά.

Το επίπεδο της τροχιά εκτελεί μια πλήρη περιστροφή μετά από χρόνο

$$\tau = \frac{2\pi}{\Omega_3} = \frac{2\pi}{\Omega\,\text{ημ}\,\lambda}$$

Σε γεωγραφικό πλάτος 38^o η περίοδος είναι ίση με $\tau = 40$ ώρες περίπου. Την μικρότερη τιμή το μέγεθος έχει ακριβώς πάνω στους πόλους όπου $\lambda = \pi/2$ και $\tau = 2\pi/\Omega = 24h$.

Άσκηση 3.2

Ένα σωματίδιο μάζας m κινείται στο επίπεδο xy. Στο σωματίδιο εφαρμόζεται η δύναμη $\vec{F} = -kx\vec{i} - ky\vec{j}$. Οι αρχικές συνθήκες του προβλήματος είναι $\vec{r}(0) = \vec{r}_0$ και $\dot{\vec{r}}(0) = \dot{\vec{r}}_0$. Να δείξετε ότι το σωματίδιο διαγράφει μία έλλειψη.

Λύση: Οι εξισώσεις κινήσεως στους άξονες x και y είναι αρμονικοί ταλαντωτές με συχνότητα $\omega = \sqrt{k/m}$. Η λύσεις των εξισώσεων αυτών είναι

$$x = x_0\,\text{συν}\,\omega t + \frac{\dot{x}_0}{\omega}\,\text{ημ}\,\omega t \qquad y = y_0\,\text{συν}\,\omega t + \frac{\dot{y}_0}{\omega}\,\text{ημ}\,\omega t$$

Οι εξισώσεις αυτές είναι οι παραμετρικές εξισώσεις της καμπύλης. Θα απαλείψουμε την παράμετρο t από τις εξισώσεις αυτές. Λύνουμε τις εξισώσεις ως προς $\text{συν}\,\omega t$ και $\text{ημ}\,\omega t$. Το σύστημα είναι γραμμικό. Βρίσκουμε

$$\text{συν}\,\omega t = \frac{x\dot{y}_0 - y\dot{x}_0}{x_0\dot{y}_0 - y_0\dot{x}_0} \qquad\qquad \text{ημ}\,\omega t = \omega\,\frac{x_0 y - y_0 x}{x_0\dot{y}_0 - y_0\dot{x}_0}$$

Η εξίσωση της τροχιάς προκύπτει από την σχέση $\text{συν}^2\,\omega t + \text{ημ}^2\,\omega t = 1$ και είναι

$$\left(\frac{x\dot{y}_0 - y\dot{x}_0}{x_0\dot{y}_0 - y_0\dot{x}_0}\right)^2 + \omega^2\left(\frac{x_0 y - y_0 x}{x_0\dot{y}_0 - y_0\dot{x}_0}\right)^2 = 1 \quad\Longrightarrow$$

$$x^2\left(\dot{y}_0^2 + \omega^2 y_0^2\right) - 2xy\left(\dot{x}_0\dot{y}_0 + \omega^2 x_0 y_0\right) + y^2\left(\dot{x}_0^2 + \omega^2 x_0^2\right) = \left(x_0\dot{y}_0 - y_0\dot{x}_0\right)^2$$

Η τροχιά είναι μία κωνική τομή. Παρατηρούμε ότι

$$\left(\dot{x}_0\dot{y}_0 + \omega^2 x_0 y_0\right)^2 - \left(\dot{y}_0^2 + \omega^2 y_0^2\right)\left(\dot{x}_0^2 + \omega^2 x_0^2\right) = -\omega^2\left(x_0\dot{y}_0 - \dot{x}_0 y_0\right) < 1$$

και επομένως πρόκειται γενικά για έλλειψη. Εκτός αν

$$x_0\dot{y}_0 - \dot{x}_0 y_0 = 0 \quad\Longrightarrow\quad \frac{x_0}{y_0} = \frac{\dot{x}_0}{\dot{y}_0} = \lambda$$

οπότε $x = \lambda y$ και η τροχιά είναι ευθεία.

Η τροχιά είναι κύκλος αν

$$\dot{y}_0^2 + \omega^2 y_0^2 = \dot{x}_0^2 + \omega^2 x_0^2 \quad\Longrightarrow\quad E = \frac{1}{2}m\dot{x}_0^2 + \frac{1}{2}kx_0^2 = \frac{1}{2}m\dot{y}_0^2 + \frac{1}{2}ky_0^2$$

Άσκηση 3.3

Ένα υλικό σημείο εκτελεί ταυτόχρονα δύο ταλαντώσεις. Να βρεθεί η συνισταμένη ταλάντωση όταν οι δύο ταλαντώσεις έχουν α) διαφορετικά πλάτη, διαφορετική φάση και ίση συχνότητα και β) ίσα πλάτη και διαφορετική συχνότητα

Λύση: Υποθέτουμε ότι οι ταλαντώσεις για την περίπτωση α) περιγράφονται από τις συναρτήσεις

$$x_1 = A_1\,\text{συν}\,(\omega\,t + \varphi_1) \qquad\qquad x_1 = A_2\,\text{συν}\,(\omega\,t + \varphi_2)$$

Η συνισταμένη ταλάντωση είναι το άθροισμα των συναρτήσεων αυτών.

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t) = A_1\,\sigma\upsilon\nu\,(\omega\,t + \varphi_1) + A_2\,\sigma\upsilon\nu\,(\omega\,t + \varphi_1)$$

Αναλύουμε τα συνημίτονα και βρίσκουμε

$$x(t) = A_1\,(\sigma\upsilon\nu\,\omega\,t\,\sigma\upsilon\nu\,\varphi_1 - \eta\mu\,\omega\,t\,\eta\mu\,\varphi_1) + A_2\,(\sigma\upsilon\nu\,\omega\,t\,\sigma\upsilon\nu\,\varphi_2 - \eta\mu\,\omega\,t\,\eta\mu\,\varphi_2) =$$

$$= B_1\,\sigma\upsilon\nu\,\omega\,t - B_2\,\eta\mu\,\omega\,t$$

όπου έχει τεθεί

$$\mathrm{B}_1 = \mathrm{A}_1\,\sigma\upsilon\nu\,\varphi_1 + \mathrm{A}_2\,\sigma\upsilon\nu\,\varphi_2 \qquad \mathrm{B}_2 = \mathrm{A}_1\,\eta\mu\,\varphi_1 + \mathrm{A}_2\,\eta\mu\,\varphi_2$$

Την σχέση αυτή θέλουμε να την γράψουμε με την μορφή

$$x(t) = A\,\sigma\upsilon\nu\,(\omega\,t + \varphi)$$

Αναλύουμε το συνημίτονο και βρίσκουμε

$$x(t) = \mathrm{A}\,\sigma\upsilon\nu\,\omega\,t\,\sigma\upsilon\nu\,\varphi - \mathrm{A}\,\eta\mu\,\omega\,t\,\eta\mu\,\varphi$$

Για να είναι ίσες οι δύο σχέσεις πρέπει να ισχύουν οι παρακάτω ισότητες

$$\mathrm{A}\,\sigma\upsilon\nu\,\varphi = \mathrm{B}_1 \qquad \mathrm{A}\,\eta\mu\,\varphi = \mathrm{B}_2$$

Η λύση του συστήματος αυτού δίνει το ζητούμενο πλάτος Α και τη ζητούμενη φάση φ της συνισταμένης ταλαντώσεως. Βρίσκουμε

$$\mathrm{A} = \sqrt{\mathrm{B}_1^2 + \mathrm{B}_2^2} \qquad \varphi = \tau o\xi\varepsilon\varphi\,\mathrm{B}_2/\mathrm{B}_1$$

Υποθέτουμε ότι οι ταλαντώσεις για την περίπτωση β) περιγράφονται από τις συναρτήσεις

$$x_1 = A\,\sigma\upsilon\nu\,(\omega_1\,t) \qquad x_2 = A\,\sigma\upsilon\nu\,(\omega_2\,t)$$

Η συνισταμένη ταλάντωση στην περίπτωση αυτή είναι

$$x(t) = A\,(\sigma\upsilon\nu\,(\omega_1\,t) + \sigma\upsilon\nu\,(\omega_2\,t)) = 2A\,\sigma\upsilon\nu\,\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t\,\eta\mu\,\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t$$

Η ταλάντωση έχει συχνότητα ίση με το ημιάθροισμα των δύο συχνοτήτων και πλάτος που μεταβάλλεται με τον χρόνο. Ενδιαφέρον παρουσιάζει η περίπτωση που η συχνότητες διαφέρουν λίγο μεταξύ τους.

Ενδιαφέρουσα είναι επίσης η περίπτωση που οι συχνότητες είναι ακέραια πολλαπλάσια μιας βασικής συχνότητας $\omega_0 = 2\pi/T$. Τέτοιες ταλαντώσεις περιγράφονται από συναρτήσεις της μορφής

$$x_n(t) = A_n \,\text{συν}\left(n\frac{2\pi}{T}t\right) + B_n \,\text{ημ}\left(n\frac{2\pi}{T}t\right) \qquad n = 0, 1, 2, \cdots$$

Η συνισταμένη ταλάντωση για όλα τα n δίνεται από την σχέση

$$f(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n \,\text{συν}\left(n\frac{2\pi}{T}t\right) + B_n \,\text{ημ}\left(n\frac{2\pi}{T}t\right)\right)$$

και είναι μια ταλάντωση με την ίδια περίοδο.

$$f(t) = f(t + \mathrm{T})$$

΄Εχουμε γράψει τον παράγοντα για $n = 0$ χωριστά για τυπικούς λόγους.

Αντιστρόφως ισχύει και η πρόταση. Κάτω από ορισμένες προϋποθέσεις που συνήθως ικανοποιούνται στην πράξη μια περιοδική συνάρτηση μπορεί να αναπτυχθεί σε άθροισμα απλών αρμονικών ταλαντώσεων. Το άπειρο άθροισμα ονομάζεται ανάπτυγμα Φουριέ. Οι σταθερές A_n και B_n ονομάζονται συντελεστές Φουριέ και δίνονται από τις σχέσεις

$$\mathrm{A}_n = \frac{2}{\mathrm{T}}\int_{-\mathrm{T}/2}^{\mathrm{T}/2} f(t)\,\text{συν}\left(n\frac{2\pi}{T}t\right)dt \qquad \mathrm{B}_n = \frac{2}{\mathrm{T}}\int_{-\mathrm{T}/2}^{\mathrm{T}/2} f(t)\,\text{ημ}\left(n\frac{2\pi}{T}t\right)dt$$

Αν το σημείο x είναι σημείο ασυνέχεια τότε η σειρά Φουριέ συγκλίνει στην τιμή

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{f(x+\varepsilon) + f(x-\varepsilon)}{2}$$

Άσκηση 3.4

Να λυθεί η διαφορική εξίσωση

$$\ddot{\theta} + \omega_2^2 \theta = A_1 \,\text{συν}\, \omega_1 t + A_2 \,\text{ημ}\, \omega_1 t$$

Η εξίσωση παριστάνει έναν αρμονικό ταλαντωτή με εξωτερική δύναμη που εκτελεί αρμονική ταλάντωση με συχνότητα ω_1.

Λύση: Η λύση της εξισώσεως αυτής είναι το άθροισμα δύο λύσεων

$$\theta(t) = \theta_{\text{ομ}} + \theta_{\mu}$$

Η μία είναι η λύση της ομογενούς και η άλλη μια μερική λύση. Η λύση της ομογενούς περιέχει και τις αρχικές συνθήκες και δίνεται από την σχέση

$$\theta_{\text{ομ}}(t) = \mathrm{A}_2 \,\text{συν}\, \omega_2 t + B_2 \,\text{ημ}\, \omega_2 t \qquad A_2 = \theta(0) \quad B_2 = \frac{1}{\omega_2}\dot{\theta}(0)$$

Θα εξετάσουμε ξεχωριστά τις περιπτώσεις που οι δύο κυκλικές συχνότητες ω_1 και ω_2 είναι ίσες ή άνισες.

Υποθέτουμε πρώτα ότι

$$\omega_1 \neq \omega_2$$

Η μερική λύση δίνεται από την σχέση

$$\theta_{\mu}(t) = \Gamma \,\text{συν}\, \omega_1 t + \Delta \,\text{ημ}\, \omega_1 t$$

Εισάγουμε την λύση αυτή στην εξίσωση και έχουμε

$$\left(\omega_2^2 - \omega_1^2\right)\left(\Gamma \,\text{συν}\, \omega_1 t + \Delta \,\text{ημ}\, \omega_1 t\right) = \mathrm{A}_1 \,\text{συν}\, \omega_1 t + B_1 \,\text{ημ}\, \omega_1 t$$

Εξισώνουμε τα ημίτονα και τα συνημίτονα και βρίσκουμε

$$\Gamma = \frac{1}{\omega_1^2 - \omega_2^2} A_1 \qquad \Delta = \frac{1}{\omega_1^2 - \omega_2^2} B_1$$

Άρα η ζητούμενη μερική λύση είναι

$$\theta_{\mu}(t) = \frac{A_1}{\omega_1^2 - \omega_2^2} \,\text{συν}\, \omega_1 t + \frac{B1}{\omega_1^2 - \omega_2^2} \,\text{ημ}\, \omega_1 t$$

και η γενική λύση της εξισώσεως είναι τελικά

$$\theta(t) = A_2 \,\text{συν}\, \omega_2 t + B_2 \,\text{ημ}\, \omega_2 t + \frac{A_1}{\omega_1^2 - \omega_2^2} \,\text{συν}\, \omega_1 t + \frac{B1}{\omega_1^2 - \omega_2^2} \,\text{ημ}\, \omega_1 t$$

Υποθέτουμε τώρα ότι

$$\omega_1 = \omega_2$$

τότε η μερική λύση δίνεται από την σχέση

$$\theta_\mu(t) = \Gamma t \,\text{συν}\, \omega_1 t + \Delta t \,\text{ημ}\, \omega_1 t$$

Εισάγουμε την λύση αυτή στην διαφορική εξίσωση και βρίσκουμε

$$-2\Gamma\omega_1 \,\text{ημ}\, \omega_1 t + 2\Delta\omega_1 \,\text{συν}\, \omega_1 t = \mathrm{A}_1 \,\text{συν}\, \omega_1 t + B_1 \,\text{ημ}\, \omega_1 t$$

Εξισώνουμε τα ημίτονα και τα συνημίτονα και βρίσκουμε

$$\Gamma = -\frac{1}{2\omega_1} B_1 \qquad\qquad \Delta = \frac{1}{2\omega_1} A_1$$

Η μερική λύση της μη ομογενούς είναι

$$\theta_\mu(t) = -\frac{1}{2\omega_1} B_1 t \,\text{συν}\, \omega_1 t + \frac{1}{2\omega_1} A_1 t \,\text{ημ}\, \omega_1 t$$

και η γενική λύση είναι τώρα

$$\theta(t) = \left(A_2 - t\frac{1}{2\omega_1} B_1\right) \text{συν}\, \omega_1 t + \left(B_2 + t\frac{1}{2\omega_1} A_1\right) \text{ημ}\, \omega_1 t$$

Η ταλάντωση γίνεται με σταθερή συχνότητα ω_1 και πλάτη που μεταβάλλονται χωρίς όριο ως προς τον χρόνο.

Κεφάλαιο 4

Συστήματα συντεταγμένων

4.1 Αδρανιακά συστήματα

Για την περιγραφή ενός φυσικού φαινομένου πρέπει να έχει κανείς ένα σύστημα αναφοράς. Οι εξισώσεις της φυσικής είναι γενικά διαφορετικοί στα διάφορα συστήματα αναφοράς. Είναι φυσικό να διαλέξουμε εκείνο το σύστημα που οι εξισώσεις να έχουν την απλούστερη μορφή. Ένα τέτοιο σύστημα ονομάζεται αδρανιακό σύστημα. Για τα συστήματα αυτά ισχύει το αξίωμα της αδράνειας που διατυπώθηκε και από τον Αριστοτέλη.

Ένα ελεύθερο σώμα που κινείται με σταθερή ταχύτητα εξακολουθεί να κινείται με την ίδια ταχύτητα αν δεν επιδράσει επάνω του καμία δύναμη. Το πρώτο αξίωμα της μηχανικής λέει ότι ένα τέτοιο σύστημα υπάρχει.

Για την περιγραφή ενός γεγονότος χρειαζόμαστε ενα τρισρθογώνιο σύστημα αξόνων που δείχνει κάθε φορά την θέση που συμβαίνει το γεγονός. Επίσης σε κάθε τέτοιο σύστημα υπάρχει ένα χρονόμετρο που δείχνει τον χρόνο που συμβαίνει το γεγονός. Είναι αυτονόητο για την κλασσική μηχανική ότι υπάρχει ένας χρόνος για όλα τα αδρανιακά συστήματα.

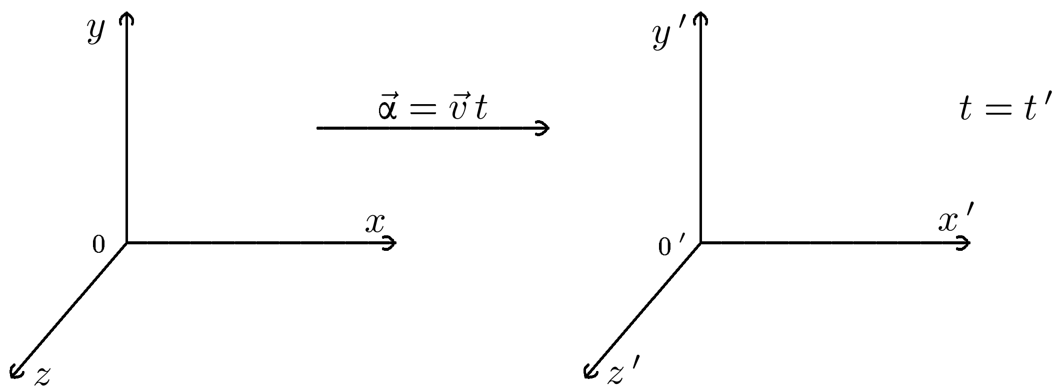
Με τον όρο συμβάν θα εννοούμε κάτι που γίνεται σε ορισμένο σημείο του χώρου, που καθορίζεται από τις τρεις χωρικές συντεταγμένες x, y, z και από τον χρόνο t, που συμβαίνει αυτό που καθορίζεται από το χρονόμετρο. Ένα συμβάν ορίζεται σαν ένα σημείο $(\vec{r}, t)$ σε ένα χώρο τεσσάρων διαστάσεων.

Οι έννοιες του χώρου και του χρόνου είναι θεμελιώδεις και όλοι ξέρουμε από την εμπειρία μας την σημασία τους, αλλά είναι αδύνατος ο ορισμός τους. Δεχόμαστε ότι ο χώρος είναι ομογενής και ισότροπος δηλαδή όλα τα σημεία και όλες οι διευθύνσεις είναι ισοδύναμες. Δεχόμαστε επίσης και την ομογένεια του χρόνου.

Θεωρούμε δύο καρτεσιανά συστήματα συντεταγμένων S και S' στον χώρο. Το ένα σύστημα προκύπτει από το άλλο με μία μετατόπιση της αρχής του κατά ένα διάνυσμα $\vec{\alpha}$ Δηλαδή τα δύο συστήματα έχουν διαφορετική αρχή ενώ η διεύθυνση των αξόνων τους παραμένει σταθερή. Θα βρούμε πώς μετασχηματίζονται οι συντεταγμένες ενός διανύσματος κατά την μετάθεση.

Η απάντηση είναι απλή. Αν x, y, z και x', y', z' είναι οι συντεταγμένες ενός διανύσματος ως προς τα συστήματα S και S' τότε ισχύουν προφανώς οι σχέσεις

$$x' = x + \alpha_1 \qquad y' = y + \alpha_2 \qquad z' = z + \alpha_3$$



Σχήμα 4.1
Μετατόπιση δύο αδρανιακών συστημάτων

Θα συμβολίζουμε το σύνολο όλων αυτών των μετασχηματισμών με T_3. Κάθε στοιχείο $M(\vec{\alpha})$ του συνόλου ορίζεται πλήρως από τους τρεις πραγματικούς αριθμούς $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$.

Υποθέτουμε ότι τα δύο συστήματα κινούνται με σταθερή (κατά διεύθυνση και μέτρο) ταχύτητα $\vec{v}$ το ένα ως προς το άλλο. Την χρονική στιγμή $t = 0$ τα δύο συστήματα ταυτίζονται. Μετά από κάποιο χρόνο t τα δύο συστήματα έχουν μετατεθεί κατά ένα διάνυσμα α που είναι ίσο με $v\,t$. Επομένως οι σχέσεις που συνδέουν τα διανύσματα θέσεως στα δύο συστήματα είναι

$$\vec{r} = \vec{r}\,' + \vec{v}\,t$$

Οι μετασχηματισμοί αυτοί ονομάζονται μετασχηματισμοί του Γαλιλαίου.

Αν ένα κινητό έχει σχετική ταχύτητα u και u' ως προς τα δύο συστήματα αναφοράς τότε οι δύο αυτές ταχύτητες συνδέονται με την σχέση

$$\vec{u} = \vec{u}\,' + \vec{v}$$

Επειδή η ταχύτητα $\vec{v}$ είναι σταθερή μια επιπλέον παραγώγιση δίνει για την επιτάχυνση την σχέση

$$\vec{\gamma} = \frac{d\vec{u}}{dt} = \frac{d\vec{u}}{dt} = \vec{\gamma}\,'$$

Οι επιταχύνσεις στα δύο συστήματα ταυτίζονται και επομένως η εξίσωση του Νεύτωνα είναι η ίδια και στα δύο συστήματα. Τα δύο αυτά συστήματα ονομάζονται αδρανιακά ή Νευτώνια συστήματα αναφοράς. Για τα αδρανιακά συστήματα ισχύει η αρχή της σχετικότητας δηλαδή όλοι οι νόμοι της φυσικής είναι ίδιοι σε όλα τα αδρανιακά συστήματα.

Τα συστήματα αυτά προφανώς είναι άπειρα σε πλήθος. Όλα τα αδρανιακά συστήματα κινούνται με σταθερή ταχύτητα μεταξύ τους. Όλοι οι παρατηρητές χρησιμοποιούν συνήθως ένα σύστημα αναφοράς σταθερά συνδεδεμένο με την γη. Τα συστήματα αυτά δεν είναι ακριβώς αδρανιακά συστήματα τα χρησιμοποιούμε όμως σαν αδρανιακά για πρακτικούς λόγους.

4.2 Μη αδρανιακά συστήματα

Είμαστε υποχρεωμένοι εκ των πραγμάτων πολλές φορές να χρησιμοποιούμε συστήματα μη αδρανιακά. Ένα σύστημα που κινείται μαζί με την γη, περιστρέφεται γύρω από τον άξονα της γης με σταθερή γωνιακή ταχύτητα και άρα δεν είναι αδρανιακό. Ορισμένες φορές χρησιμοποιούμε τέτοια μη αδρανιακά συστήματα σκόπιμα διότι το απαιτεί η φύση του προβλήματος που εξετάζουμε.

Οι εξισώσεις της κινήσεως στα συστήματα αυτά μεταβάλλονται. Αν για παράδειγμα δύο συστήματα ένα τονούμενο και ένα άτονο κινούνται με σχετική ταχύτητα $v(t)$ τότε η ταχύτητες ενός σώματος στα συστήματα αυτά συνδέονται με την σχέση

$$\vec{u} = \vec{u}\,' + v(t)$$

Δεχόμαστε ότι ο χρόνος είναι ο ίδιος και για τα δύο συστήματα δηλαδή

$$t = t\,'$$

Αν $\vec{f}$ και $\vec{f}\,'$ είναι η δύναμη που ασκείται σε ένα σώμα στα δύο συστήματα οι δύο αυτές δυνάμεις δεν είναι ίσες άλλα συνδέονται με την σχέση

$$\vec{f} = m\frac{d\vec{u}}{dt} = m\frac{d\vec{u}\,'}{dt} + m\frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \vec{f}\,' + m\frac{d\vec{v}(t)}{dt}$$

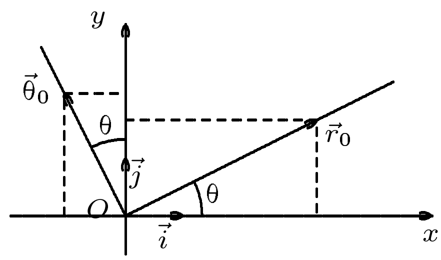
Η επιπλέον δύναμη $md\vec{v}/dt$ ονομάζεται δύναμη αδρανείας.

Συνεπώς το σώμα ως προς το τονούμενο σύστημα φαίνεται ότι κινείται μέσα σε δυναμικό πεδίο. Η δύναμη του πεδίου είναι ίση με την δύναμη αδρανείας. Δηλαδή αν πάρουμε το τονούμενο σύστημα για να περιγράψουμε την κίνηση πρέπει να αφαιρέσουμε την δύναμη αυτή για να βγάλουμε σωστά συμπεράσματα.

Δύο συστήματα με την ίδια αρχή που το ένα περιστρέφεται ως προς το άλλο είναι συστήματα μη αδρανειακά. Πριν μελετήσουμε τις δυνάμεις που εμφανίζονται στα συστήματα αυτά θα περιγράψουμε γενικότερα δύο τέτοια συστήματα αναφοράς. Θα βρούμε πώς μετασχηματίζονται οι συντεταγμένες ενός διανύσματος κατά την περιστροφή. Το ίδιο πρόβλημα θα εξετάσουμε και στον Ευκλείδειο χώρο των τριών διαστάσεων.

4.3 Περιστρεφόμενα συστήματα

Θεωρούμε δύο καρτεσιανά συστήματα συντεταγμένων S και $S\,'$ στο επίπεδο. Το ένα σύστημα προκύπτει από το άλλο με μία περιστροφή κατά γωνία θ γύρω από την αρχή των αξόνων. Δηλαδή τα δύο συστήματα έχουν την ίδια αρχή και διαφέρουν στην διεύθυνση των αξόνων τους.



Σχήμα 4.2

Περιστροφή καρτεσιανού συστήματος δύο διαστάσεων

Συμβολίζουμε με $\vec{i}$, $\vec{j}$ και $\vec{r}_0$, $\vec{\theta}_0$ τα μοναδιαία διανύσματα κατά την διεύθυνση των αξόνων των δύο συστημάτων. Θα ονομάζουμε το σύστημα xoy

καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων και θα το θεωρούμε ακίνητο. Το άλλο σύστημα θα το ονομάζουμε πολικό σύστημα και θα το θεωρούμε κινούμενο.

Αναλύουμε τα διανύσματα $\vec{r}_0$ και $\vec{\theta}_0$ ως προς το σύστημα xoy. Έχουμε

$$\vec{r}_0 = \alpha\vec{i} + \beta\vec{j} \qquad \text{και} \qquad \vec{\theta}_0 = \gamma\vec{i} + \delta\vec{j}$$

Είναι γνωστό ότι τα α, β, γ, δ είναι τα διευθύνοντα συνημίτονα και δίνονται από τις σχέσεις

$$\alpha = \vec{r}_0 \cdot \vec{i} = \text{συν}\,\theta \qquad \beta = \vec{r}_0 \cdot \vec{j} = \text{ημ}\,\theta$$

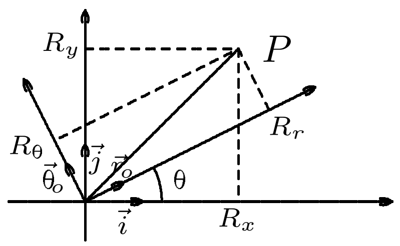
$$\gamma = \vec{\theta}_0 \cdot \vec{i} = -\,\text{ημ}\,\theta \qquad \delta = \vec{\theta}_0 \cdot \vec{j} = \text{συν}\,\theta$$

όπως φαίνεται εύκολα από το σχήμα. Επομένως έχουμε

$$\vec{r}_0 = \text{συν}\,\theta\vec{i} + \text{ημ}\,\theta\vec{j} \qquad \text{και} \qquad \vec{\theta}_0 = -\,\text{ημ}\,\theta\vec{i} + \text{συν}\,\theta\vec{j}$$

Τις σχέσεις αυτές τις γράφουμε και τις δύο σε μορφή μητρών

$$\begin{pmatrix} \vec{r}_0 \\ \vec{\theta}_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{συν}\,\theta & \text{ημ}\,\theta \\ -\,\text{ημ}\,\theta & \text{συν}\,\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{i} \\ \vec{j} \end{pmatrix}$$



Σχήμα 4.3
Οι συντεταγμένες ενός σημείου ως προς τα δύο συστήματα

Η παραπάνω σχέση ισχύει και για τις συντεταγμένες οποιουδήποτε διανύσματος. Πράγματι αν R_x και R_y είναι οι καρτεσιανές συντεταγμένες ενός διανύσματος και R_r και R_θ οι πολικές συντεταγμένες του ίδιου διανύσματος τότε προφανώς ισχύει η σχέση

$$\vec{R} = R_r\vec{r}_0 + R_\theta\vec{\theta}_0 = R_x\vec{i} + R_y\vec{j}$$

Πολλαπλασιάζουμε την τελευταία ισότητα εσωτερικά πρώτα με το διάνυσμα $\vec{r}_0$ και μετά με το διάνυσμα $\vec{\theta}_0$. Λαμβάνουμε επίσης υπόψιν ότι τα διανύσματα $\vec{r}_0$ και $\vec{\theta}_0$ είναι κάθετα μεταξύ τους και επομένως

$$\vec{r}_0 \cdot \vec{\theta}_0 = 0$$

βρίσκουμε

$$R_r\vec{r}_0 \cdot \vec{r}_0 + R_\theta\vec{\theta}_0 \cdot \vec{r}_0 = R_x\vec{i} \cdot \vec{r}_0 + R_y\vec{j} \cdot \vec{r}_0 = R_x \,\text{συν}\,\theta + R_y \,\text{ημ}\,\theta = R_r$$

$$R_r\vec{r}_0 \cdot \vec{\theta}_0 + R_\theta\vec{\theta}_0 \cdot \vec{\theta}_0 = R_x\vec{i} \cdot \vec{\theta}_0 + R_y\vec{j} \cdot \vec{\theta}_0 = -R_x \,\text{ημ}\,\theta + R_y \,\text{συν}\,\theta = R_\theta$$

Οι δύο σχέσεις αυτές γράφονται σε μορφή μήτρας ως εξής

$$\begin{pmatrix} R_r \\ R_\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{συν}\,\theta & \text{ημ}\,\theta \\ -\text{ημ}\,\theta & \text{συν}\,\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_x \\ R_y \end{pmatrix} \tag{4.1}$$

Τα μήκη των διανυσμάτων δεν μεταβάλλονται κατά την περιστροφή. Η απόδειξη είναι απλή και είναι η εξής

$$|\vec{R}|^2 = R_r^2 + R_\theta^2 = (R_x \,\text{συν}\,\theta + R_y \,\text{ημ}\,\theta)^2 + (-R_x \,\text{ημ}\,\theta + R_y \,\text{συν}\,\theta)^2 = R_x^2 + R_y^2$$

Παρατηρούμε ότι αν περιστρέψουμε ένα σύστημα τότε οι συντεταγμένες των διανυσμάτων μεταβάλλονται γραμμικά σύμφωνα με την σχέση (4.1). Ο μετασχηματισμός περιστροφής αφήνει τα μήκη των διανυσμάτων αναλλοίωτα.

Συμβολίζουμε την μήτρα μετασχηματισμού με $\mathrm{O}(\theta)$. Εύκολα αποδεικνύεται ότι η μήτρα αυτή έχει αντίστροφο την μήτρα $\mathrm{O}(-\theta)$. Πράγματι

$$\mathrm{O}(\theta)\mathrm{O}(-\theta) = \begin{pmatrix} \text{συν}\,\theta & \text{ημ}\,\theta \\ -\text{ημ}\,\theta & \text{συν}\,\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{συν}\,\theta & -\text{ημ}\,\theta \\ \text{ημ}\,\theta & \text{συν}\,\theta \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \text{συν}^2\,\theta + \text{ημ}^2\,\theta & -\text{συν}\,\theta\,\text{ημ}\,\theta + \text{ημ}\,\theta\,\text{συν}\,\theta \\ -\text{ημ}\,\theta\,\text{συν}\,\theta + \text{συν}\,\theta\,\text{ημ}\,\theta & \text{ημ}^2\,\theta + \text{συν}^2\,\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Η σχέση αυτή μας διευκολύνει για να βρούμε την αντίστροφη της σχέσεως (4.1). Πολλαπλασιάζουμε την σχέση από αριστερά με την μήτρα $\mathrm{O}(-\theta)$ και με την βοήθεια της παραπάνω σχέσεως βρίσκουμε

$$\begin{pmatrix} R_x \\ R_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{συν}\,\theta & -\text{ημ}\,\theta \\ \text{ημ}\,\theta & \text{συν}\,\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_r \\ R_\theta \end{pmatrix}$$

Για την ορίζουσα της μήτρας μετασχηματισμού έχουμε

$$det|\mathrm{O}(\theta)| = \begin{vmatrix} \sigma\upsilon\nu\,\theta & -\eta\mu\,\theta \\ \eta\mu\,\theta & \sigma\upsilon\nu\,\theta \end{vmatrix} = \sigma\upsilon\nu^2\,\theta + \eta\mu^2\,\theta = 1$$

Δηλαδή η ορίζουσα της μήτρας για κάθε περιστροφή είναι ίση με την μονάδα.

Μία ακόμα ιδιότητα της μήτρας $\mathrm{O}(\theta)$ είναι η εξής

$$\mathrm{O}(\theta)\mathrm{O}(\varphi) = \mathrm{O}(\theta+\varphi)$$

Η απόδειξη είναι η εξής

$$\mathrm{O}(\theta)\mathrm{O}(\varphi) = \begin{pmatrix} \sigma\upsilon\nu\,\theta & \eta\mu\,\theta \\ -\eta\mu\,\theta & \sigma\upsilon\nu\,\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma\upsilon\nu\,\varphi & \eta\mu\,\varphi \\ -\eta\mu\,\varphi & \sigma\upsilon\nu\,\varphi \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \sigma\upsilon\nu\,\theta\,\sigma\upsilon\nu\,\varphi - \eta\mu\,\theta\,\eta\mu\,\varphi & \sigma\upsilon\nu\,\theta\,\eta\mu\,\varphi - \eta\mu\,\theta\,\sigma\upsilon\nu\,\varphi \\ -\eta\mu\,\theta\,\sigma\upsilon\nu\,\varphi + \sigma\upsilon\nu\,\theta\,\eta\mu\,\varphi & -\eta\mu\,\theta\,\eta\mu\,\varphi + \sigma\upsilon\nu\,\theta\,\sigma\upsilon\nu\,\varphi \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \sigma\upsilon\nu\,(\theta+\varphi) & \eta\mu\,(\theta+\varphi) \\ -\eta\mu\,(\theta+\varphi) & \sigma\upsilon\nu\,(\theta+\varphi) \end{pmatrix} = \mathrm{O}(\theta+\varphi)$$

Σημειώνουμε επίσης και την σχέση

$$O(2\pi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Δηλαδή μια περιστροφή υπό γωνία $\theta = 2\pi$ αφήνει τον χώρο αναλλοίωτο.

Μία περιστροφή στο χώρο κατά γωνία ψ γύρω από τον άξονα z ορίζεται από την μήτρα

$$A(0,0,\psi) = \begin{pmatrix} \sigma\upsilon\nu\,\psi & \eta\mu\,\psi & 0 \\ -\eta\mu\,\psi & \sigma\upsilon\nu\,\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Κατά την περιστροφή αυτή το μοναδιαίο διάνυσμα $\vec{k}$ του άξονα z δεν μεταβάλλεται. Συμβολίζουμε πολλές φορές την περιστροφή αυτή με $A_z(\psi)$.

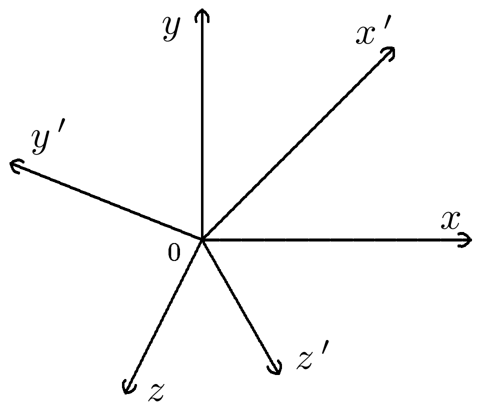
Με όμοιο τρόπο ορίζονται και οι περιστροφές γύρω από τους άξονες x ή y. Η μήτρα περιστροφής γύρω από τον άξονα x κατά γωνία θ είναι

$$A(\theta,0,0) = A_x(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma\upsilon\nu\,\theta & \eta\mu\,\theta \\ 0 & -\eta\mu\,\theta & \sigma\upsilon\nu\,\theta \end{pmatrix}$$

και η μήτρα περιστροφής γύρω από τον άξονα y κατά γωνία ψ είναι

$$A(0,\psi,0) = A_y(\psi) = \begin{pmatrix} \text{συν}\,\psi & 0 & \text{ημ}\,\psi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\text{ημ}\,\psi & 0 & \text{συν}\,\psi \end{pmatrix}$$

Θα ορίσουμε τώρα μια περιστροφή στον τριδιάστατο Ευκλείδειο χώρο γύρω από έναν τυχόντα άξονα.



Σχήμα 4.4
Περιστροφή στον τριδιάστατο χώρο

Έστω ένα δεξιόστροφο σύστημα αξόνων S στον χώρο με βασικά μοναδιαία διανύσματα $\vec{i}$, $\vec{j}$ και $\vec{k}$. Το σύστημα το περιστρέφουμε έτσι ώστε η αρχή των αξόνων να παραμένει σταθερή, ενώ τα βασικά διανύσματα αλλάξουν διεύθυνση. Το καινούργιο σύστημα το συμβολίζουμε με S' και τα βασικά μοναδιαία του διανύσματα με ($\vec{r}_0$, $\vec{\theta}_0$ και $\vec{\varphi}_0$). Θα βρούμε ακολούθως τον μετασχηματισμό που απεικονίζει το σύστημα S στο S'. Τα δύο συστήματα είναι και τα δύο δεξιόστροφα ή και τα δύο αριστερόστροφα. Μετασχηματισμός από αριστερόστροφο σε δεξιόστροφο ή αντιστρόφως δεν υπάρχει.

Ένας τρόπος που χρησιμοποιείται συχνά γιατί είναι ο πιο απλός για να περιγράψουμε μια περιστροφή στον τριδιάστατο ευκλείδειο χώρο χρησιμοποιεί τις γωνίες Όϋλερ. Για να πάμε από το σύστημα S στο S' εκτελούμε τρεις διαδοχικές περιστροφές με τον ακόλουθο τρόπο. Ο τρόπος αυτός δεν είναι μοναδικός

Περιστρέφουμε στην αρχή τους άξονες κατά γωνία φ γύρω από τον άξονα z ο πίνακας που παριστάνει την περιστροφή αυτή είναι ο $A(0,0,\varphi)$. Κατόπιν περιστρέφουμε τους άξονες κατά γωνία θ γύρω από τον άξονα x

ο πίνακας που παριστάνει την περιστροφή αυτή είναι ο $\mathrm{A}(\theta, 0, 0)$. Τέλος περιστρέφουμε τους άξονες κατά γωνία ψ γύρω από τον άξονα z, $\mathrm{A}(0, 0, \psi)$ είναι ο αντίστοιχος πίνακας. Η ζητούμενη περιστροφή παριστάνεται από τον πίνακα $\mathrm{A}(\psi, \theta, \varphi)$ που είναι ίσος φυσικά με το γινόμενο των αντιστοίχων μητρών.

Πολλαπλασιάζουμε τις κατάλληλες μήτρες και βρίσκουμε τελικά

$$\mathrm{A}(\psi, \theta, \varphi) = \mathrm{A}(0, 0, \psi)\mathrm{A}(\theta, 0, 0)\mathrm{A}(0, 0, \varphi) = \mathrm{A}_z(\psi)\mathrm{A}_x(\theta)\mathrm{A}_z(\varphi) =$$

$$\begin{pmatrix} \text{συν}\,\psi\,\text{συν}\,\varphi - \text{ημ}\,\psi\,\text{ημ}\,\varphi\,\text{συν}\,\theta & \text{συν}\,\psi\,\text{ημ}\,\varphi + \text{ημ}\,\psi\,\text{συν}\,\varphi\,\text{συν}\,\theta & \text{ημ}\,\psi\,\text{ημ}\,\theta \\ -\text{συν}\,\varphi\,\text{ημ}\,\psi - \text{ημ}\,\varphi\,\text{συν}\,\psi\,\text{συν}\,\theta & -\text{ημ}\,\varphi\,\text{ημ}\,\psi + \text{συν}\,\psi\,\text{συν}\,\varphi\,\text{συν}\,\theta & \text{συν}\,\psi\,\text{ημ}\,\theta \\ \text{ημ}\,\theta\,\text{ημ}\,\varphi & -\,\text{ημ}\,\theta\,\text{συν}\,\varphi & \text{συν}\,\theta \end{pmatrix}$$

Οι τρεις γωνίες ψ, θ και φ όπως ορίστηκαν ονομάζονται γωνίες Όϋλερ και μπορούν να πάρουν τις τιμές

$$0 \leq \varphi < 2\pi \qquad 0 \leq \psi < 2\pi \qquad 0 \leq \theta \leq \pi$$

4.4 Επιτάχυνση σε κινούμενα συστήματα

Ένα καρτεσιανό σύστημα S' κινείται με ταχύτητα $\vec{V}(t)$ ως προ ένα άλλο S που θεωρείται ακίνητα. Θα βρούμε στην παράγραφο αυτή την σχέση που συνδέει την επιτάχυνση ενός υλικού σημείου στα δύο αυτά συστήματα. Θα εξετάσουμε ιδιαίτερα την περίπτωση που το ένα περιστρέφεται με γωνιακή ταχύτητα $\omega(t)$ ως προς το άλλο. Τέλος θα εξετάσουμε την περίπτωση που έχουμε και μετάθεση και περιστροφή

Αν $\vec{v}$ και $\vec{v}\,'$ είναι αντιστοίχως οι ταχύτητες ενός υλικού σημείου ως προς τα δύο συστήματα τότε

$$\vec{v}\,' = \vec{v} + \vec{V}(t)$$

Επομένως εύκολα αποδεικνύεται ότι

$$\vec{\gamma}\,' = \vec{\gamma} + \frac{d\vec{V}(t)}{dt}$$

όπου $\vec{\gamma}$ και $\vec{\gamma}\,'$ είναι η επιτάχυνση στα δύο συστήματα. Αν η ταχύτητα V είναι σταθερή τότε είναι γνωστό ότι η επιτάχυνση είναι η ίδια και στα δύο συστήματα και τα συστήματα είναι αδρανιακά.

Υποθέτουμε τώρα ότι το S' περιστρέφεται με γωνιακή ταχύτητα $\vec{\omega}(t)$ ως προς το σύστημα S. Το υλικό σημείο αποκτάει μια ακόμα ταχύτητα που είναι

$$\vec{V} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

Άρα η ταχύτητα που έχει ως προς το ακίνητο σύστημα είναι το (διανυσματικό) άθροισμα της ταχύτητας στο κινούμενο και της ταχύτητα λόγω περιστροφής δηλαδή

$$\vec{v} = \vec{v}\,' + \vec{\omega} \times \vec{r}$$

Ορίζουμε τους τελεστές της παραγωγίσεως ως προς τον χρόνο του ακίνητου και του κινούμενου συστήματος και τους συμβολίζουμε με D_α και $D_\varkappa$ αντιστοίχως από της σχέσεις.

$$D_\alpha \vec{r} = \vec{v} \qquad\qquad D_\varkappa \vec{r} = \vec{v}\,'$$

Με την βοήθεια των τελεστών αυτών μπορούμε να γράφουμε την παραπάνω εξίσωση με την μορφή

$$D_\alpha \vec{r} = D_\varkappa \vec{r} + \vec{\omega} \times \vec{r}$$

Απλοποιούμε με το διάνυσμα $\vec{r}$ και παίρνουμε της εξής ισότητα τελεστών

$$D_\alpha = D_\varkappa + \vec{\omega}\times$$

Η παραπάνω ισότητα σημαίνει ότι για οποιοδήποτε μέγεθος $\vec{\mathrm{A}}(t)$ ισχύει η σχέση

$$D_\alpha \vec{A}(t) = D_\varkappa \vec{A}(t) + \vec{\omega} \times \vec{A}(t)$$

Μπορούμε να γράφουμε την ισότητα αυτή και με την ακόλουθη ισοδύναμη μορφή

$$\left[\frac{d}{dt}\vec{A}\right]_{\text{ακίνητο}} = \left[\frac{d}{dt}\vec{A}\right]_{\text{κινούμενο}} + \vec{\omega} \times \vec{A}(t)$$

Για να βρούμε την επιτάχυνση θα εφαρμόζουμε δύο φορές την παραπάνω σχέση. Έχουμε

$$D_\alpha^2 \vec{r} = (D_\alpha + \vec{\omega}\times)\,(D_\varkappa \vec{r} + \vec{\omega} \times \vec{r}) = D_\varkappa^2 \vec{r} + D_\varkappa \vec{\omega} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times D_\varkappa \vec{r} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$$

Τελικά μετά από απλές πράξεις παίρνουμε την ισότητα

$$D_\alpha^2 \vec{r} = D_\varkappa^2 \vec{r} + (D_\varkappa \vec{\omega}) \times \vec{r} + 2\vec{\omega} \times (D_\varkappa \vec{r}) + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$$

Η επιτάχυνση

$$2\vec{\omega} \times (D_\varkappa \vec{r})$$

ονομάζεται επιτάχυνση Κοριόλης και η επιτάχυνση

$$\vec{\omega} \times \vec{\omega} \times \vec{r})$$

ονομάζεται κεντρομόλος επιτάχυνση.

Το μέγεθος

$$D_\varkappa \vec{\omega} \times \vec{r}$$

ονομάζεται γραμμική επιτάχυνση. Ο όρος αυτός μηδενίζεται όταν η γωνιακή ταχύτητα είναι σταθερή οπότε η γωνιακή επιτάχυνση $D_\varkappa \vec{\omega}$ μηδενίζεται.

Τέλος αν το διάνυσμα θέσεως $\vec{R}(t)$ της αρχής του κινούμενου συστήματος ως προς το ακίνητο μεταβάλλεται τότε στην ταχύτητα και την επιτάχυνση προστίθενται οι ακόλουθοι όροι αντιστοίχως.

$$\vec{v} = \frac{d}{dt}\vec{R} \qquad \vec{g} = \frac{d^2}{dt^2}\vec{R}$$

4.5 Κίνηση στερεού σώματος

Οι παραπάνω σχέσεις μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την μελέτη ενός στερεού σώματος. Ένα στερεό σώμα είναι ένα σύστημα με N σωμάτια που οι αποστάσεις μεταξύ των σωματιδίων του δεν μεταβάλλονται. Βεβαίως η ιδιότητα αυτή του στερεού σώματος είναι κατά προσέγγιση σωστή. Ένα κύμα (ο ήχος π.χ) δεν θα μπορούσε να διαδοθεί μέσω των στερεών αν οι αποστάσεις των σωματιδίων του σώματος μεταξύ τους ήταν σταθερές.

Για την μελέτη του στερεού σώματος χρησιμοποιούμε ένα ακίνητο σύστημα S συντεταγμένων και ένα κινούμενο S'. Το κινούμενο σύστημα είναι σταθερά συνδεδεμένο με το σώμα και συμμετέχει στην κίνηση του σώματος. Οι σχέσεις απλοποιούνται αν το κέντρο του κινουμένου συστήματος είναι το κέντρο μάζας του σώματος.

Ο προσανατολισμός του κινουμένου συστήματος ως προς το ακίνητο προσδιορίζεται από τρεις ανεξάρτητες γωνίες. Η θέση του κέντρου μάζας ως προς το ακίνητο σύστημα προσδιορίζεται από ένα διάνυσμα με τρεις συνιστώσες. Έτσι ένα στερεό σώμα είναι ένα μηχανικό σύστημα με έξι βαθμούς ελευθερίας.

Σαν εφαρμογή των σχέσεων των προηγουμένων παραγράφων θα βρούμε την κινητική ενέργεια ενός στερεού σώματος. Ένα στερεό σώμα αποτελείται από N διακεκριμένα σωμάτια.

Η κινητική ενέργεια ενός τέτοιου σώματος είναι το άθροισμα των κινητικών ενεργειών των σωματίων που το αποτελούν. Συμβολίζουμε με v την ταχύτητα ενός σωματιδίου του σώματος με μάζα m και διάνυσμα θέσεως $\vec{r}$. Η ταχύτητα V είναι η ταχύτητα του κέντρου μάζας. Η γωνιακή ταχύτητα $\vec{\omega}$ είναι η ίδια για όλα τα σωμάτια. Έχουμε

$$\mathrm{E}_{\varkappa} = \sum \frac{1}{2} m v^2 = \sum \frac{1}{2} m \left(V + \vec{\omega} \times \vec{r}\right)^2 =$$

$$= \sum \frac{1}{2} m V^2 + \sum m V \cdot \vec{\omega} \times \vec{r} + \sum \frac{1}{2} m \left(\vec{\omega} \times \vec{r}\right)^2$$

Το άθροισμα εκτείνεται σε όλα τα σωμάτια του σώματος.

Ο πρώτος όρος περιέχει το $\sum m$ που είναι ή συνολική μάζα M του σώματος. Ο δεύτερος όρος περιέχει τον παράγοντα $\sum m\vec{r}$ που είναι μηδέν διότι το κινούμενο σύστημα έχει την αρχή του στο κέντρο μάζας του στερεού. Αναλύουμε τέλος τον τρίτο όρο και έχουμε

$$E_{\varkappa} = \frac{1}{2} M V^2 + \frac{1}{2} \sum m \left(\omega^2 r^2 - (\vec{\omega} \cdot \vec{r})^2\right)$$

Επομένως η κινητική ενέργεια ενός στερεού σώματος είναι το άθροισμα δύο όρων. Ο πρώτος όρος είναι η κινητική ενέργεια του υλικού σημείου που συμπίπτει με το κέντρο μάζας και έχει μάζα ίση με την συνολική μάζα m του σώματος. Ο δεύτερος όρος οφείλεται στην περιστροφή με γωνιακή ταχύτητα $\vec{\omega}$ γύρω από ένα άξονα που περνάει από το κέντρο μάζας του στερεού. Συμβολίζουμε τον όρο αυτό με E_{π} και θα τον γράψουμε με μία άλλη μορφή.

Αν x_j και ω_i, είναι οι συνιστώσες των διανυσμάτων $\vec{r}$ και $\vec{\omega}$ αντιστοίχως τότε έχουμε

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}_{\pi} = \frac{1}{2} \sum m \left[(\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2)(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) - (\omega_1 x_1 + \omega_2 x_2 + \omega_3 x_3)^2\right] = \\
= \frac{1}{2} \sum m[\omega_1^2 \left(x_2^2 + x_3^2\right) + \omega_2^2 \left(x_3^2 + x_1^2\right) + \omega_3^2 \left(x_1^2 + x_2^2\right) - \\
- 2\omega_1\omega_2 x_1 x_2 - 2\omega_2\omega_3 x_2 x_3 - 2\omega_3\omega_1 x_3 x_1]
\end{aligned}$$

Ορίζουμε τον τανυστή αδρανείας από την σχέση

$$I_{jk} = \sum m \left(r^2 \delta_{jk} - x_j x_k \right)$$

Ο τανυστής είναι συμμετρικός

$$I_{jk} = I_{kj}$$

και οι συνιστώσες του I_{11}, I_{22}, I_{33} ονομάζονται ροπές αδρανείας γύρω από τους αντίστοιχους άξονες. Οι υπόλοιπες συνιστώσες του τανυστή ονομάζονται γινόμενα αδρανείας.

Αν θεωρήσουμε ότι το σώμα που εξετάζουμε αποτελείται από συνεχή κατανομή μάζας με πυκνότητα ρ,τότε τα αθροίσματα του παραπάνω ορισμού μετατρέπονται σε ολοκληρώματα στον όγκο του σώματος. Δηλαδή ο τανυστής αδράνειας ορίζεται από τις σχέσεις

$$I_{jk} = \int \rho \left(r^2 \delta_{jk} - x_j x_k \right) dV$$

Η κινητική ενέργεια ενός σώματος με την βοήθεια του τανυστή αδράνειας γράφεται

$$\mathrm{E}_{\varkappa} = \frac{1}{2} M V^2 + \frac{1}{2} I_{jk} \omega_j \omega_k$$

όπου εννοείται άθροιση ως προς κάθε επαναλαμβανόμενο δείκτη.

Με την βοήθεια του τανυστή αδράνειας μπορούμε να γράφουμε και την (εσωτερική) στροφορμή

$$\vec{L} = \sum m \vec{r} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$$

ενός στερεού σώματος. Με απλές πράξεις αποδεικνύεται ότι οι συνιστώσες του διανύσματος αυτού είναι

$$L_i = I_{ik} \omega_k$$

4.6 Κεντρικές κινήσεις

Μια δύναμη ονομάζεται κεντρική αν είναι τέτοια ώστε να διέρχεται από σταθερό σημείο καθ' όλη την διάρκεια της κινήσεως. Η δύναμη εξαρτάται μόνο από την απόσταση του υλικού σημείου από το κέντρο. Το σημείο αυτό ονομάζεται κέντρο της κινήσεως. Η δύναμη είναι ελκτική αν έχει φορά προς το κέντρο άλλως είναι απωστική.

Επιλέγουμε σύστημα αναφοράς με κέντρο το κέντρο της κινήσεως O. Η δύναμη έχει την διεύθυνση του διανύσματος $\vec{r}$. Έστω ότι είναι της μορφής

$$\vec{F}(r) = K(r)\frac{\vec{r}}{r} \qquad \text{όπου} \qquad r = \|\vec{r}\|$$

Το διάνυσμα $\vec{r}/r$ είναι το μοναδιαίο διάνυσμα και η διεύθυνσή του περνάει από το κέντρο O. Αν $K(r) > 0$ το δυναμικό είναι απωστικό και αν $K(r) < 0$ το δυναμικό είναι ελκτικό. Οι συνιστώσες της δυνάμεως αυτής είναι

$$F_x = K(r)\frac{x}{r} \qquad F_y = K(r)\frac{y}{r} \qquad F_z = K(r)\frac{z}{r}$$

Υπολογίζουμε την παράγωγο του μέτρου του διανύσματος $\vec{r}$ ως προς x. Έχουμε

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{\partial \left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{1/2}}{\partial x} = \frac{1}{2}2x\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{-1/2} = \frac{x}{r}$$

Με κυκλική εναλλαγή βρίσκουμε και τις άλλες παραγώγους

$$\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r} \qquad \frac{\partial r}{\partial z} = \frac{z}{r}$$

Οπότε οι συνιστώσες της δυνάμεως μπορούν να γραφούν

$$F_x = K(r)\frac{\partial r}{\partial x} \qquad F_y = K(r)\frac{\partial r}{\partial y} \qquad F_z = K(r)\frac{\partial r}{\partial z}$$

Ορίζουμε την συνάρτηση $V(r)$ από την σχέση

$$V(r) = -\int K(r)dr \qquad \text{ώστε} \qquad \frac{\partial V(r)}{\partial r} = -K(r)$$

Με την βοήθεια της συναρτήσεως αυτής, οι συνιστώσες της δυνάμεως μπορούν να γραφούν

$$F_x = K(r)\frac{\partial r}{\partial x} = -\frac{\partial V(r)}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial x}V(r)$$

Με όμοιο τρόπο για τις άλλες δύο συνιστώσες γράφουμε

$$F_y = -\frac{\partial}{\partial y}V(r) \qquad\qquad F_z = -\frac{\partial}{\partial z}V(r)$$

Οπότε η δύναμη $\vec{F}$ παίρνει την μορφή

$$\vec{F} = -\left(\frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial z}\right)V(r) = -\vec{\nabla}V(r)$$

Από την τελευταία σχέση φαίνεται αμέσως ότι η δύναμη αυτή είναι αστρόβιλη δηλαδή $\vec{\nabla} \times \vec{F} = \vec{0}$ και ότι το δυναμικό είναι η συνάρτηση $V(r)$. Το δυναμικό πεδίο επομένως είναι συντηρητικό και η ενέργεια είναι ένα πρώτο ολοκλήρωμα της κινήσεως.

Θα βρούμε τώρα την ροπή της δυνάμεως αυτής. Είναι προφανές ότι η ροπή της δυνάμεως αυτής είναι μηδέν. Πράγματι

$$\mathrm{M}_F = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{r} \times \frac{K(r)}{r}\vec{r} = \frac{K(r)}{r}\vec{r} \times \vec{r} = \vec{0}$$

Αλλά η ροπή μιας δυνάμεως σε ένα Νευτώνειο δυναμικό πεδίο είναι ίση με την παράγωγο της στροφορμής. Δηλαδή $\vec{\mathrm{M}}_F = \dot{\vec{L}}$ επομένως $\dot{\vec{L}} = \vec{0}$ και άρα το διάνυσμα της στροφορμής είναι σταθερό ίσο με (C_1, C_2, C_3). Άρα έχουμε

$$L_1 = y\frac{dz}{dt} - z\frac{dy}{dt} = C_1 \qquad L_2 = z\frac{dx}{dt} - x\frac{dz}{dt} = C_2 \qquad L_3 = x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt} = C_3$$

Το διάνυσμα λοιπόν της στροφορμής είναι σταθερό και κατά μέτρο και κατά διεύθυνση και αυτό ισχύει για οποιοδήποτε κεντρικό δυναμικό πεδίο.

Αν πολλαπλασιάσουμε τις παραπάνω εξισώσεις με x, y, z αντιστοίχως και προσθέσουμε παίρνουμε την σχέση

$$C_1 x + C_2 y + C_3 z = 0$$

Η παραπάνω εξίσωση παριστάνει ένα επίπεδο που περνάει από την αρχή των αξόνων. Από την σχέση αυτή συνεπάγεται ότι

$$\vec{L} \cdot \vec{r} = 0$$

Το διάνυσμα της στροφορμής είναι πάντα κάθετο στο επίπεδο αυτό.

Οι εξισώσεις της κινήσεως απλουστεύονται αν το επίπεδο αυτό το θεωρήσουμε σαν το επίπεδο των αξόνων x και y. Θεωρούμε τον τρίτο άξονα z να συμπίπτει με το διάνυσμα της στροφορμής. Δεν υπάρχει κίνηση στον τρίτο άξονα z. Δηλαδή εκλέγουμε τις σταθερές έτσι ώστε

$$L_1 = C_1 = 0 \qquad L_2 = C_2 = 0 \qquad L_3 = C_3 = h$$

Θα λύσουμε το πρόβλημα σε πολικές συντεταγμένες (r, θ). Στο σύστημα αυτό η δύναμη είναι συνάρτηση της μίας μόνο ανεξάρτητης μεταβλητής της r και έχει την διεύθυνση του άξονα $\vec{r}_0$.

$$\vec{F}(\vec{r}) = K(r)\vec{r}_0$$

Οι καρτεσιανές συνιστώσες της θέσεως και της ταχύτητας σε πολικές συντεταγμένες γράφονται

$$x = r\,\text{συν}\,\theta \qquad \dot{x} = \dot{r}\,\text{συν}\,\theta - r\dot{\theta}\,\text{ημ}\,\theta$$

$$y = r\,\text{ημ}\,\theta \qquad \dot{y} = \dot{r}\,\text{ημ}\,\theta + r\dot{\theta}\,\text{συν}\,\theta$$

Το πρώτο ολοκλήρωμα της κινήσεως η ενέργεια στο πολικό αυτό σύστημα συντεταγμένων γράφεται

$$E = \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) + V(r) = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right) + V(r)$$

Η στροφορμή (η τρίτη συνιστώσα) σε πολικές συντεταγμένες είναι

$$L_3 = x\dot{y} - y\dot{x} = r^2\dot{\theta} = h = \text{σταθερή}$$

που είναι το δεύτερο ολοκλήρωμα της κινήσεως. Η επιτάχυνση παίρνει την μορφή

$$\vec{\gamma} = \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)\vec{r}_0 + \left(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}\right)\vec{\theta}_0$$

Οι εξισώσεις της κινήσεως στο σύστημα αυτό γίνονται

$$K(r) = m\left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right) \qquad 0 = m\left(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}\right)$$

Παρατηρούμε ότι ο δεύτερη εξίσωση της κινήσεως δεν περιέχει το δυναμικό. Είναι συνεπώς η ίδια για όλα τα κεντρικά δυναμικά πεδία. Την εξίσωση αυτή μπορούμε να την ολοκληρώσουμε αμέσως. Γράφουμε την εξίσωση με την μορφή

$$m\frac{d}{dt}\left(r^2\dot{\theta}\right) = 0$$

και ολοκληρώνουμε

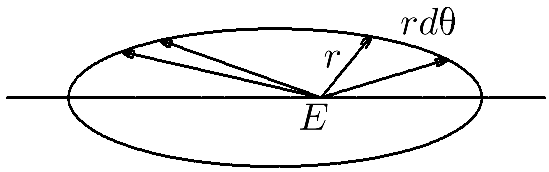
$$mr^2\dot{\theta} = M = mh$$

όπου M είναι μια σταθερά. Η σχέση αυτή είναι το δεύτερο ολοκλήρωμα της κινήσεως.

Η σχέση έχει μία ενδιαφέρουσα φυσική ερμηνεία. Για πολύ μικρές γωνίες θ η έκφραση $\frac{1}{2}r\cdot(rd\theta)$ δίνει το εμβαδόν που διέγραψε το διάνυσμα θέσεως ή η επιβατική ακτίνα r σε κάποιο χρόνο dt. Οπότε η έκφραση $\frac{1}{2}r\cdot(rd\theta/dt)$ δίνει την μεταβολή του εμβαδού ανά μονάδα χρόνου. Γράφουμε την σχέση με την μορφή

$$\frac{1}{2}r\cdot(rd\theta) = \frac{M}{2m}dt$$

Η παραπάνω σχέση λέει ότι η διανυσματική ακτίνα διαγράφει σε ίσους χρόνους ίσα εμβαδά. Η πρόταση ονομάζεται ο νόμος ή το θεώρημα των εμβαδών.



Σχήμα 4.5
Ο νόμος των εμβαδών για την κεντρική κίνηση

Τα δύο ολοκληρώματα της κινήσεως περιγράφουν πλήρως το πρόβλημα των κεντρικών κινήσεων. Η δεύτερη σταθερά της κινήσεως η στροφορμή δεν περιέχει το δυναμικό και μπορούμε να την ολοκληρώσουμε αμέσως. ´Εχουμε

$$r^2\frac{d\theta}{dt} = h \quad\Longrightarrow\quad d\theta = \frac{h}{r^2}dt \quad\Longrightarrow\quad \theta = \int \frac{h}{r^2}dt$$

Παρατηρούμε ότι η παράγωγος της γωνίας ως προς τον χρόνο είναι πάντα θετική και επομένως η γωνία θ είναι μια μονότονη συνάρτηση του χρόνου. Η γωνία δεν αλλάζει ποτέ σημείο κατά την κίνηση του υλικού σημείου.

Το πρώτο ολοκλήρωμα της κινήσεως, η ενέργεια, αν λάβουμε υπόψιν ότι $r^2\dot{\theta} = h$ στο πολικό αυτό σύστημα συντεταγμένων γράφεται

$$E = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right) + V(r) = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + \frac{h^2}{r^2}\right) + V(r)$$

Η εξίσωση είναι μια διαφορική εξίσωση με άγνωστη συνάρτηση την $r(t)$. Περιέχει το δυναμικό και δεν εξαρτάται από την γωνία $\theta(t)$. Είναι το ακτινικό μέρος της κινήσεως. Μπορούμε να θεωρήσουμε την παραπάνω ενέργεια σαν την ενέργεια ενός σώματος που κινείται σε μία διάσταση σε δυναμικό $W(r)$ που δίνεται από την σχέση

$$W(r) = V(r) + \frac{mh^2}{2r^2} = V(r) + \frac{M^2}{2mr^2}$$

Το δυναμικό αυτό ονομάζεται ενεργό ή φαινομενικό δυναμικό και ο όρος $M^2/2mr^2$ κεντρομόλος ενέργεια.

Από την εξίσωση της ενέργειας παίρνουμε την σχέση

$$\frac{dr}{dt} = \sqrt{\frac{2}{m}(E - W(r))} \qquad \Longrightarrow \qquad dt = \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - W(r))}} \tag{4.2}$$

που μπορούμε να την ολοκληρώσουμε. Τελικά βρίσκουμε

$$t = \int \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - V(r)) - \frac{M^2}{m^2 r^2})}} \qquad \text{και} \qquad \theta = \int \frac{h}{r^2}dt \tag{4.3}$$

Οι σχέσεις αυτές αποτελούν τη λύση του προβλήματος στη γενική του μορφή. Δίνουν τα μεγέθη $r(t)$ και $\theta(t)$ σε παραμετρική μορφή με παράμετρο τον χρόνο t.

Συνήθως την εξίσωση της τροχιάς την γράφουμε σαν μία συνάρτηση της μορφής $r = r(\theta)$. Η δεύτερη από τις εξισώσεις (4.3) αν αντικαταστήσουμε το dt από την (4.2) γίνεται

$$\theta = \int \frac{M}{r^2}\frac{dr}{\sqrt{2m(E - V(r)) - \frac{M^2}{r^2}}} \tag{4.4}$$

που είναι μια συνάρτηση της μορφής $\theta = \theta(r)$ και παριστάνει την τροχιά του υλικού σημείου.

Οι τιμές του r που ικανοποιείται η εξίσωση

$$E = V(r) + \frac{M^2}{2mr^2}$$

ορίζουν τα όρια της τροχιάς. Αν η εξίσωση δεν έχει λύσεις ή έχει μια λύση η κίνηση δεν περιορίζεται και το υλικό σημείο μπορεί να πάει στο άπειρο.

Αν η εξίσωση αυτή έχει δύο λύσεις, r_μ και r_ε, $r_\mu > r_\varepsilon$, τότε η κίνηση περιορίζεται μεταξύ των κύκλων με ακτίνες τις δύο αυτές ρίζες. Το διάνυσμα θέσεως έχει μια μέγιστη τιμή ίση με r_μ και μία ελάχιστη ίση με r_ε. Την χρονική στιγμή που $r(t) = r_\mu$ ή $r(t) = r_\varepsilon$ ή ταχύτητα $\dot{r}$ μηδενίζεται. Αυτό όμως δεν σημαίνει ότι σταματάει η κίνηση διότι η γωνία $\theta(t)$ μεταβάλλεται και η γωνιακή του ταχύτητα δεν μηδενίζεται $\dot{\theta} \neq 0$. Την στιγμή αυτή η τιμή του r περνάει από την ελάχιστη ή την μέγιστη τιμή της και μετά αρχίζει να αυξάνει ή να ελαττώνεται. Η ελάχιστη τιμή του διανύσματος θέσεως ονομάζεται περίκεντρο και η μέγιστη απόκεντρο.

Όμως αν και η κίνηση είναι πεπερασμένη αυτό δεν σημαίνει ότι ή τροχιά είναι μια κλειστή καμπύλη. Αποδεικνύεται ότι μόνο στις περιπτώσεις που το δυναμικό είναι ανάλογο του $1/r$ ή του r^2 η τροχιά είναι μια κλειστή καμπύλη. Στις άλλες περιπτώσεις η τροχιά δεν κλείνει και μετά από ένα μεγάλο χρονικό διάστημα το υλικό σημείο περνάει τελικά από όλα τα σημεία του δακτυλίου.

Παρατήρηση: Παρατηρούμε ότι για $r \to 0$ ο όρος $M/2mr^2$ υποχρεώνει το φαινομενικό δυναμικό να πάει στο $+\infty$ ακόμα και αν το δυναμικό είναι ελκτικό. Επομένως το υλικό σημείο θα πέσει στο κέντρο του πεδίου, μόνο εάν το δυναμικό V πηγαίνει στο $-\infty$ πιο γρήγορα έτσι ώστε για $r \to 0$ το φαινομενικό δυναμικό να παραμένει ελκτικό. Δηλαδή για να πάει το υλικό σημείο στην θέση $r = 0$ πρέπει το δυναμικό να είναι τέτοιο ώστε

$$V(r) + \frac{M^2}{2mr^2} < 0 \qquad \Longrightarrow \qquad r^2 V(r) < -\frac{M^2}{2m}$$

Μια λύση της ανισότητας είναι ένα δυναμικό ανάλογο του $-1/r^n$ όπου $n > 2$.

Μια σπουδαία εφαρμογή μια κεντρικής κινήσεως είναι η κίνηση της γης γύρω από τον ήλιο. Η δύναμη που συγκρατεί την γη κατά την περιφορά της γύρω από τον ήλιο είναι αντιστρόφως ανάλογη του τετραγώνου της αποστάσεως. Φυσικά θεωρούμε την επίδραση των άλλων πλανητών αμελητέα. Το δυναμικό πεδίο είναι το πεδίο της βαρύτητας. Το πεδίο αυτό είναι πάντα ελκτικό. Ένα άλλο πεδίο με τα ίδια χαρακτηριστικά είναι το ηλεκτροστατικό πεδίο που μπορεί να είναι όχι μόνο ελκτικό αλλά και απωστικό. Τα δύο πεδία μπορούν να μελετηθούν μαζί με κατάλληλη εκλογή των σταθερών.

Στο ηλεκτροστατικό πεδίο Κουλόμπ, η δύναμη που ασκείται μεταξύ δύο φορτίων q_1 και q_2 δίνεται από την σχέση

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r^2}\vec{r}_0$$

Στο πεδίο βαρύτητας, η δύναμη που ασκείται μεταξύ των μαζών m_1 και m_2 δίνεται από την σχέση

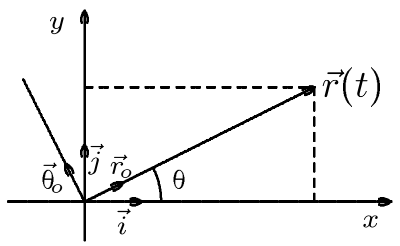
$$\vec{F} = -G\frac{m_1 m_2}{r^2}\vec{r}_0$$

Το πεδίο της βαρύτητας λύνεται στις ασκήσεις.

Ασκήσεις

Άσκηση 4.1

Να βρεθούν οι ταχύτητα και η επιτάχυνση ενός κινητού σε πολικές συντεταγμένες.



Σχήμα 4.6
Το διάνυσμα θέσεως ενός κινητού

Λύση: Έστω ένα κινητό με διάνυσμα θέσεως $\vec{r}(t)$. Συμβολίσουμε με $\vec{r}_0$ το μοναδιαίο διάνυσμα κατά την διεύθυνση του $\vec{r}$, και με $\vec{\theta}_0$ το κάθετο προς το $\vec{r}_0$ μοναδιαίο διάνυσμα. Η φορά του $\vec{\theta}_0$ είναι η φορά που αυξάνει η γωνία θ. Το διάνυσμα θέσεως $\vec{r}$ έχει καρτεσιανές συνιστώσες $x(t)$ και $y(t)$ και πολικές συνιστώσες $r(t)$ και $\theta(t)$.

Αν ένα σημείο του χώρου έχει καρτεσιανές συντεταγμένες (x, y) και πολικές συντεταγμένες (r, θ) τότε ισχύουν οι ακόλουθες σχέσεις όπως φαίνεται από το σχήμα

$$x = r\,\text{συν}\,\theta \qquad y = r\,\text{ημ}\,\theta \qquad -\infty < x < \infty \qquad -\infty < y < \infty$$

Λύνουμε τις εξισώσεις αυτές ως προς r και θ.

$$r = \left(x^2 + y^2\right)^{1/2} \qquad \theta = \text{τοξεφ}\,(y/x) \qquad 0 \le r < \infty \qquad 0 \le \theta < 2\pi$$

Ορίζουμε τις συνιστώσες του διανύσματος της ταχύτητας από τις σχέσεις

$$\upsilon_x = \frac{d}{dt}x \qquad \upsilon_y = \frac{d}{dt}y \qquad \upsilon_r = \frac{d}{dt}r \qquad \upsilon_\theta = \frac{d}{dt}\theta$$

Και επομένως

$$\upsilon_x = \frac{d}{dt}x = \frac{d}{dt}\left(r\,\text{συν}\,\theta\right) = \dot{r}\,\text{συν}\,\theta - r\dot{\theta}\,\text{ημ}\,\theta$$

$$\upsilon_y = \frac{d}{dt}y = \frac{d}{dt}\left(r\,\text{ημ}\,\theta\right) = \dot{r}\,\text{ημ}\,\theta - r\dot{\theta}\,\text{συν}\,\theta$$

Οι παραπάνω σχέσεις γράφονται σε μορφή μητρών

$$\begin{pmatrix} \vec{\upsilon}_x \\ \vec{\upsilon}_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{συν}\,\theta & -\text{ημ}\,\theta \\ \text{ημ}\,\theta & \text{συν}\,\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{r} \\ r\dot{\theta} \end{pmatrix}$$

Οι συντεταγμένες του διανύσματος της ταχύτητας ικανοποιούν τις σχέσεις που δίνουν τις συντεταγμένες ενός διανύσματος ως προς ένα περιστρεφόμενο σύστημα δηλαδή τις σχέσεις

$$\begin{pmatrix} \vec{\upsilon}_r \\ \vec{\upsilon}_\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{συν}\,\theta & \text{ημ}\,\theta \\ -\text{ημ}\,\theta & \text{συν}\,\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \upsilon_x \\ \upsilon_y \end{pmatrix}$$

Επομένως έχουμε

$$\begin{pmatrix} \vec{\upsilon}_r \\ \vec{\upsilon}_\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{συν}\,\theta & \text{ημ}\,\theta \\ -\text{ημ}\,\theta & \text{συν}\,\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{συν}\,\theta & -\text{ημ}\,\theta \\ \text{ημ}\,\theta & \text{συν}\,\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{r} \\ r\dot{\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{r} \\ r\dot{\theta} \end{pmatrix}$$

Άρα τελικά οι συνιστώσες της ταχύτητας σε πολικές συντεταγμένες είναι

$$\upsilon_r = \dot{r} \qquad\qquad \upsilon_\theta = r\dot{\theta}$$

Γράφουμε το διάνυσμα της ταχύτητας σε πολικές συντεταγμένες

$$\vec{\upsilon} = \dot{r}\vec{r}_0 + r\dot{\theta}\vec{\theta}_0$$

Για να βρούμε την επιτάχυνση θα εργαστούμε με όμοιο τρόπο. Οι καρτεσιανές συνιστώσες της επιταχύνσεως είναι οι παράγωγοι ως προς τον χρόνο της ταχύτητας. Βρίσκουμε

$$\gamma_x = \frac{d}{dt}\upsilon_x = \ddot{r}\,\text{συν}\,\theta - 2\dot{r}\dot{\theta}\,\text{ημ}\,\theta - r\ddot{\theta}\,\text{ημ}\,\theta - r\dot{\theta}^2\,\text{συν}\,\theta =$$

$$= \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right) \sigma\upsilon\nu\,\theta - \left(2\dot{r}\dot{\theta}\,\eta\mu\,\theta + r\ddot{\theta}\right) \eta\mu\,\theta$$

$$\gamma_y = \frac{d}{dt}\upsilon_y = \ddot{r}\,\eta\mu\,\theta + 2\dot{r}\dot{\theta}\,\sigma\upsilon\nu\,\theta + r\ddot{\theta}\,\sigma\upsilon\nu\,\theta - r\dot{\theta}^2\,\eta\mu\,\theta =$$

$$= \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right) \eta\mu\,\theta + \left(2\dot{r}\dot{\theta}\,\eta\mu\,\theta + r\ddot{\theta}\right) \sigma\upsilon\nu\,\theta$$

Σε μορφή μητρών οι δύο παραπάνω σχέσεις γράφονται

$$\begin{pmatrix} \gamma_x \\ \gamma_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma\upsilon\nu\,\theta & -\,\eta\mu\,\theta \\ \eta\mu\,\theta & \sigma\upsilon\nu\,\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \\ 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} \end{pmatrix}$$

Αλλά και οι συντεταγμένες του διανύσματος της επιταχύνσεως ικανοποιούν τις σχέσεις που δίνουν τις συνιστώσες ενός διανύσματος ως προς ένα περιστρεφόμενο σύστημα δηλαδή τις ακόλουθες σχέσεις.

$$\begin{pmatrix} \gamma_r \\ \gamma_\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma\upsilon\nu\,\theta & \eta\mu\,\theta \\ -\,\eta\mu\,\theta & \sigma\upsilon\nu\,\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_x \\ \gamma_y \end{pmatrix}$$

Επομένως έχουμε

$$\begin{pmatrix} \gamma_r \\ \gamma_\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma\upsilon\nu\,\theta & \eta\mu\,\theta \\ -\,\eta\mu\,\theta & \sigma\upsilon\nu\,\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma\upsilon\nu\,\theta & -\,\eta\mu\,\theta \\ \eta\mu\,\theta & \sigma\upsilon\nu\,\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \\ 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \\ 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} \end{pmatrix}$$

Άρα τελικά οι συνιστώσες της επιταχύνσεως σε πολικές συντεταγμένες είναι

$$\gamma_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \qquad \gamma_\theta = 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}$$

Γράφουμε την επιτάχυνση σε πολικές συντεταγμένες

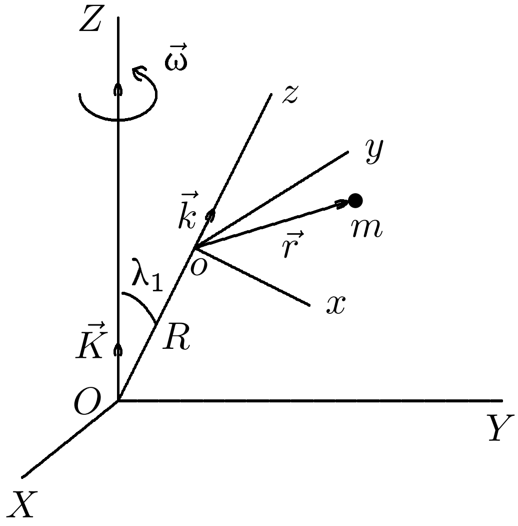
$$\vec{\gamma} = \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right) \vec{r}_0 + \left(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}\right) \vec{\theta}_0$$

Σημειώνουμε τέλος την ταχύτητα και την επιτάχυνση ενός υλικού σημείου σε κυλινδρικές συντεταγμένες.

$$\vec{\upsilon} = \dot{r}\vec{r}_0 + r\dot{\theta}\vec{\theta}_0 + \dot{z}\vec{k}, \qquad \vec{\gamma} = \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right) \vec{r}_0 + \left(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}\right) \vec{\theta}_0 + \ddot{z}\vec{k}$$

Άσκηση 4.2

Ένα σώμα εκτοξεύεται από ένα σημείο της επιφάνειας της γης με αρχική ταχύτητα $\vec{v}$. Να γραφούν οι εξισώσεις της τροχιάς του αν ληφθεί υπ' όψη η περιστροφή της γης γύρω από τον άξονα της.



Σχήμα 4.7
Δύο αδρανιακά συστήματα πάνω στην γη

Λύση: Διαλέγουμε τον προσανατολισμό των αξόνων x και y έτσι ώστε το διάνυσμα $\vec{v}$ να βρίσκεται πάνω στο $xz-$επίπεδο και ο άξονα z να είναι κατακόρυφος. Θεωρούμε ένα ακίνητο σύστημα ΟΧΥΖ με κέντρο το κέντρο της γης και την διεύθυνση του Z άξονα τη διεύθυνση νότος βορράς. Αν $\vec{K}$ το μοναδιαίο διάνυσμα στον OZ άξονα τότε η γωνιακή ταχύτητα της γης είναι $\vec{\omega} = \omega\vec{K}$. Η γη κάνει μια πλήρη περιστροφή γύρω από τον άξονά της σε 24 ώρες ή 86.400 δευτερόλεπτα. Άρα η τιμή του ω είναι

$$\omega = \frac{2\pi}{86.400} = 0,0000727\frac{rad}{sec}$$

Θεωρούμε επίσης ένα σύστημα αναφοράς $oxyz$ σταθερά συνδεδεμένο στο σημείο o της γης που μετέχει της περιστροφής της γης. Ο άξονας oz είναι κατακόρυφος και ο άξονας oy δείχνει την ανατολή. Η γωνία των ΟΖ και oy είναι $\pi/2$. Η επιτάχυνση της βαρύτητας έχει την διεύθυνση του κατακόρυφου άξονα δηλαδή $\vec{g} = g\vec{k}$. Η γωνία των αξόνων oz και OZ είναι

λ_1. Προφανώς $\lambda_1 = \pi/2 - \lambda$ όπου λ το γεωγραφικό πλάτος του κέντρου ο του κινούμενου συστήματος.

Η επιτάχυνση $\gamma_{\sigma\tau\alpha\theta}$ στο σταθερό σύστημα και η επιτάχυνση γ στο κινούμενο σύστημα του υλικού σημείου συνδέονται με τη σχέση

$$\gamma_{\sigma\tau\alpha\theta} = \gamma + 2\vec{\omega} \times \vec{\upsilon} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$$

Όλα τα μεγέθη στην δεξιά πλευρά του ίσον αναφέρονται στο κινούμενο σύστημα. Έχουμε παραλείψει τον όρο $\dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}_{\kappa\iota\nu}$ διότι η γωνιακή ταχύτητα της γης είναι σταθερή. Αν συμβολίσουμε με $\vec{g}$ την επιτάχυνση της βαρύτητας τότε η διαφορική εξίσωση της τροχιάς ενός σημείου στο κινούμενο σύστημα είναι

$$\vec{g} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} + 2\vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$$

Η τιμή του ω είναι πολύ μικρή και θα παραλείψουμε σε πρώτη προσέγγιση τον τρίτο όρο στην εξίσωση κινήσεως που περιέχει το ω^2

Οι συνιστώσες της γωνιακής ταχύτητας της γης ως προς το περιστρεφόμενο σύστημα είναι

$$\vec{\omega} = (\omega\vec{K} \cdot \vec{i})\,\vec{i} + (\omega\vec{K} \cdot \vec{j})\,\vec{j} + (\omega\vec{K} \cdot \vec{k})\,\vec{k} =$$

$$= -\omega\,\sigma\upsilon\nu(90^o - \lambda_1)\,\vec{i} + 0\,\vec{j} + \omega\,\sigma\upsilon\nu\,\lambda_1\,\vec{k} = -\omega\,\sigma\upsilon\nu\,\lambda\,\vec{i} + \omega\,\eta\mu\,\lambda\,\vec{k}$$

Υπολογίζουμε το εξωτερικό γινόμενο $\vec{\omega} \times \dot{\vec{r}}$

$$\vec{\omega} \times \dot{\vec{r}} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -\omega\,\sigma\upsilon\nu\,\lambda & 0 & \omega\,\eta\mu\,\lambda \\ \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \end{vmatrix}$$

$$= -\omega\dot{y}\,\eta\mu\,\lambda\,\vec{i} + (\omega\dot{x}\,\eta\mu\,\lambda + \omega\dot{z}\,\sigma\upsilon\nu\,\lambda)\,\vec{j} - \omega\dot{y}\,\sigma\upsilon\nu\,\lambda\,\vec{k}$$

Επομένως οι εξισώσεις κινήσεως του υλικού σημείου γράφονται

$$\ddot{x} = 2\omega\dot{y}\,\eta\mu\,\lambda \qquad \ddot{y} = -2\omega\dot{x}\,\eta\mu\,\lambda - 2\omega\dot{z}\,\sigma\upsilon\nu\,\lambda \qquad \ddot{z} = -g + 2\omega\dot{y}\,\sigma\upsilon\nu\,\lambda$$

Μπορούμε να γράψουμε τις εξισώσεις της κινήσεως όταν υπάρχει τριβή ανάλογη της ταχύτητας. Είναι φανερό ότι οι εξισώσεις αυτές είναι

$$\ddot{x}+c\,\dot{x} = 2\omega\dot{y}\,\eta\mu\,\lambda \quad \ddot{y}+c\,\dot{y} = -2\omega\dot{x}\,\eta\mu\,\lambda - 2\omega\dot{z}\,\sigma\upsilon\nu\,\lambda \quad \ddot{z}+c\,\dot{z} = -g+2\omega\dot{y}\,\sigma\upsilon\nu\,\lambda$$

Οι αρχικές συνθήκες του προβλήματος είναι

$$\vec{r}(0) = \vec{r}_0 = (x_0, y_0, z_0,) \qquad \text{και} \qquad \dot{\vec{r}}(0) = \dot{\vec{r}}_0 = (\dot{x}_0, \dot{x}_0, \dot{z}_0)$$

Ένα πρώτο ολοκλήρωμα των παραπάνω εξισώσεων βρίσκεται εύκολα. Αν λάβουμε υπ' όψη και τις αρχικές συνθήκες το αποτέλεσμα είναι

$$\begin{aligned}
\dot{x} + c(x - x_0) &= 2\omega(y - y_0)\,\text{ημ}\,\lambda + \dot{x}_0 \\
\dot{y} + c(y - y_0) &= -\,2\omega(x - x_0)\,\text{ημ}\,\lambda - 2\omega(z - z_0)\,\text{συν}\,\lambda + \dot{y}_0, \\
\dot{z} + c(z - z_0) &= -\,g\,t + 2\omega(y - y_0)\,\text{συν}\,\lambda + \dot{z}_0
\end{aligned}$$

Θα λύσουμε το παραπάνω σύστημα των διαφορικών εξισώσεων μόνο για ορισμένες ειδικές περιπτώσεις στην επόμενη άσκηση.

Άσκηση 4.3

Ένα σώμα αφήνεται να πέσει προς την γη από ένα ύψος h μικρό σε σύγκριση με την ακτίνα της γης. Να αποδειχτεί ότι το σώμα δεν θα πέσει κατακόρυφα αλλά θα μετατοπιστεί από την κατακόρυφο κατά $\frac{1}{3}\omega g\,t^3\,\text{συν}\,\lambda$. Έχουμε παραλείψει τους όρους με ω^2.

Λύση: Από τα δεδομένα του προβλήματος οι αρχικές συνθήκες του προβλήματος είναι

$$\vec{r}_0 = (0, 0, h) \qquad \text{και} \qquad \dot{\vec{r}}_0 = (0, 0, 0)$$

Επομένως οι εξισώσεις της κινήσεως της προηγούμενης ασκήσεως γράφονται

$$\dot{x} = 2\omega y\,\text{ημ}\,\lambda \qquad \dot{y} = -2\omega x\,\text{ημ}\,\lambda - 2\omega(z - h)\,\text{συν}\,\lambda \qquad \dot{z} = -g\,t + 2\omega y\,\text{συν}\,\lambda$$

Στη τρίτη εξίσωση αντικαθιστούμε το y από την πρώτη και έχουμε

$$\dot{z} = -g\,t + \dot{x}\frac{\text{συν}\,\lambda}{\text{ημ}\,\lambda}$$

Ολοκληρώνουμε την σχέση αυτή. Η σταθερά της ολοκληρώσεως είναι ίση με h. Βρίσκουμε

$$z = -\frac{1}{2}g\,t^2 + x\frac{\text{συν}\,\lambda}{\text{ημ}\,\lambda} + h$$

Την τιμή αυτή του z την αντικαθιστούμε στην δεύτερη και έχουμε

$$\dot{y} = -2\omega x\,\text{ημ}\,\lambda - 2\omega\left(-\frac{1}{2}g\,t^2 + x\frac{\text{συν}\,\lambda}{\text{ημ}\,\lambda}\right)\text{συν}\,\lambda = \omega g\,t^2\,\text{συν}\,\lambda - \frac{2\omega}{\text{ημ}\,\lambda}x$$

Η παράγωγος της πρώτης των εξισώσεως κινήσεως δίνει το $\ddot{x}$ συναρτήσει του $\dot{y}$ που το παίρνουμε από την παραπάνω εξίσωση. Έχουμε

$$\ddot{x} = \ 2\omega\dot{y}\,\text{ημ}\,\lambda = \ 2\omega\,\text{ημ}\,\lambda\left(\omega g\,t^2\,\text{συν}\,\lambda - \frac{2\omega}{\text{ημ}\,\lambda}x\right) = 0$$

Η σχέση αυτή είναι ίση με το μηδέν διότι έχουμε συμφωνήσει να παραλείπουμε τους όρους με ω^2. Επομένως

$$x = 0 \qquad \text{και} \qquad z = -\frac{1}{2}g\,t^2 + h$$

Τις τιμές αυτές του x και του z τις αντικαθιστούμε στην δεύτερη των εξισώσεων κινήσεως και έχουμε

$$\dot{y} = -2\omega\left(-\frac{1}{2}g\,t^2 + h - h\right)\text{συν}\,\lambda = g\omega\,t^2\,\text{συν}\,\lambda$$

Ολοκληρώνουμε τέλος την εξίσωση αυτή. Η σταθερά ολοκληρώσεως είναι μηδέν. Άρα βρίσκουμε

$$y = \frac{1}{3}\omega g\,t^3\,\text{συν}\,\lambda$$

Ο χρόνος που το σώμα θα πέσει στο έδαφος δίνεται από την σχέση $z = 0$. Τον χρόνο αυτόν τον αντικαθιστούμε στην παραπάνω εξίσωση και παίρνουμε την απόσταση από την κατακόρυφο όταν το σώμα ακουμπήσει στο έδαφος.

$$t = \left(\frac{2h}{g}\right)^{1/2} \qquad \Longrightarrow \qquad y = \frac{1}{3}\omega g\left(\frac{2h}{g}\right)^{3/2}\text{συν}\,\lambda = \omega\frac{(2h)^{3/2}}{3\sqrt{g}}\,\text{συν}\,\lambda$$

Για το γεωγραφικό πλάτος της Πάτρας 38^o περίπου η σχέση αυτή δίνει

$$y = 0,00001725\ h^{3/2}$$

Οπότε αν το σώμα πέφτει από ένα ύψος 100 μέτρων η απόκλιση είναι περίπου 2 εκατοστά.

Άσκηση 4.4

Να μελετηθεί το πεδίο της βαρύτητας. Το δυναμικό του πεδίου είναι αντιστρόφως ανάλογο της ακτίνας και είναι ελκτικό της μορφής.

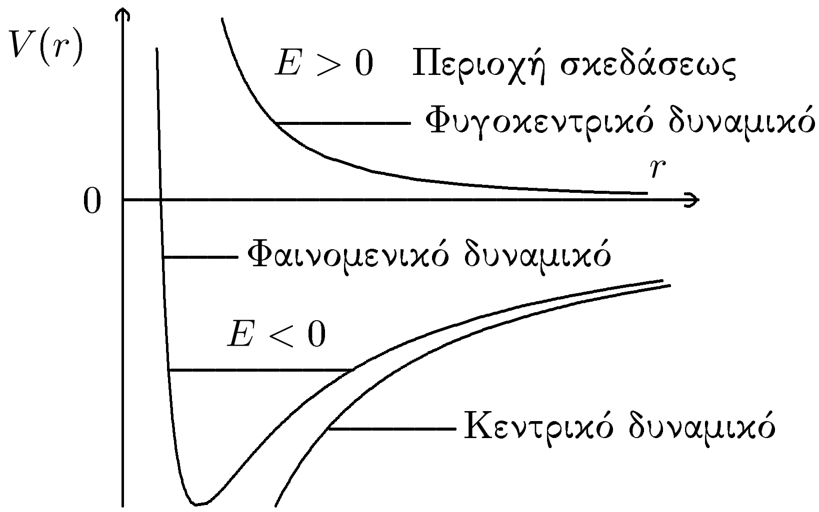
$$V(r) = -\frac{\alpha}{r} \qquad \alpha > 0$$

Λύση: Η δύναμη που ασκείται στο πεδίο αυτό είναι

$$\vec{F}(\vec{r}) = -\vec{\nabla} V(r) = \vec{\nabla}\,\frac{\alpha}{r} = -\frac{\alpha}{r^2}\,\vec{r}$$

είναι δηλαδή αντιστρόφως ανάλογο του τετραγώνου της ακτίνας. Έχει την διεύθυνση του διανύσματος θέσεως και φορά προς το κέντρο του πεδίου. Το φαινομενικό δυναμικό είναι

$$W(r) = -\frac{\alpha}{r} + \frac{M^2}{2mr^2}$$



Σχήμα 4.8
Το δυναμικό του πεδίου βαρύτητας

Το δυναμικό πηγαίνει στο άπειρο για $r \to 0$. Αυτό σημαίνει ότι το υλικό σημείο δεν θα πέσει ποτέ πάνω στο κέντρο. Επίσης $W \to 0$ για

$r \to \infty$ που σημαίνει ότι το δυναμικό πεδίο είναι πρακτικά μηδέν σε μεγάλες αποστάσεις από το ελκτικό κέντρο. Η καμπύλη έχει ένα ελάχιστο

$$W_{\varepsilon\lambda\alpha\chi} = W\left(\frac{M^2}{\alpha m}\right) = -\frac{\alpha^2 m}{2M^2}$$

Από το σχήμα φαίνεται ότι εάν $\mathrm{E} > 0$ η κίνηση δεν περιορίζεται. Το σωμάτιο από το άπειρο σκεδάζεται πάνω στο δυναμικό και επιστρέφει στο άπειρο. Όταν $E < 0$ η κίνηση είναι πεπερασμένη.

Η εξίσωση της τροχιάς δίνεται από την σχέση (4.4) που στην προκειμένη περίπτωση γίνεται

$$\theta = \int \frac{M}{r^2} \frac{dr}{\sqrt{2m\left(E + \frac{\alpha}{r}\right) - \frac{M^2}{r^2}}}$$

Το ολοκλήρωμα είναι στοιχειώδες. Για το υπολογισμό του ολοκληρώματος κάνουμε την αντικατάσταση

$$r = \frac{\rho}{1+eu} \qquad \text{όπου} \qquad \rho = \frac{M^2}{m\alpha} \qquad \text{και} \qquad e = \sqrt{1 + \frac{2EM^2}{m\alpha^2}}$$

Οπότε έχουμε

$$dr = \frac{\partial r}{\partial u}du = -\frac{\rho e}{(1+eu)^2} = -\frac{e}{\rho}r^2 du \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{dr}{r^2} = -\frac{e}{\rho}du$$

Το μέγεθος κάτω από την ρίζα του ολοκληρώματος γίνεται

$$2m(E+\frac{\alpha}{r}) - \frac{M^2}{r^2} = 2mE + \frac{2m\alpha}{\rho}(1+eu) - \frac{M^2}{\rho^2}\left(1+eu\right)^2 = 2m\mathrm{E} + \frac{2m\alpha}{\rho} - \frac{M^2}{\rho^2}$$

$$+\left(\frac{2m\alpha e}{\rho} - \frac{2M^2 e}{\rho^2}\right)u - \frac{M^2e^2}{\rho^2}u^2 = \frac{M^2e^2}{\rho^2} - \frac{M^2e^2}{\rho^2}u^2 = \frac{M^2e^2}{\rho^2}\left(1-u^2\right)$$

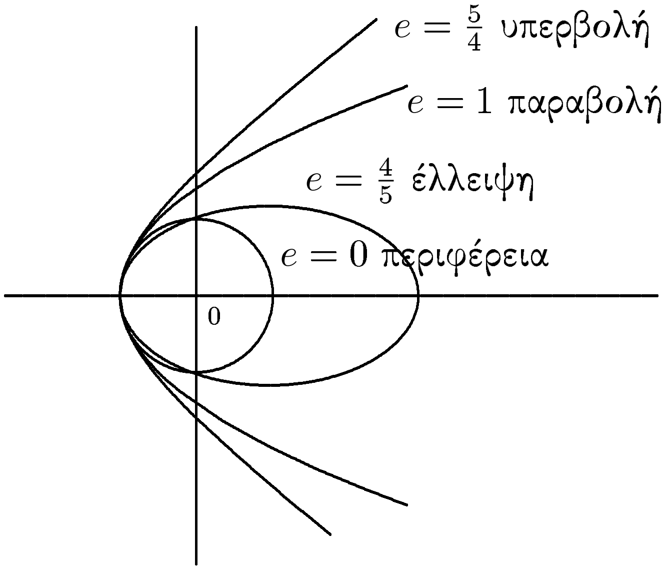
Αντικαθιστούμε τις τιμές αυτές στο ολοκλήρωμα και βρίσκουμε

$$\theta = \int \frac{M\left(-\frac{e}{\rho}du\right)}{\frac{Me}{\rho}\sqrt{1-u^2}} = -\int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \text{τοξσυν}u + C$$

Διαλέγουμε τις αρχικές συνθήκες έτσι ώστε η σταθερά να μηδενίζεται. Άρα $u = \sigma\upsilon\nu\,\theta$ και τελικά η λύση του προβλήματος είναι

$$r = \frac{\rho}{1 + e\,\sigma\upsilon\nu\,\theta}$$

Η λύση παριστάνει κωνική τομή με μία εστία την αρχή των αξόνων. Το ρ καλείται παράμετρος και το e εκκεντρότητα της τροχιάς. Η εκκεντρότητα της τροχιάς δίνει ένα μέτρο πόσο αποκλίνει η τροχιά από το να είναι κύκλος.



Σχήμα 4.9
Διάφορες πιθανές τροχιές ανάλογα με την τιμή της εκκεντρότητας

Η τροχιά είναι προφανώς κύκλος για

$$e = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad E = -m\alpha^2/2M^2$$

με ακτίνα ίση με ρ . Η τιμή αυτή της ενέργειας είναι η μικρότερη τιμή που μπορεί να έχει η ενέργεια, ίση με την ελάχιστη τιμή του φαινομενικού δυναμικού.

Η τροχιά είναι έλλειψη για

$$0 < e < 1 \qquad \Longrightarrow \qquad E < 0$$

Το ελκτικό κέντρο βρίσκεται στη μία εστία της . Το μήκος του διανύσματος θέσεως μεταβάλλεται μεταξύ των τιμών

$$r_\varepsilon = \frac{\rho}{1+e} \qquad \text{για} \qquad \theta = 0 \qquad \text{και} \qquad r_\mu = \frac{\rho}{1-e} \qquad \text{για} \qquad \theta = \pi$$

Το πρώτο σημείο ονομάζεται, προκειμένου για το σύστημα γης ήλιου, περιήλιο και το δεύτερο αφήλιο. Οι δύο ημιάξονες της ελλείψεως και το εμβαδόν της δίνονται από τις σχέσεις

$$a = \frac{\rho}{\sqrt{1-e^2}} = \frac{M}{\sqrt{2mE}} \quad b = \frac{\rho}{1-e^2} = \frac{\alpha}{2E} \qquad\qquad \text{Εμβ} = \pi ab = \frac{\alpha M}{2E\sqrt{2Em}}$$

Παρατηρούμε ότι ο μεγάλος ημιάξονας εξαρτάται μόνο από την ενέργεια.

Η περίοδος Τ είναι ο χρόνος που χρειάζεται το σώμα για να διαγράψει την έλλειψη. Η περίοδος βρίσκεται αν ολοκληρώσουμε την εξίσωση

$$\frac{1}{2} r \cdot (r d\theta) = \frac{M}{2m} dt$$

του νόμου των εμβαδών από 0 έως Τ. Η γωνία θ μεταβάλλεται από 0 έως 2π έτσι ώστε να διαγράψουμε όλη την επιφάνεια της ελλείψεως. Έχουμε

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{2} r \cdot r d\theta = \int_0^{\mathrm{T}} \frac{\mathrm{M}}{2m} dt \qquad \Longrightarrow \qquad \pi ab = \frac{M}{2m} T$$

Λύνουμε την εξίσωση αυτή ως προς Τ και έχουμε

$$T = \pi\alpha\sqrt{m/2E^3} = 2\pi b^{3/2}\sqrt{m/\alpha}$$

Η τελευταία αυτή σχέση λέει ότι το τετράγωνο της περιόδου Τ είναι ανάλογο της τρίτης δυνάμεως του μεγάλου ημιάξονα b. Η πρόταση αυτή είναι ο τρίτος νόμος του Κέπλερ.

Η τροχιά είναι παραβολή για

$$e = 1 \qquad \Longrightarrow \qquad E = 0$$

Η μικρότερη απόσταση από το κέντρο είναι $r_\varepsilon = \rho/2$. Μια τέτοια τροχιά διαγράφει ένα σώμα που ξεκινάει χωρίς αρχική ταχύτητα από το άπειρο.

Τέλος η τροχιά είναι υπερβολή για

$$e > 1 \qquad \Longrightarrow \qquad E > 0$$

Το σώμα σκεδάζεται από το δυναμικό.

Άσκηση 4.5

Να εξεταστεί το προηγούμενο πρόβλημα όταν το δυναμικό είναι απωστικό.

Λύση: Ένα φορτισμένο σωμάτιο κινείται προς το κέντρο ενός πυρήνα που το απωθεί με δύναμη που έχει μέτρο αντιστρόφως ανάλογη του τετραγώνου της αποστάσεως. Η δυναμικό πεδίο που δημιουργεί ο πυρήνας γύρω του στο πείραμα αυτό είναι ένα απωστικό κεντρικό πεδίο Κουλόμπ. Το σωμάτιο σκεδάζεται από το δυναμικό που είναι της μορφής

$$V(r) = \frac{\alpha}{r} \qquad \alpha > 0$$

Στην περίπτωση αυτή δεν υπάρχουν όρια στην κίνηση. Το φαινομενικό δυναμικό είναι

$$W(r) = \frac{\alpha}{r} + \frac{M^2}{2mr^2}$$

Η συνάρτηση είναι φθίνουσα σε όλο το διάστημα και η ενέργεια του σωματίου είναι πάντα θετική. Είναι προφανές ότι το σώμα δεν περιορίζεται κατά την κίνηση του.

Οι εξισώσεις της κινήσεως και οι λύσεις τους είναι οι ίδιες όπως στην προηγούμενη περίπτωση του ελκτικού δυναμικού. Απλώς στη θέση του α βάζουμε το $-\alpha$. Η τροχιά είναι πάλι μια κωνική τομή της μορφής.

$$r = \frac{\rho}{-1 + e\,\text{συν}\,\theta} \qquad \text{όπου} \qquad \rho = \frac{M^2}{m\alpha} \qquad \text{και} \qquad e = \sqrt{1 + \frac{2EM^2}{m\alpha^2}}$$

Η τροχιά είναι παραβολή για

$$e = 1 \qquad \Longrightarrow \qquad E = 0$$

Η τροχιά είναι υπερβολή για

$$e > 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \mathrm{E} > 0$$

Δηλαδή για οποιαδήποτε θετική μη μηδενική τιμή της ενέργειας.

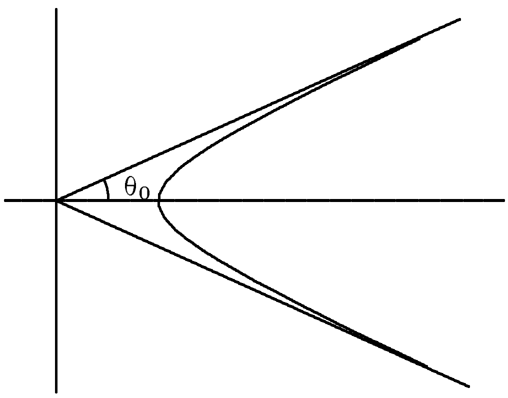
Η απόσταση του περικέντρου είναι η μικρότερη τιμή που έχει το μέγεθος r. Στην προκειμένη περίπτωση είναι

$$r_\mu = \frac{\rho}{e-1} \qquad \text{για} \qquad \theta = 0$$

Αν μηδενίσουμε τον παρανομαστή της τροχιάς βρίσκουμε την γωνία που σχηματίζει η ασύμπτωτος της υπερβολής με την διεύθυνση που μετράμε την γωνία θ. Η γωνία αυτή είναι

$$-1 + e\,\text{συν}\,\theta' = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \theta' = \pm\text{τοξσυν}(1/e)$$

Το σωμάτιο πλησιάζει τον πυρήνα από την μία ασύμπτωτο της υπερβολής όπου $r(-\theta') = \infty$ φθάνει μέχρι την απόσταση $r(0) = r_\mu$, σκεδάζεται από το δυναμικό και απομακρύνεται από την άλλη ασύμπτωτο όπου $r(\theta') = \infty$. Η γωνία μεταξύ των δύο ασυμπτώτων είναι $2\theta'$.



Σχήμα 4.10
Σκέδαση σε ένα απωστικό κεντρικό δυναμικό

Άσκηση 4.6

Να βρεθεί η ταχύτητα που χρειάζεται ένα σώμα για να διαφύγει από την γη (ταχύτητα διαφυγής).

Λύση: Η δύναμη που ασκεί μία μάζα M σε μια άλλη μάζα m είναι

$$\vec{F} = -\frac{GMm}{r^2}\vec{r}_0$$

Είναι γνωστό ότι ένα σώμα μάζας m έλκεται από την γη με δύναμη mg. Επομένως

$$\frac{GMm}{R^2} = mg \qquad \Longrightarrow \qquad GM = gR^2$$

Ο τύπος αυτός δίνει ένα από τα παραπάνω μεγέθη όταν γνωρίζουμε τα άλλα τρία. Η σταθερά G είναι η παγκόσμιος σταθερά της βαρύτητας, η g είναι η επιτάχυνση της βαρύτητας, η R η ακτίνα της γης και τέλος η M είναι η μάζα της γης. Οι σταθερές έχουν τις ακόλουθες τιμές.

$$G = 6.67 \cdot 10^{-11} \qquad\qquad g = 9.81 m/s^2$$

$$R = 6,38 \cdot 10^6 m \qquad\qquad \mathrm{M} = 5,98 \cdot 10^{24} Kgr$$

Το δυναμικό είναι $V = -GMm/r$ και έχει την προηγούμενη μορφή όπου $\alpha = GMm$. Η Ενέργεια στην επιφάνεια της γης και η ενέργεια σε ένα ύψος H_∞ είναι ίσες. Επομένως έχουμε

$$E = \frac{1}{2} m\upsilon_0^2 - \frac{GMm}{R} = \frac{1}{2} m\upsilon_\infty^2 - \frac{GMm}{R + H_\infty}$$

Η ταχύτητα υ_∞ είναι μηδέν και για $H_\infty \to \infty$ το δυναμικό είναι επίσης μηδέν. Άρα έχουμε

$$\frac{1}{2} m\upsilon_0^2 - \frac{GMm}{R} = 0 \quad \Longrightarrow \quad v_0 = \sqrt{\frac{2GM}{R}} \quad \Longrightarrow \quad v_0 = \sqrt{2gR}$$

Η τιμή της ταχύτητας για τα δεδομένα της γης είναι

$$v_0 = 11,2 km/s$$

Η ταχύτητα διαφυγής είναι ανεξάρτητη της μάζας.

Άσκηση 4.7

Ένα σώμα κινείται σε μια ελλειπτική τροχιά της μορφής

$$r = \frac{\rho}{1 + e\,\text{συν}\,\theta}$$

Να βρεθεί η δύναμη που επενεργεί στο σώμα.

Λύση: Το πρόβλημα έχει ιστορική αξία. Είναι το πρόβλημα που έλυσε ο Κέπλερ για να βρει του γνωστούς νόμους του.

Θα εργαστούμε σε πολικές συντεταγμένες. Επειδή η δύναμη είναι κεντρική το διάνυσμα της στροφορμής είναι σταθερό. Έχουμε

$$\frac{M}{m} = r^2\dot{\theta} \qquad \Longrightarrow \qquad \dot{\theta} = \frac{M}{m\,r^2}$$

Η εξισώσεις της κινήσεως σε πολικές συντεταγμένες είναι

$$F = m\left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)$$

Η πρώτη παράγωγος του r ως προς τον χρόνο είναι

$$\dot{r} = \frac{\rho e\,\eta\mu\,\theta}{(1+e\,\sigma\upsilon\nu\,\theta)^2}\dot{\theta} = \frac{e}{\rho}\,\eta\mu\,\theta\, r^2\dot{\theta} = \frac{eM}{m\rho}\,\eta\mu\,\theta$$

και η δεύτερη παράγωγος είναι

$$\ddot{r} = \frac{eM}{m\rho}\,\sigma\upsilon\nu\,\theta\,\dot{\theta} = \frac{M}{m\rho}\left(\frac{\rho}{r} - 1\right)\frac{M}{mr^2}$$

Το $\sigma\upsilon\nu\,\theta$ το πήραμε από την εξίσωση της τροχιάς. Κατά συνέπεια η δύναμη είναι

$$F = m\left(\frac{M}{m\rho}\left(\frac{\rho}{r} - 1\right)\frac{M}{mr^2} - r\left(\frac{M}{m\,r^2}\right)^2\right) = -\frac{M^2}{m\rho r^2} = -\frac{\alpha}{r^2}$$

όπου $\alpha = M^2/m\rho$. Δηλαδή η δύναμη είναι ανάλογη του αντιστρόφου τετραγώνου του μήκους r.

Κεφάλαιο 5

Οι ομάδες της κλασσικής μηχανικής

5.1 Οι Ομάδες

Ορισμός: Ομάδα είναι ένα σύνολο G εφοδιασμένο με μια πράξη ορισμένη ως εξής. Σε κάθε διατεταγμένο ζεύγος α, β της ομάδας αντιστοιχεί ένα μόνο στοιχείο γ της ομάδας. Γράφουμε

$$\gamma = \alpha\beta$$

η πράξη αυτή ονομάζεται πράξη εσωτερικής συνθέσεως της ομάδας G. Ο νόμος πρέπει να ικανοποιεί τις ακόλουθες ιδιότητες

$$\begin{array}{ll} \alpha(\beta\gamma) = (\alpha\beta)\gamma & \text{προσεταιριστική ιδιότητα} \\ \alpha e = e\alpha = \alpha & \text{ύπαρξη ουδέτερου στοιχείου} \\ \alpha\alpha^{-1} = \alpha^{-1}\alpha = e & \text{ύπαρξη συμμετρικού στοιχείου} \end{array}$$

Για παράδειγμα η πρόσθεση και ο πολλαπλασιασμός στο σύνολο $\Re$ είναι τέτοιες πράξεις εσωτερικής συνθέσεως. Υποομάδα ονομάζεται το υποσύνολο μιάς ομάδας που είναι ομάδα το ίδιο με την ίδια πράξη. Για να αποδείξουμε ότι ένα σύνολο είναι υποομάδα αποδεικνύουμε συνήθως ότι

$$\forall \alpha, \beta \in H \qquad \alpha\beta^{-1} \in H$$

Γενικά το στοιχείο αβ και το στοιχείο βα είναι διαφορετικά. Αν τα στοιχεία αυτά συμπίπτουν δηλαδή

$$\alpha\beta = \beta\alpha$$

τότε η ομάδα ονομάζεται αβελιανή.

Δύο στοιχεία α και β μιας ομάδας ονομάζονται συζυγή αν υπάρχει στοιχείο γ της ομάδας τέτοιο ώστε

$$\beta = \gamma^{-1}\alpha\gamma$$

Η πράξη ονομάζεται μετασχηματισμός ομοιότητας.

Αν μια ομάδα περιέχει πεπερασμένο πλήθος στοιχείων ονομάζεται πεπερασμένη ομάδα άλλως ονομάζεται άπειρη. Το πλήθος των στοιχείων μιάς ομάδας ονομάζεται τάξη της ομάδας. Μια άπειρη ομάδα μπορεί να είναι διακεκριμένη ή συνεχής ανάλογα αν το πλήθος των στοιχείων της είναι αριθμήσιμο ή συνεχές. Τα στοιχεία μιας συνεχούς ομάδας μπορούν να χαρακτηριστούν από ένα σύνολο παραμέτρων που μεταβάλλονται κατά συνεχή τρόπο σε κάποιο διάστημα. Το σύνολο των παραμέτρων αυτών ονομάζεται τάξη της ομάδας.

Αν G_1 και G_2 είναι δύο ομάδες και

$$f : G_1 \longrightarrow G_2$$

μια απεικόνιση τέτοια ώστε να ισχύει

$$f(\alpha\beta) = f(\alpha)f(\beta) \qquad\qquad \forall\alpha, \beta \in G_1$$

τότε ή απεικόνιση ονομάζεται ομομορφισμός και οι ομάδες ονομάζονται ομομορφικές. Αν η απεικόνιση είναι αμφιμονοσήμαντη και επί οι ομάδες ονομάζονται ισομορφικές. Οι ισομορφικές ομάδες έχουν τις ίδιες αναλυτικές δομές και έτσι είναι αρκετό να μελετηθεί μόνο μία από αυτές.

Ορισμός: Αναπαράσταση ομάδας. Θεωρούμε μια ομάδα G και κάποιο σύνολο S. Συμβολίζουμε με $M(S)$ το σύνολο των μετασχηματισμών του S που να είναι όλες οι αμφιμονοσήμαντες και επί απεικονίσεις

$$T(\alpha) : S \longrightarrow S$$

Μια απεικόνιση T που απεικονίζει ένα στοιχείο της ομάδας στο σύνολο των μετασχηματισμών

$$\mathrm{T} : G \longrightarrow M(S) \qquad\qquad \mathrm{T} : \alpha \in G \longrightarrow T(\alpha) \in M(S)$$

με την ιδιότητα η σύνδεση δύο μετασχηματισμών $T(\alpha)$ και $\mathrm{T}(\beta)$ να υπάρχει και να είναι ο μετασχηματισμός $\mathrm{T}(\alpha\beta)$ δηλαδή

$$\mathrm{T}(\alpha)\mathrm{T}(\beta) = \mathrm{T}(\alpha\beta)$$

ονομάζεται πραγμάτωση της ομάδας G.

Αν το σύνολο S είναι ένας πραγματικός ή μιγαδικός διανυσματικός χώρος V και οι μετασχηματισμοί είναι οι (μη ιδιάζοντες) γραμμικοί μετασχηματισμοί (τελεστές) στον χώρο αυτό τότε η πραγμάτωση αυτή ονομάζεται (γραμμική) αναπαράσταση της ομάδας G. Αν ο διανυσματικός χώρος V είναι χώρος Χίλμπερτ (πλήρης διανυσματικός χώρος εσωτερικού γινομένου) τότε η αναπαράσταση ονομάζεται μοναδιαία (unitary).

Είναι γνωστό ότι σε κάθε γραμμικό τελεστή αντιστοιχεί ένας τετραγωνικός πίνακας με διάσταση ίση με την διάσταση του διανυσματικού χώρου. Οι πίνακες αυτοί αναπαριστούν τα στοιχεία της ομάδας. Η τάξη των πινάκων ονομάζεται διάσταση της αναπαραστάσεως.

Το στοιχείο $\mathrm{T}(\alpha)\mathrm{T}(\beta)$ είναι το γινόμενο των πινάκων $\mathrm{T}(\alpha)$ και $\mathrm{T}(\beta)$. Αποδεικνύεται εύκολα ότι σε κάθε αναπαράσταση το σύνολο $\mathrm{T}(e)$ όπου e είναι το ουδέτερο στοιχείο της ομάδας πρέπει να είναι ο ταυτοτικός πίνακας. Επίσης το στοιχείο $\mathrm{T}(\alpha^{-1})$ πρέπει να είναι ο πίνακας $\mathrm{T}(\alpha)^{-1}$.

Η μελέτη μιας αφηρημένης πεπερασμένης ομάδας τάξεως n, με την βοήθεια της αναπαραστάσεως, μπορεί να γίνει από την μελέτη των τετραγωνικών πινάκων της ίδιας διαστάσεως. Οι πίνακες πρέπει να έχουν ορίζουσα διάφορη του μηδενός έτσι ώστε να έχουν αντίστροφο.

Παράδειγμα: Οι πίνακες συνεπώς παίζουν βασικό ρόλο στις αναπαραστάσεις. Γι' αυτό δίνουμε εδώ μερικά παραδείγματα συνόλου πινάκων που αποτελούν ομάδα με νόμο τον πολλαπλασιασμό των πινάκων. Τα στοιχεία των πινάκων μπορεί να είναι πραγματικοί ή μιγαδικοί αριθμοί.

Η γενική γραμμική ομάδα. Αποτελείται από το σύνολο όλων των πινάκων Α με ορίζουσα διάφορη του μηδενός, δηλαδή $det\mathrm{A} \neq 0$.

Υποομάδες της παραπάνω ομάδας είναι:

Η ειδική γραμμική ομάδα. Αποτελείται από το σύνολο όλων των πινάκων με ορίζουσα ίση με την μονάδα.

Η μοναδιαία ομάδα. Αποτελείται από το σύνολο των μοναδιαίων πινάκων U εκείνων δηλαδή που ικανοποιούν την σχέση $(U^{+})U = 1$ όπου U^{+} είναι ο συζυγοανάστροφος του U. Η σχέση γράφεται αναλυτικά

$$\sum_{k=1}^{n} u_{ki}^{*} u_{kj} = \delta_{ij}$$

Η ειδική μοναδιαία ομάδα. Αποτελείται από το σύνολο των μοναδιαίων πινάκων με ορίζουσα ίση με την μονάδα.

Η ορθογώνια ομάδα. Αποτελείται από το σύνολο των ορθογωνίων πινάκων O δηλαδή εκείνων που ικανοποιούν την σχέση $\left(O^T\right) O = 1$ όπου O^T είναι ο ανάστροφος του πίνακα Ο.

Η Ειδική ορθογώνια ομάδα. Αποτελείται από τους ορθογώνιους πίνακες με ορίζουσα ίση με την μονάδα, δηλαδή $det\mathrm{O} = 1$.

5.2 Οι Λη Ομάδες και οι Λη Άλγεβρες

Οι ομάδες με άπειρο και μη αριθμήσιμο αριθμό στοιχείων έχουν πολλές εφαρμογές στην Φυσική. Η μελέτη των ομάδων αυτών όμως παρουσιάζουν το πρόβλημα ως προς την συνέχεια. Είναι συνεπώς απαραίτητο να εισάγουμε μια τοπολογία στην ομάδα. Στην παράγραφο αυτή δίνουμε συνοπτικά και χωρίς αποδείξεις κάποια από τα συμπεράσματα τις θεωρίας. Τα βασικά θεωρήματα της θεωρίας αυτής έχουν αποδειχτεί από την Λη.

Ορισμός: Τοπολογική Ομάδα. Μια ομάδα εφοδιασμένη με μια τοπολογία ονομάζεται τοπολογική ομάδα αν οι δύο δομές είναι συμβιβαστές μεταξύ τους. Τούτο σημαίνει ότι ο εσωτερικός νόμος και ο νόμος της αντιστροφής πρέπει να είναι συνεχείς ως προς την τοπολογία της ομάδας.

Τα στοιχεία μιας συνεχούς ομάδας μπορούν να χαρακτηριστούν από ένα σύνολο παραμέτρων. Το σύνολο των παραμέτρων αυτών αποτελούν τον παραμετρικό χώρο της ομάδας. Η εξάρτηση αυτή γράφεται αναλυτικά

$$x = x(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) \qquad y = y(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n)$$

Για τον νόμο της ομάδας και για το αντίστροφο στοιχείο γράφουμε

$$xy = z(\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_n) \qquad \gamma_i = \gamma_i(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n; \beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n)$$

$$x^{-1} = x^{-1}(\delta_1, \delta_2, \cdots, \delta_n) \qquad \delta_i = \delta_i(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$$

Ορισμός: Μια τοπολογική ομάδα ονομάζεται Λη ομάδα αν υπάρχει μια γειτονιά N_e του ταυτοτικού στοιχείου της ομάδας που μπορούμε να την απεικονίσουμε με κάποιον ομομορφισμό πάνω σε ένα ανοικτό και φραγμένου υποσύνολο του πραγματικού Ευκλείδιου χώρου $\Re^n$. Το n ονομάζεται διάσταση της Λη ομάδας.

Σε μια Λη ομάδα οι παράμετροι γ_i του γινομένου xy είναι αναλυτικές συναρτήσεις των παραμέτρων α_i και β_i των στοιχείων x και y και οι παράμετροι δ_i του αντιστρόφου στοιχείου x^{-1} είναι αναλυτικές συναρτήσεις των παραμέτρων α_i του x.

Διαλέγουμε τις συνεχείς παραμέτρους της ομάδας έτσι ώστε αν e είναι το ουδέτερο στοιχείο της ομάδας να έχουμε

$$e = e(0, 0, \cdots, 0)$$

Με αυτή την εκλογή των παραμέτρων ένα στοιχείο γειτονικό του ταυτοτικού μπορεί να αναπτυχθεί σε σειρά της μορφής

$$x = x(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) = x(0, 0, \cdots, 0) + \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \left(\frac{\partial x}{\partial \alpha_k}\right)_{\alpha_k=0} + \cdots$$

Αν περιοριστούμε μέχρι του όρους πρώτης τάξεως γράφουμε

$$x(\alpha_i) = x(0) + i\sum_{k=1}^{n} \alpha_k J_k \qquad\qquad J_k = \left(\frac{\partial x}{\partial \alpha_k}\right)_{\alpha_k=0}$$

Για ένα στοιχείο $x(\alpha_i)$ απομακρυσμένο από το ουδέτερο στοιχείο e μπορούμε να γράφουμε

$$\alpha_i = \lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ \mathrm{N}\to\infty}} \varepsilon\mathrm{N}$$

και άρα έχουμε

$$\lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ \mathrm{N}\to\infty}} x(\varepsilon\mathrm{N}) = \lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ \mathrm{N}\to\infty}} \underbrace{x(\varepsilon)x(\varepsilon), \cdots, x(\varepsilon)}_{\mathrm{N}\ \text{φορές}} = \lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ \mathrm{N}\to\infty}} (e + i\varepsilon J_k)^N = exp\{i\alpha_i J_i\}$$

Επομένως για ένα στοιχείο x της Λη - ομάδας που ανήκει στο σύνολο που περιέχει το ταυτοτικό στοιχείο e μπορούμε να γράφουμε

$$x = x(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) = exp\{i\alpha_1\}exp\{i\alpha_2\} \cdots exp\{i\alpha_n\} = exp\{i\sum_{k=1} \alpha_k J_k\}$$

Οι απειροστοί τελεστές J_k ονομάζονται γεννήτορες της ομάδας. Μια Λη ομάδα με n συνεχείς παραμέτρους έχει n γεννήτορες. Είναι προφανές ότι κάθε γραμμικός συνδυασμός γεννητόρων είναι επίσης γεννήτορας και επομένως, οι n γεννήτορες μιας Λη ομάδας αποτελούν βάση ενός διανυσματικού χώρου L με διάσταση n.

Ονομάζουμε μεταθέτη δύο γεννητόρων J_k και J_l και τον συμβολίζουμε με $[J_k, J_l]$ το γινόμενο

$$[J_k, J_l] = J_k J_l - J_l J_k$$

Η πράξη αυτή είναι ένας δεύτερος νόμος των στοιχείων του διανυσματικού χώρου L και έτσι ο χώρος αυτός γίνεται μια άλγεβρα που ονομάζεται Λη άλγεβρα.

Ορίζουμε τις σταθερές c_{kl}^m από την σχέση

$$(1) \qquad [J_k, J_l] = J_k J_l - J_l J_k = \sum_{m=1}^{n} c_{kl}^m J_m$$

και ονομάζουμε τις σταθερές αυτές κατασκευαστικές σταθερές της Λη άλγεβρας.

Αποδεικνύεται εύκολα ότι ο μεταθέτης όπως ορίστηκε ικανοποιεί τις σχέσεις

Γραμμικότητα	$[\mathrm{A}+\mathrm{B}, \Gamma] = [\mathrm{A}, \Gamma] + [\mathrm{B}, \Gamma]$
Αντισυμμετρικότητα	$[\mathrm{A}, \mathrm{B}] = -[\mathrm{B}, \mathrm{A}]$
Ταυτότητα του Τζακόμπι	$[A, [B, \Gamma]] + [\mathrm{B}, [\Gamma, \mathrm{A}]] + [\Gamma, [\mathrm{A}, \mathrm{B}]] = 0$

Κατά συνέπεια και οι κατασκευαστικές σταθερές ικανοποιούν τις παρακάτω σχέσεις

$$c_{kl}^m = -c_{lk}^m \qquad \sum_{m=1}^{n} \left(c_{kl}^m c_{jm}^n + c_{lj}^m c_{km}^n + c_{jk}^m c_{lm}^n \right) = 0$$

Αν έχουμε κάποιες σταθερές που να ικανοποιούν τις παραπάνω σχέσεις τότε μπορούμε να κατασκευάσουμε την Λη ομάδα. Η Λη άλγεβρες είναι χρήσιμες διότι κάθε αναπαράσταση μιας Λη άλγεβρας μπορεί να δώσει μια αναπαράσταση της αντίστοιχης Λη ομάδας. Αν βρούμε n τετραγωνικούς πίνακες που να ικανοποιούν τις σχέσεις (1) με τις δοσμένες κατασκευαστικές σταθερές τότε μπορούμε να τις χρησιμοποιήσουμε στην θέση των γεννητόρων J_k και να κατασκευάσουμε μια αναπαράσταση της αντίστοιχης Λη άλγεβρας.

Αν δοθεί μια Λη άλγεβρα είναι δυνατόν να κατασκευάσουμε την αντίστοιχη Λη ομάδα σε μια γειτονιά του ταυτοτικού στοιχείου. Αν συμβολίσουμε με Α, Β, Γ, $\cdots$ τα διανύσματα της άλγεβρας τότε ορίζουμε τα στοιχεία της ομάδας με $exp(\mathrm{A})$, $exp(\mathrm{B})$, $exp(\Gamma)$, $\cdots$. Το ταυτοτικό στοιχείο της ομάδας είναι το $exp(0)$ όπου 0 είναι το μηδενικό διάνυσμα της Λη άλγεβρας. Το αντίστροφο στοιχείο του $exp(A)$ είναι το $exp(-\mathrm{A})$.

Θεωρούμε τέλος δύο στοιχεία μιας Λη ομάδας $exp(\mathrm{A})$ και $exp(\mathrm{B})$. Το γινόμενο των δύο αυτών στοιχείων $exp(\mathrm{A})exp(\mathrm{B})$ πρέπει να ανήκει στην ομάδα και φυσικά να έχει την μορφή κάποιου εκθετικού $exp(\Gamma)$ όπου το Γ γράφεται σαν συνάρτηση των Α και Β. Ο τύπος είναι αρκετά πολύπλοκος. Γράφουμε παρακάτω τους πρώτους όρους του γινομένου

$$\Gamma = \mathrm{A} + \mathrm{B} + \frac{1}{2}[A, B] + \frac{1}{12}[A - B, [\mathrm{A}, \mathrm{B}]] + \cdots$$

Αποδεικνύεται ότι η σειρά συγκλίνει σε κάποια γειτονιά N_e της ομάδας.

Παράδειγμα: Παραδείγματα Λη ομάδων είναι η ομάδα περιστροφών $R(3)$, η Ευκλείδεια ομάδα, η ομάδα Λορεντς κ.λ.π. που θα εξεταστούν στις επόμενες παραγράφους.

Μια πολύ χρήσιμη ομάδα για την μελέτη των στοιχειωδών σωματιδίων είναι η ομάδα $SU(3)$. Η ομάδα αυτή αποτελείται από τους μοναδιαίους πίνακες τάξεως 3 με ορίζουσα ίση με $+1$. Έχει $3^2 - 1 = 8$ γεννήτορες. Για την αναπαράσταση την ομάδας αυτής χρησιμοποιούνται οι παρακάτω πίνακες.

$$J_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, J_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, J_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$J_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, J_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}, J_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$J_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, J_8 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Οι κατασκευαστικές σταθερές δίνονται από την σχέση

$$[J_k, J_l] = 2i \sum_{m=1}^{8} c_{kl}^{m} J_m$$

όπου όλες είναι μηδέν εκτός από τις παρακάτω

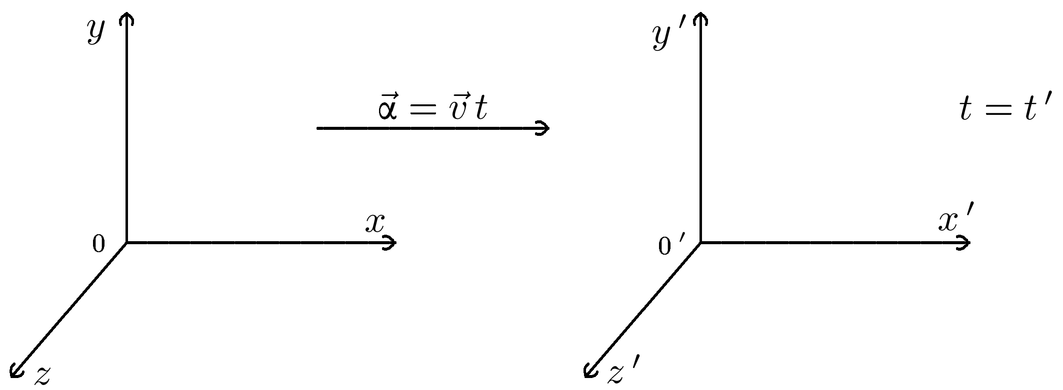
$$c_{12}^{3} = 1, \quad c_{14}^{7} = c_{51}^{6} = c_{24}^{6} = c_{25}^{7} = c_{34}^{5} = c_{63}^{7} = 1/2, \quad c_{45}^{8} = c_{67}^{8} = \sqrt{3}/2$$

5.3 Η ομάδα μεταφοράς T_3

Θεωρούμε δύο καρτεσιανά συστήματα συντεταγμένων S και S' στον χώρο. Το ένα σύστημα προκύπτει από το άλλο με μία μετατόπιση της αρχής του κατά ένα διάνυσμα $\vec{\alpha}$ Δηλαδή τα δύο συστήματα έχουν διαφορετική αρχή ενώ η διεύθυνση των αξόνων τους παραμένει σταθερή.

Αν x, y, z και x', y', z' είναι οι συντεταγμένες ενός διανύσματος ως προς τα συστήματα S και S' τότε ισχύουν προφανώς οι σχέσεις

$$x' = x + \alpha_1 \qquad y' = y + \alpha_2 \qquad z' = z + \alpha_3$$



Σχήμα 5.1
Μετατόπιση δύο αδρανιακών συστημάτων

Θα συμβολίζουμε το σύνολο όλων αυτών των μετασχηματισμών με T_3. Κάθε στοιχείο $M(\vec{\alpha})$ του συνόλου ορίζεται πλήρως από τους τρεις πραγματικούς αριθμούς $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$.

Αν το διάνυσμα $\vec{\alpha}$ προσδιορίζει την μετατόπιση του συστήματος S στο σύστημα S' και το $\vec{\beta}$ την μετατόπιση συστήματος S' στο σύστημα S'', τότε η μετατόπιση του συστήματος S στο σύστημα S'' προσδιορίζεται από το διάνυσμα $\vec{\gamma}$ όπου φυσικά

$$\vec{\gamma} = \vec{\alpha} + \vec{\beta}$$

Η παραπάνω πράξη ορίζει μια πράξη στο σύνολο T_3 ως προς την οποία το T_3 είναι μια ομάδα. Επειδή η πράξη της ομάδας έχει της ίδιες ιδιότητες προφανώς με την πρόσθεση των διανυσμάτων η ομάδα είναι αβελιανή. Οι δύο μετατοπίσεις $M(\vec{\alpha})M(\vec{\beta})$ και $M(\vec{\beta})M(\vec{\alpha})$ έχουν το ίδιο αποτέλεσμα και είναι ίσες με την μετατόπιση $M(\vec{\alpha}+\vec{\beta})$.

Θα βρούμε τώρα πως μεταβάλλεται μια συνάρτηση $\psi(x, y, z)$ από την μετατόπιση των συντεταγμένων. Θεωρούμε μία απειροστή μετατόπιση κατά την διεύθυνση μόνο του x άξονα που περιγράφεται από το διάνυσμα $(\delta\alpha_1, 0, 0)$. Αν με ψ' συμβολίζουμε την νέα συνάρτηση που θα προκύψει έχουμε

$$\psi' = \psi(x', y', z') = M(\delta\alpha_1, 0, 0)\psi(x, y, z) = \psi(x + \delta\alpha_1, y, z)$$

Αναπτύσσουμε την συνάρτηση κατά Τέυλορ και μηδενίζουμε του όρους με $(\delta\alpha_1)^2$ και μικρότερους. Βρίσκουμε

$$\psi' = \psi(x, y, z) + \delta\alpha_1 \frac{\partial\psi(x, y, z)}{\partial x} + O(\delta\alpha_1)^2 = \left(1 + \delta\alpha_1 \frac{\partial}{\partial x}\right)\psi(x, y, z)$$

Γράφουμε την παραπάνω σχέση με την μορφή

$$\psi' = (1 + i\delta\alpha_1 P_1)\,\psi \qquad \text{όπου} \qquad P_1 = -i\frac{\partial}{\partial x}$$

Μια μετατόπιση κατά την διεύθυνση του x άξονα μέτρου α_1 μπορεί να θεωρηθεί σαν N διαδοχικές απειροστές μετατοπίσεις κατά την διεύθυνση του x άξονα μέτρου $\delta\alpha_1 = \alpha_1/N$. ΄Εχουμε

$$\psi' = M(\alpha_1)\psi = \lim_{N\to\infty}\left(1 + i\frac{\alpha_1}{N}P_1\right)^N \psi = e^{i\alpha_1 P_1}\psi = e^{\alpha_1 \frac{\partial}{\partial x}}\psi(x) = \psi(x + \alpha_1)$$

Με όμοιο τρόπο για μετατοπίσεις κατά τις διευθύνσεις των y και z αξόνων βρίσκουμε

$$\psi' = (1 + i\delta\alpha_2 P_2)\,\psi \qquad \text{όπου} \qquad P_2 = -i\frac{\partial}{\partial y}$$

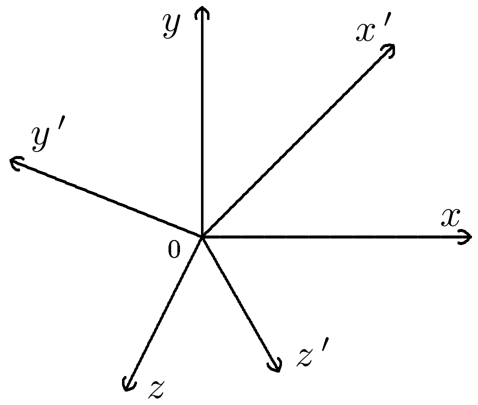
$$\psi' = (1 + i\delta\alpha_3 P_3)\,\psi \qquad \text{όπου} \qquad P_3 = -i\frac{\partial}{\partial z}$$

Παρατηρούμε ότι οι διαφορικοί τελεστές P_1, P_2 και P_3 ικανοποιούν τις σχέσεις

$$[P_j, P_k] = P_j P_k - P_k P_j = 0 \qquad j,k = 1,2,3$$

5.4 Η ομάδα περιστροφής $R(3)$

Έστω ένα δεξιόστροφο σύστημα αξόνων S στον χώρο με βασικά μοναδιαία διανύσματα $\vec{i}$, $\vec{j}$ και $\vec{k}$. Το σύστημα το περιστρέφουμε έτσι ώστε η αρχή των αξόνων να παραμένει σταθερή, ενώ τα βασικά διανύσματα αλλάξουν διεύθυνση. Το καινούργιο σύστημα το συμβολίζουμε με S' και τα βασικά μοναδιαία του διανύσματα με ($\vec{r}_0$, $\vec{\theta}_0$ και $\vec{\varphi}_0$). Θα βρούμε ακολούθως τον μετασχηματισμό που απεικονίζει το σύστημα S στο S'. Τα δύο συστήματα είναι και τα δύο δεξιόστροφα ή και τα δύο αριστερόστροφα. Μετασχηματισμός από αριστερόστροφο σε δεξιόστροφο ή αντιστρόφως δεν υπάρχει.



Σχήμα 5.2
Περιστροφή στον τριδιάστατο χώρο

Μια περιστροφή στον τριδιάστατο χώρο γύρω από τον άξονα που βρίσκεται το διάνυσμα $\vec{\alpha}$ υπό γωνία μέτρου $\alpha = \|\alpha\|$ ορίζεται από την ακόλουθη μήτρα περιστροφής.

$$\mathrm{A}_{jk}(\vec{\alpha}) = \delta_{jk}\,\sigma\upsilon\nu\,\alpha + \alpha_j\alpha_k\frac{1-\sigma\upsilon\nu\,\alpha}{\alpha^2} - \varepsilon_{jkm}\alpha_m\frac{\eta\mu\,\alpha}{\alpha}$$

Το δ_{jk} είναι το σύμβολο του Κρόνεκερ και ο τανυστής ε_{jkm} του Λεβί-Τσίβιτα ορίζεται ως εξής

$$\varepsilon_{123} = \varepsilon_{231} = \varepsilon_{312} = 1 \qquad \varepsilon_{321} = \varepsilon_{213} = \varepsilon_{132} = -1$$

και $\varepsilon_{jkm} = 0$ σε όλες τις υπόλοιπες περιπτώσεις.

Αν x'_j είναι οι συνιστώσες ενός διανύσματος στο σύστημα S' και x_j οι συνιστώσες του ίδιου διανύσματος ως προς το σύστημα S τότε έχουμε

$$x'_j = \sum_{k=1}^{3} A_{jk} x_k$$

Αν με e'_j και με e_j συμβολίσουμε τα βασικά διανύσματα στα δύο συστήματα συντεταγμένων τότε ισχύει

$$\vec{e}'_j = \sum_{k=1}^{3} A_{jk} \vec{e}_k$$

Αν γράψουμε την τρίτη εξίσωση από την παραπάνω σχέση βρίσκουμε

$$\vec{e}'_3 = \text{συν}\,\varphi sin\theta \vec{e}_1 + \text{ημ}\,\varphi\,\text{ημ}\,\theta \vec{e}_2 + \text{συν}\,\theta \vec{e}_3$$

Η σχέση αυτή είναι η ανάπτυξη του διανύσματος $\vec{e}'_3$ σε σφαιρικές συντεταγμένες ως προς το σύστημα S. Κατά συνέπεια οι γωνίες φ και θ είναι οι αντίστοιχες γωνίες της αναπτύξεως αυτής.

Είναι εύκολο να αποδειχτεί ότι η μήτρα Α ικανοποιεί τις σχέσεις

$$det|\mathrm{A}| = 1 \qquad \mathrm{A}\mathrm{A}^{\mathrm{T}} = \mathrm{A}^{\mathrm{T}}\mathrm{A} = \mathrm{I}(\text{Η μήτρα μονάδα})$$

όπου με A^{T} συμβολίζουμε τον ανάστροφο του πίνακα Α.

Η μήτρα Α είναι ορθογώνια και έχει ορίζουσα την μονάδα. Η δεύτερη από της σχέσεις αυτές συνεπάγεται ότι το μήκος των διανυσμάτων δεν μεταβάλλεται κατά την περιστροφή. Δηλαδή

$$\|\vec{r}\,'\|^2 = \|\vec{r}\|^2 \qquad \Longrightarrow \qquad x'^2 + y'^2 + z'^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

Συμβολίζουμε το σύνολο όλων των περιστροφών με $R(3)$. Κάθε στοιχείο του συνόλου αντιστοιχεί σε ένα πίνακα $\mathrm{A}(\vec{\alpha})$ με τρεις παραμέτρους $\vec{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$.

Μπορούμε να ορίσουμε μια πράξη στο σύνολο αυτό ως εξής

Έστω α ένα στοιχείο του συνόλου των περιστροφών $R(3)$ που αντιστοιχεί στον πίνακα A. O πίνακας A είναι ο πίνακας που παριστάνει την περιστροφή που οδηγεί ένα σύστημα S σε ένα άλλο σύστημα S'. Γράφουμε

$$S' = \alpha S$$

Έστω τώρα ένα άλλο στοιχείο β του συνόλου των περιστροφών που αντιστοιχεί στον πίνακα B και παριστάνει την περιστροφή του συστήματος S' σε ένα τρίτο σύστημα S''. Γράφουμε

$$S'' = \beta S'$$

Αν ένα διάνυσμα έχει συνιστώσες x_j, x'_j και x''_j ως προς τα τρία αυτά συστήματα τότε έχουμε

$$x''_j = B_{jl}x'_l = B_{jl}A_{lk}x_k = \Gamma_{jk}x_k, \qquad \text{όπου} \qquad \Gamma_{jk} = B_{jl}A_{lk}$$

Άρα το στοιχείο γ του συνόλου που παριστάνει την περιστροφή από το σύστημα S στο S'' αντιστοιχεί στην μήτρα περιστροφής Γ όπου

$$\Gamma = \mathrm{BA}$$

Γράφουμε

$$S'' = \beta\alpha S = \gamma S$$

Δηλαδή ο νόμος της ομάδας αντιστοιχεί στον πολλαπλασιασμό των πινάκων.

Η ομάδα αυτή δεν είναι αβελιανή αφού η μήτρα AB είναι διαφορετική από την μήτρα BA. Το αντίστροφο στοιχείο α^{-1} της ομάδας αντιστοιχεί στην αντίστροφη μήτρα A^{-1} που συμπίπτει με την ανάστροφη A^{T} αφού η μήτρα είναι ορθογώνια.

5.5 Η ομάδα $SU(2)$

Στην παράγραφο αυτή θα ορίσουμε την ομάδα $SU(2)$ και θα βρούμε πως συνδέεται η ομάδα αυτή με την ομάδα $R(3)$. Μας είναι απαραίτητοι οι ακόλουθοι ορισμοί

Ορισμός: Μια μιγαδική μήτρα A ονομάζεται ερμητιανή όταν η μήτρα συμπίπτει με την συζυγοανάστροφή της. Δηλαδή ισχύει

$$A = A^{+}$$

όπου με $A^{+} = \left(A^{T}\right)^{*}$ συμβολίζουμε την συζυγοανάστροφη την Α.

Ορισμός: Μια μιγαδική μήτρα U ονομάζεται μοναδιαία ($Unitary$) όταν η αντίστροφή της συμπίπτει με την συζυγοανάστροφή της δηλαδή

$$U^{+} = U^{-1} \qquad \Longrightarrow \qquad UU^{+} = U^{+}U = 1 \text{ (Ο πίνακας μονάδα)}$$

Αν η μήτρα U έχει στοιχεία της μορφής c_{ij} η παραπάνω σχέση γράφεται με την μορφή

$$\sum_{i} c_{ij} c_{ik}^{*} = \sum_{i} c_{ji} c_{ki}^{*} = \delta_{jk}$$

Παράδειγμα: Ένας αριθμός a μπορεί να θεωρηθεί σαν μήτρα με διάσταση 1×1. Η μήτρα αυτή είναι ερμητιανή αν ο αριθμός είναι πραγματικός $a \in \Re$. Ένας μιγαδικός αριθμός c με μέτρο την μονάδα $|c| = 1$ μπορεί να θεωρηθεί σαν μια μοναδιαία μήτρα με διάσταση 1×1. Γράφουμε έναν τέτοια αριθμό με την μορφή

$$c = e^{ia} \qquad a \in \Re$$

Ισχύει η γενικότερη πρόταση αν Α είναι μια ερμητιανή μήτρα τότε η μήτρα

$$U = e^{iA} = 1 + iA + \frac{1}{2!}(iA)^{2} + \frac{1}{3!}(iA)^{3} + \cdots$$

είναι μοναδιαία. Επίσης αν η μήτρα U είναι μοναδιαία τότε η μήτρα Α είναι ερμητιανή. Η μήτρα e^{iA} όπου A είναι μια μήτρα ορίζεται από το ανάπτυγμα της κατά Τέηλορ.

Αν η ερμητιανή μήτρα A έχει στοιχεία της μορφής a_{ij} τότε η σχέση $A = A^{*}$ γράφεται με την μορφή

$$a_{ij} = a_{ji}^{*}$$

παρατηρούμε ότι τα διαγώνια στοιχεία της μήτρας αυτής είναι πραγματικοί αριθμοί. Μια ερμητιανή μήτρα διαστάσεως 2×2 έχει την μορφή

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta^{*} \\ \beta & \gamma \end{pmatrix} \qquad \alpha \in \Re \quad \gamma \in \Re$$

Υποθέτουμε ότι το β είναι ένας μιγαδικός αριθμός της μορφής

$$\beta = x + iy \qquad \Longrightarrow \qquad \beta^{*} = x - iy$$

Αν επιπλέον ζητήσουμε η μήτρα αυτή να έχει τροχιά μηδέν τότε έχει την μορφή

$$A = \begin{pmatrix} z & x - iy \\ x + iy & -z \end{pmatrix} \qquad\qquad x, y, z \in \Re$$

Τροχιά ή ίχνος ενός πίνακα είναι το άθροισμα των διαγωνίων στοιχείων της. Για τον τυχόντα πίνακα $A = a_{ij}$ γράφουμε

$$TrA = \sum_i a_{ii}$$

Παρατηρούμε ότι η ορίζουσα της μήτρας αυτής είναι

$$\det A = \det \begin{pmatrix} z & x - iy \\ x + iy & -z \end{pmatrix} = -\left(x^2 + y^2 + z^2\right) = -\|\vec{r}\|^2$$

όπου $\|\vec{r}\|$ είναι το μήκος του διανύσματος $\vec{r} = (x, y, z)$

Είναι τώρα προφανές ότι αν βρούμε έναν μετασχηματισμό του παραπάνω πίνακα A τέτοιον ώστε ο νέος πίνακας A' να είναι επίσης ερμητιανός και να έχει επίσης τροχιά μηδέν τότε ο νέος πίνακας θα έχει την ίδια μορφή δηλαδή

$$A = \begin{pmatrix} z & x - iy \\ x + iy & -z \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{μετασχηματισμός}]{} A' = \begin{pmatrix} z' & x' - iy' \\ x' + iy' & -z' \end{pmatrix}$$

Αν επιπλέον ο ζητούμενος αυτός μετασχηματισμός διατηρεί αναλλοίωτη και την ορίζουσα του πίνακα A τότε το μήκος του διανύσματος $\vec{r}$ διατηρείται επίσης. Η τελευταία αυτή ιδιότητα είναι επίσης ιδιότητα και της ομάδας $R(3)$ των περιστροφών. Έτσι η ζητούμενη αυτή ομάδα μετασχηματισμών προσδιορίζει μια περιστροφή.

Ένας τέτοιος μετασχηματισμός είναι ο μετασχηματισμός

$$A' = UAU^{+} = UAU^{-1} \qquad\qquad U^{-1} = U^{+}$$

όπου η μήτρα U του μετασχηματισμού είναι μοναδιαία. Η απόδειξη είναι απλή σημειώνουμε μόνο ότι αν Α και Β είναι δύο τυχόντες πίνακες τότε ισχύουν οι σχέσεις

$$(AB)^{+} = B^{+}A^{+} \qquad (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

$$Tr(AB) = Tr(BA) \qquad \det(AB) = \det(BA) = (\det A)(detB)$$

Το σύνολο των παραπάνω μετασχηματισμών συμβολίζεται με $SU(2)$ και είναι το σύνολο των μοναδιαίων (Unitary) πινάκων διαστάσεων 2×2 με μια επί πλέον χαρακτηριστική (Special) ιδιότητα: η ορίζουσα του πίνακα είναι ίση με την μονάδα.

Αποδεικνύεται στις ασκήσεις ότι ένας τέτοιος πίνακας έχει την μορφή

$$U = \begin{pmatrix} c^* & -d \\ d^* & c \end{pmatrix} \qquad \text{όπου} \quad cc^* + dd^* = 1$$

Αν γράψουμε τους μιγαδικούς αριθμούς με την μορφή

$$c = a_0 + ia_3 \implies c^* = a_0 - ia_3 \qquad d = a_2 + ia_1 \implies d^* = a_2 - ia_1$$

τότε ο πίνακα γίνεται

$$U = \begin{pmatrix} a_0 - ia_3 & -a_2 - ia_1 \\ a_2 - ia_1 & a_0 + ia_3 \end{pmatrix} \quad \text{όπου} \quad a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 1 \qquad a_i \in \Re$$

Η ομάδα έχει τρεις παραμέτρους όπως ακριβώς και η ομάδα $R(3)$ των περιστροφών στον τριδιάστατο χώρο. Αυτό φαίνεται εύκολα αν γράψουμε ένα τυχόν στοιχείο της ομάδας $SU(2)$ με την μορφή

$$U(\xi, \eta, \zeta) = \begin{pmatrix} e^{i\xi} \,\text{συν}\, \eta & e^{i\zeta} \,\text{ημ}\, \eta \\ -e^{-i\zeta} \,\text{ημ}\, \eta & e^{-i\xi} \,\text{συν}\, \eta \end{pmatrix}$$

Οι τρεις παράμετροι της ομάδας είναι τα (ξ, ζ, η). Η χαρακτηριστική συνθήκη ικανοποιείται ταυτοτικά. Πράγματι

$$aa^* + bb^* = e^{i\xi} \,\text{συν}\, \eta e^{-i\xi} \,\text{συν}\, \eta + e^{i\zeta} \,\text{ημ}\, \eta e^{-i\zeta} \,\text{ημ}\, \eta = \text{συν}^2 \eta + \text{ημ}^2 \eta = 1$$

Για να δούμε καλύτερα πως η ομάδα αυτή παριστάνει περιστροφή θεωρούμε μια ιδική περίπτωση ενός πίνακα που εξαρτάται μόνο από την παράμετρο ξ. Για $\eta = 0$ βρίσκουμε

$$U(\xi) = \begin{pmatrix} e^{i\xi} & 0 \\ 0 & e^{-i\xi} \end{pmatrix} \qquad U^+(\xi) = U^{-1}(\xi) = U(-\xi) = \begin{pmatrix} e^{-i\xi} & 0 \\ 0 & e^{i\xi} \end{pmatrix}$$

Επομένως ο μετασχηματισμός είναι

$$\begin{pmatrix} z' & x'-iy' \\ x'+iy' & -z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{i\xi} & 0 \\ 0 & e^{-i\xi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z & x-iy \\ x+iy & -z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-i\xi} & 0 \\ 0 & e^{i\xi} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} z & (x-iy)\varepsilon^{2i\xi} \\ (x+iy)\varepsilon^{-2i\xi} & -z \end{pmatrix} \qquad \Longrightarrow$$

$$z' = z \qquad\qquad x'-iy' = (x-iy)e^{2i\xi}$$

Αν αναλύσουμε το εκθετικό βρίσκουμε

$$x'-iy' = (x-iy)e^{2i\xi} = (x-iy)\,(\text{συν}\,2\xi + i\,\text{ημ}\,2\xi) =$$

$$x\,\text{συν}\,2\xi + y\,\text{ημ}\,2\xi - i\,(y\,\text{συν}\,2\xi - x\,\text{ημ}\,2\xi)$$

Εξισώνουμε τα πραγματικά και τα φανταστικά μέρη της εξισώσεως αυτής και τελικά βρίσκουμε

$$z' = z \qquad\qquad x' = x\,\text{συν}\,2\xi + y\,\text{ημ}\,2\xi \qquad\qquad y' = y\,\text{συν}\,2\xi - x\,\text{ημ}\,2\xi$$

Κατά συνέπεια το $U(\xi)$ παριστάνει μια περιστροφή κατά γωνία 2ξ γύρω από τον άξονα των z και άρα αντιστοιχεί στο στοιχείο $A(0,0,2\xi)$ της ομάδας $R(3)$.

Εύκολα μπορούμε να δούμε ότι και το $-U(\xi)$ παριστάνει την ίδια περιστροφή

$$A' = (-U)A(-U^{+}) = UAU^{+}$$

Παρατηρούμε ότι μπορεί να γράφουμε

$$U' = -U(\xi) = \begin{pmatrix} -e^{i\xi} & 0 \\ 0 & -e^{-i\xi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{i(\xi+\pi)} & 0 \\ 0 & e^{-i(\xi+\pi)} \end{pmatrix} = U(\xi+\pi)$$

Το στοιχείο $U(\xi)$ του συνόλου $SU(2)$ και το "αντιδιαμετρικό" του στοιχείο $U(\xi+\pi)$ αντιστοιχούν στο στοιχείο $A(0,0,2\xi)$ της ομάδας $R(3)$. Δηλαδή η αντιστοιχία είναι δύο προς ένα.

Για να απλοποιήσουμε τις σχέσεις πολλές φορές χρησιμοποιούμε τις ακόλουθες μήτρες του Πάουλι

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad\qquad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \qquad\qquad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Οι μήτρες είναι μοναδιαίες και έχουν τροχιά μηδέν. Μαζί με τον πίνακα μονάδα σχηματίζουν ένα σύνολο τεσσάρων ανεξαρτήτων πινάκων. Με την βοήθεια των πινάκων αυτών μπορούμε να γράψουμε τους προηγούμενους πίνακες με την μορφή

$$A = x\sigma_1 + y\sigma_2 + z\sigma_3 \qquad U = a_0\sigma_1 - i\left(a_1\sigma_1 + a_2\sigma_2 + a_3\sigma_3\right) = a_0 - i\vec{a}\cdot\vec{\sigma}$$

Οι μήτρες του Πάουλι ικανοποιούν τις σχέσεις

$$\sigma_j\sigma_k = i\varepsilon_{jkm}\sigma_m \qquad \sigma_j\sigma_k - \sigma_k\sigma_j = 2i\varepsilon_{jkm}\sigma_m \qquad \sigma_j\sigma_k + \sigma_k\sigma_j = 2\delta_{jk}$$

Το σύνολο $SU(2)$ μπορεί να γίνει ομάδα. Θα ορίσουμε τώρα τον νόμο της ομάδας αυτής.

Θεωρούμε τα U_1 και U_2 δύο στοιχεία του συνόλου $SU(2)$ που μετασχηματίζουν την μήτρα A_1 στην μήτρα A_2 και την μήτρα A_2 στην μήτρα A_3 αντιστοίχως. Το στοιχείο U_3 που παριστάνει την σύνθεση των U_1 και U_2 ορίζεται σαν το στοιχείο του συνόλου $SU(2)$ που μετασχηματίζει την μήτρα A_1 στην μήτρα A_3. Δηλαδή έχουμε

$$A_2 = U_1A_1U_1^+ \qquad A_3 = U_2A_2U_2^+ \qquad A_3 = U_3A_1U_3^+$$

Βρίσκουμε όμως εύκολα ότι

$$A_3 = U_2A_2U_2^+ = U_2U_1A_1U_1^+U_2^+ = \left(U_2U_1\right)A_1\left(U_2U_1\right)^+$$

Άρα το στοιχείο U_3 είναι το γινόμενο των U_2 και U_1

$$U_3 = U_2U_1$$

Μπορούμε τέλος να αποδείξουμε εύκολα ότι ο πίνακας U_3 όπως ορίστηκε από την παραπάνω σχέση είναι πράγματι μοναδιαίος με ορίζουσα την μονάδα. Υπενθυμίζουμε ότι ο νόμος της ομάδας $R(3)$ είναι επίσης ο πολλαπλασιασμός των πινάκων.

Υπάρχει συνεπώς μια αντιστοιχία μεταξύ των μοναδιαίων πινάκων 2×2 με ορίζουσα ίση με την μονάδα που επιδρούν σε ένα μιγαδικό χώρο δύο διαστάσεων και των ορθογωνίων πινάκων 3×3 που επιδρούν σε ένα συνηθισμένο τριδιάστατο χώρο. Οι δύο μετασχηματισμοί διατηρούν το μήκος των διανυσμάτων. ΄Ομως η αντιστοιχία αυτή δεν είναι αμφιμονοσήμαντος. Οι ομάδες $SU(3)$ και $R(3)$ είναι ομορφικές.

Συμβολίζουμε με $a(\alpha)$ και με $A(\alpha)$ τυχόντα στοιχεία των ομάδων $SU(2)$ και $R(3)$ αντιστοίχως. Οι πίνακες παριστάνουν περιστροφή με μέτρο $\alpha = |\alpha|$ γύρο από τον άξονα $\vec{\alpha}$. Οι πίνακες υπολογίζονται στις ασκήσεις και είναι

$$a(\vec{\alpha}) = \text{συν}\,\frac{\alpha}{2} - i\vec{\alpha}\cdot\vec{\sigma}\,\text{ημ}\,\frac{\alpha}{2}$$

$$\mathrm{A}(\vec{\alpha}) = 1 + (\text{συν}\,\alpha - 1)P(\vec{\alpha}) + \frac{\text{ημ}\,\alpha}{\alpha}C(\vec{\alpha})$$

όπου οι μήτρες $C(\vec{\alpha})$ και $P(\vec{\alpha})$ δίνονται από τις σχέσεις

$$C(\vec{\alpha}) = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha_3 & \alpha_2 \\ \alpha_3 & 0 & -\alpha_1 \\ -\alpha_2 & \alpha_1 & 0 \end{pmatrix} \qquad P(\vec{\alpha}) = -\frac{1}{\alpha^2}C(\vec{\alpha})C(\vec{\alpha})$$

Μπορούμε να βρούμε τις σχέσεις που συνδέουν τους πίνακες $a(\vec{\alpha})$ και $A(\vec{\alpha})$. Οι σχέσεις αυτές είναι

$$a(\vec{\alpha})\sigma_j\left(a(\vec{\alpha})\right)^{-1} = \sum_k A_{kj}(\vec{\alpha})\sigma_k \qquad j = 1, 2, 3$$

Οι σχέσεις μπορούν να επαληθευτούν εύκολα με απ' ευθείας υπολογισμούς.

Φαίνεται εύκολα ότι για μια πλήρη περιστροφή 360^o έχουμε

$$A(2\pi) = 1 \qquad a(2\pi) = -1$$

Παρατηρούμε ότι για μια περιστροφή με γωνία $\alpha = 2\pi$ το στοιχείο της ομάδας $R(3)$ δίνει τον πίνακα μονάδα. Η περιστροφή κατά 2π ισοδυναμεί με τον ταυτοτικό μετασχηματισμό. Την ομάδα αυτή μπορούμε να την χρησιμοποιήσουμε για να περιγράφουμε την περιστροφή ενός στερεού σώματος.

Το αντίστοιχο στοιχείο της $SU(2)$ είναι μείον τον πίνακα μονάδα. Η αποτυχία αυτή δεν επιτρέπει να χρησιμοποιήσουμε την ομάδα $SU(2)$ για την κίνηση του στερεού σώματος. Λόγω της παρουσίας του τόξου $\alpha/2$ στον ορισμό του $a(\alpha)$ ισχύει

$$a(4\pi) = 1$$

Συνεπώς πρέπει να περιστρέψουμε ένα σώμα που περιγράφεται από την $SU(2)$ δύο φορές γύρο από έναν άξονα για να επανέλθει στην αρχική του θέση!.

Η διαφορά αυτή ανάμεσα στις δύο ομάδες είναι βασική. Σε κάθε στοιχείο του συνόλου $SU(2)$ αντιστοιχεί ένα στοιχείο του συνόλου $R(3)$. Αντίθετα υπάρχουν δύο στοιχεία του $SU(2)$ που αντιστοιχούν σε ένα στοιχείο του $R(3)$. Στο στοιχείο $A(\vec{\alpha})$ αντιστοιχούν τα δύο στοιχεία $a(\vec{\alpha})$ και $-a(\vec{\alpha})$. Η αντιστοιχία είναι δύο προς ένα. Σημειώνουμε τέλος τις σχέσεις

$$a\left(\frac{\alpha+2\pi}{\alpha}\vec{\alpha}\right) = -a\left(\vec{\alpha}\right) \qquad a\left(\frac{\alpha+4\pi}{\alpha}\vec{\alpha}\right) = a\left(\vec{\alpha}\right) \qquad A\left(\frac{\alpha+2\pi}{\alpha}\vec{\alpha}\right) = A\left(\vec{\alpha}\right)$$

Ορισμός: Ένα μέγεθος ζ με δύο μιγαδικές συνιστώσες ζ_1 και ζ_2 ονομάζεται σπίνορ αν μετασχηματίζεται γραμμικά από την ομάδα $SU(2)$. Δηλαδή

$$\zeta'_j = \sum_k \left(a(\vec{\alpha})\right)_{jk} \zeta_k \qquad\qquad \zeta' = a(\vec{\alpha})\zeta \implies \left(\zeta^+\right)' = \zeta\left(a(\vec{\alpha})\right)^{-1}$$

Μπορούμε να γενικεύσουμε τον παραπάνω ορισμό και να ορίσουμε σπίνορς με τάξη p. Είναι μεγέθη που αποτελούνται από 2^p μιγαδικές συνιστώσες και μετασχηματίζονται με τον τύπο

$$\zeta'_{kl\cdots} = \sum_{\varkappa\lambda\cdots} \left(a(\vec{\alpha})\right)_{k\varkappa} \left(a(\vec{\alpha})\right)_{l\lambda} \cdots \zeta_{\varkappa\lambda\cdots}$$

Ανάλογος ορισμός ισχύει για το διάνυσμα που δόθηκε σε άλλο κεφάλαιο. Ένα μέγεθος $\vec{x}$ με τρεις πραγματικές συνιστώσες x_1, x_2, x_3 ονομάζεται διάνυσμα αν μετασχηματίζεται γραμμικά από την ομάδα $R(3)$. Δηλαδή

$$\vec{x}\,' = A(\vec{\alpha})\vec{x} \qquad\qquad x'_j = \sum_k \left(A(\vec{\alpha})\right)_{jk} x_k$$

Θεωρούμε ζ και η δύο σπίνορς και σχηματίζουμε ένα μέγεθος με τις ακόλουθες τρεις συνιστώσες

$$\zeta^+\sigma_1\eta \qquad\qquad \zeta^+\sigma_2\eta \qquad\qquad \zeta^+\sigma_3\eta$$

Θα βρούμε πως μετασχηματίζεται το μέγεθος αυτό. Έχουμε

$$\left(\zeta^+\sigma_k\eta\right)' = \left(\zeta^+\right)'\sigma_k\eta' = \zeta^+\left(a(\vec{\alpha})\right)^{-1}\sigma_k a(\vec{\alpha})\eta = A_{jk}\zeta^+\sigma_k\eta$$

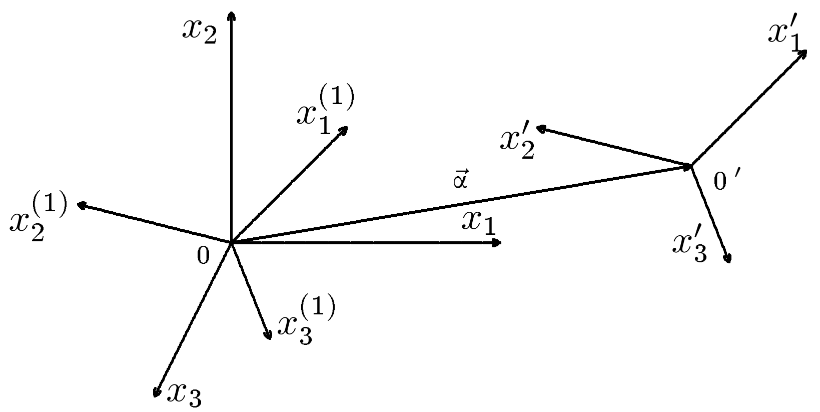
Επομένως το μέγεθος με τις ακόλουθες τρεις συνιστώσες

$$(\zeta^+\sigma_1\eta,\ \zeta^+\sigma_2\eta,\ \zeta^+\sigma_3\eta)$$

μετασχηματίζεται γραμμικά από την ομάδα $R(3)$. Είναι δηλαδή ένα διάνυσμα. Επειδή με δύο σπίνορς παίρνουμε κάτι που μετασχηματίζεται από την ομάδα των περιστροφών σαν διάνυσμα τα σπίνορς συχνά ονομάζονται "μισά διανύσματα".

5.6 Η Ευκλείδεια ομάδα

Η ομάδα αυτή είναι η ομάδα των μετασχηματισμών του τριδιάστατου χώρου που αποτελείται από μια μετατόπιση και μια περιστροφή. Η ομάδα αυτή των μετασχηματισμών συνδέει δυο οποιαδήποτε δεξιόστροφα (ή αριστερόστροφα) συστήματα συντεταγμένων. Αν S και S' είναι δύο συστήματα συντεταγμένων στον τριδιάστατο ευκλείδειο χώρο τότε είναι προφανές ότι μπορούμε να φέρουμε το ένα να συμπέσει με το άλλο με τα εξής δύο βήματα.



Σχήμα 5.3
Περιστροφή και μετατόπιση στον τριδιάστατο χώρο

Περιστρέφουμε το σύστημα S κατάλληλα έτσι ώστε να καταλήξουμε σε ένα σύστημα S_1 που έχει τους άξονες του παράλληλους με τους άξονες του S'. Αν α είναι το στοιχείο αυτό της ομάδας $R(3)$ και A ο αντίστοιχος πίνακας τότε γράφουμε

$$S_1 = \alpha S \qquad\qquad x_j^{(1)} = A_{jk}x_k$$

όπου $x_j^{(1)}$ και x_k είναι οι συντεταγμένες ενός σημείου P στα δύο συστήματα.

Το δεύτερο βήμα είναι να μεταφέρουμε την αρχή του S_1 κατά ένα κατάλληλο διάνυσμα ώστε να συμπέσει με το σύστημα $S\,'$. Αν $\vec{a}$ είναι το διάνυσμα αυτό (προφανώς $\vec{a} = \mathrm{O_1}\vec{\mathrm{O}}\,'$) και $x\,'_k$ είναι οι συνιστώσες του ίδιου σημείου P ως προς το σύστημα $S\,'$ τότε έχουμε

$$x\,'_j = x_j^{(1)} + \alpha_j$$

Συμβολίζουμε τώρα με $(\mathrm{A}, \vec{a})$ το στοιχείο της ομάδας $\mathrm{E}(3)$ που απεικονίζει το σύστημα S στο $S\,'$. Συνδυάζουμε και τα δύο παραπάνω βήματα και γράφουμε

$$S\,' = (A, \vec{a})\, S \qquad\qquad x\,'_j = \mathrm{A}_{jk} x_k + a_j$$

Ένα στοιχείο της ομάδας $\mathrm{E}(3)$ ορίζεται από έξι παραμέτρους. Οι τρεις από αυτές προσδιορίζουν το στοιχείο της $R(3)$ και οι άλλες τρεις το στοιχείο της T_3.

Θα ορίσουμε τώρα τον νόμο συνθέσεως της ομάδας. Θεωρούμε τρία συστήματα S, $S\,'$ και $S\,'$. Τα στοιχεία $(\mathrm{A}, \vec{a})$ και $(B, \vec{b})$ της ομάδας $\mathrm{E}(3)$ μεταφέρουν το ένα σύστημα στο άλλο σύμφωνα με τις σχέσεις

$$S\,'' = (A, \vec{a})\, S\,' \qquad \text{και} \qquad S\,' = (\mathrm{B}, \vec{b}) S$$

Αν συμβολίσουμε με x_j, $x\,'_j$ και $x\,''_j$ τις συνιστώσες του σημείου P ως προς τα τρία συστήματα έχουμε

$$x\,''_j = B_{jl}\, x\,'_l + b_j = B_{jl} A_{lk}\, x_k + B_{jl}\, a_l + b_j = (BA)_{jk}\, x_k + B_{jl} a_l + b_j$$

Άρα ο νόμος της ομάδας $\mathrm{E}(3)$ είναι ο εξής

$$(B, b_j)(\mathrm{A}, a_j) = (BA, b_j + B_{jl}\, a_l)$$

Το ουδέτερο σημείο της ομάδας είναι το $(\mathrm{I}, \vec{0})$ και το αντίστροφο είναι το

$$(\mathrm{A}, a_j)^{-1} = (\mathrm{A}^{-1}, -\mathrm{A}_{kj} a_k)$$

5.7 Η ομάδα Γαλιλαίου

Η ομάδα γαλιλαίου είναι το σύνολο των μετασχηματισμών στον χώρο και τον χρόνο που συνδέουν δυο καρτεσιανά συστήματα συντεταγμένων.

Θεωρούμε δύο συστήματα S' και S. Συμβολίζουμε με (x'_j, t) και (x_j, t) τα τετραδιανύσματα που ορίζουν ένα συμβάν δηλαδή ένα σημείο P στα δύο συστήματα. Ο μετασχηματισμός του ενός συστήματος στο άλλο γίνεται σε τέσσερα βήματα:

Πρώτα περιστρέφουμε το σύστημα S με μία περιστροφή που περιγράφεται από τον πίνακα Α. Αν συμβολίσουμε $x_j^{(1)}$ τις συνιστώσες του P στο νέο σύστημα S_1, έχουμε

$$x_j^{(1)} = A_{jk} x_k \qquad t^{(1)} = t$$

Μετά μετακινούμε την αρχή του συστήματος S_1 με ταχύτητα $\vec{\upsilon}$ ως προς το S_1. Το νέο σύστημα S_2 έχει άξονες παραλλήλους με τους άξονες του S_1 η αρχή του όμως έχει μετακινηθεί κατά ένα διάνυσμα ίσο με $\vec{\upsilon}t$.

$$x_j^{(2)} = x_j^{(1)} - \upsilon_j t \qquad t^{(2)} = t^{(1)}$$

Τα δύο συστήματα ταυτίζονται όταν ο κοινός τους χρόνος είναι μηδέν.

Το τρίτο βήμα είναι να μετακινήσουμε την αρχή του χρόνου κατά ένα ποσό ίσο με β.

$$x_j^{(3)} = x_j^{(2)} \qquad t^{(3)} = t^{(2)} - b$$

Τέλος με το τέταρτο βήμα μεταφέρουμε την αρχή του συστήματος S_3 κατά ένα διάνυσμα $\vec{a}$ για να καταλήξουμε στο σύστημα S'.

$$x'_j = x_j^{(3)} + a_j \qquad t' = t^{(3)}$$

Συνδυάζουμε τα τέσσερα αυτά βήματα για να πάρουμε ένα στοιχείο της ομάδας Γαλιλαίου. Αν συμβολίζουμε με $(\mathrm{A}, \upsilon_j, b, a_j)$ τον μετασχηματισμό αυτόν έχουμε

$$S' = (\mathrm{A}, \upsilon_j, b, a_j) S \qquad x'_j = A_{jk} x_k - \upsilon_j t + a + j \qquad t' = t - b$$

Το στοιχείο αυτό ορίζεται από δέκα παραμέτρους. Τρεις παραμέτρους για την περιστροφή, τρεις παραμέτρους για την ταχύτητα, μία παράμετρο για την χρονική μετατόπιση και τρεις παραμέτρους για την χωρική μετατόπιση. Η ομάδα Γαλιλαίου είναι μια ομάδα που ορίζεται από δέκα παραμέτρους.

Ο νόμος συνθέσεως της ομάδας βρίσκεται αν εφαρμόσουμε την παραπάνω σχέση δύο φορές. Απλές πράξεις δίνουν την ακόλουθη σχέση για την πράξη συνθέσεως της ομάδας

$$
\begin{aligned}
&(\mathrm{A}', \upsilon'_j, b', a'_j)(\mathrm{A}, \upsilon_j, b, a_j) = \\
&\qquad\qquad (\mathrm{A}'\mathrm{A},\ \upsilon'_j + A'_{jk}\upsilon_k,\ b' + b,\ a'_j + A'_{jk}a_k + \upsilon'_j b)
\end{aligned}
$$

Το αντίστροφο στοιχείο δίνεται από την σχέση

$$(\mathrm{A}, \upsilon_j, b, a_j)^{-1} = (\mathrm{A}^{-1},\ -\mathrm{A}_{kj}\upsilon_k,\ -b,\ -A_{kj}a_k + bA_{kj}\upsilon_k)$$

Ασκήσεις

Άσκηση 5.1

Να αποδειχτεί ότι κάθε στοιχείο του συνόλου $SU(2)$ μπορεί να γραφεί με την μορφή

$$U = \begin{pmatrix} c^* & -d \\ d^* & c \end{pmatrix} \qquad \text{όπου} \quad cc^* + dd^* = 1$$

Λύση: Μια μιγαδική μήτρα U ονομάζεται μοναδιαία ($Unitary$) όταν

$$UU^+ = U^+U = 1 \text{ (O πίνακας μονάδα)}$$

Αν η μήτρα U έχει στοιχεία της μορφής c_{ij} η παραπάνω σχέση γράφεται με την μορφή

$$\sum_i c_{ij}c^*_{ik} = \sum_i c_{ji}c^*_{ki} = \delta_{jk}$$

Θα λύσουμε τις παραπάνω σχέσεις στην περίπτωση ενός πίνακα 2×2 που τις γράφουμε αναλυτικά

$$\begin{aligned}
j = 1, k = 1: &\qquad c_{11}c^*_{11} + c_{21}c^*_{21} = 1 \\
j = 2, k = 2: &\qquad c_{12}c^*_{12} + c_{22}c^*_{22} = 1 \\
j = 1, k = 2: &\qquad c_{11}c^*_{12} + c_{21}c^*_{22} = 0 \\
j = 2, k = 1: &\qquad c_{12}c^*_{11} + c_{22}c^*_{21} = 0
\end{aligned}$$

Οι δύο τελευταίες είναι προφανώς ίδιες και αν διαιρέσουμε με $c_{12}c_{22}$ γράφονται με την μορφή

$$\frac{c^*_{11}}{c_{22}} + \frac{c^*_{21}}{c_{12}} = 0 \quad \Longrightarrow \quad c^*_{11} = xc_{22} \quad c^*_{21} = -xc_{12}$$

Αντικαθιστούμε τις παραπάνω σχέσεις στην πρώτη του συστήματος και βρίσκουμε

$$c_{11}xc_{22} - c_{21}xc_{12} = x\,(c_{11}c_{22} - c_{21}c_{12}) = 1$$

Αλλά η ποσότητα μέσα στην παρένθεση της παραπάνω σχέσεως είναι η ορίζουσα του πίνακα που είναι μονάδα και επομένως $x = 1$. Επομένως βρίσκουμε

$$c_{11}^* = c_{22} \qquad\qquad c_{21}^* = -c_{12}$$

Οι σχέσεις αυτές αποδεικνύουν και την άσκηση όπου για να λάβουμε τον πίνακα πρέπει να θέσουμε

$$c_{11} = c \qquad \text{και} \qquad c_{12} = -d$$

Η συνθήκη $cc^* + dd^* = 1$ εκφράζει την ιδιότητα ότι η ορίζουσα είναι μονάδα.

Άσκηση 5.2

Να βρεθούν οι μήτρες που παριστάνουν απειροστές περιστροφές γύρω από τους άξονες x και y και z. Να βρεθούν οι σχέσεις εναλλαγής τους. Να εξετάσετε αν οι σχέσεις αυτές έχουν και άλλες λύσεις. Να υπολογίσετε πως επιδρά ένας τέτοιος μετασχηματισμός σε συναρτήσεις $\psi(x, y, z)$.

Λύση: Η περιστροφές $\mathrm{A}(\vec{\alpha})$ και $\mathrm{A}(\vec{\beta})$ περιγράφονται από μήτρες που γενικά δεν εναλλάσσονται. Οι περιστροφές $\mathrm{A}(\vec{\alpha})\mathrm{A}(\vec{\beta})$ και $\mathrm{A}(\vec{\alpha})A(\vec{\beta})$ είναι διαφορετικές διότι το γινόμενο των πινάκων δεν είναι ικανοποιεί την αντιμεταθετική ιδιότητα.

$$\mathrm{A}(\vec{\alpha})\mathrm{A}(\vec{\beta}) - \mathrm{A}(\vec{\alpha})A(\vec{\beta}) = [\mathrm{A}(\vec{\alpha}), \mathrm{A}(\vec{\beta})] \neq 0$$

Αυτό δεν ισχύει αν οι γωνίες περιστροφής είναι απειροστές.

Θεωρούμε δύο απειροστές στροφές $\mathrm{A}(\vec{\alpha})$ και $\mathrm{A}(\vec{\beta})$ όπου $|\alpha| = \delta\alpha$ και $|\beta| = \delta\beta$. Τότε οι δύο μήτρες $\mathrm{A}(\vec{\alpha})\mathrm{A}(\vec{\beta})$ και $\mathrm{A}(\vec{\alpha})A(\vec{\beta})$ διαφέρουν κατά ένα παράγοντα πολλαπλασιασμένο με την απειροστή ποσότητα $\delta\alpha\,\delta\beta$ που την θεωρούμε μηδέν. Άρα δύο απειροστές περιστροφές εναλλάσσονται μεταξύ τους. Αυτό φυσικά διευκολύνει τους υπολογισμούς.

Μια περιστροφή γύρω από τον άξονα των z κατά γωνία α_3 μπορεί να παρασταθεί από τον πίνακα

$$A(0,0,\alpha_3) = \mathrm{A}_z(\alpha_3) = \begin{pmatrix} \sigma\upsilon\nu\,\alpha_3 & \eta\mu\,\alpha_3 & 0 \\ -\,\eta\mu\,\alpha_3 & \sigma\upsilon\nu\,\alpha_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Αν η στροφή είναι απειροστή $\alpha_3 \to \delta\alpha_3$ τότε επειδή απορρίπτουμε όρους που περιέχουν το $(\delta\alpha_3)^2$ και μικρότερους έχουμε

$$\text{συν}\,(\delta\alpha_3) = 1 \qquad\qquad \text{ημ}\,(\delta\alpha_3) = \delta\alpha_3$$

Ο αντίστοιχος πίνακας της απειροστής περιστροφής είναι

$$A_z(\delta\alpha_3) = \begin{pmatrix} 1 & \delta\alpha_3 & 0 \\ -\delta\alpha_3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \delta\alpha_3 \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Γράφουμε την σχέση αυτή με την μορφή

$$A_z(\delta\alpha_3) = 1 + \delta\alpha_3 S_3 \qquad \text{όπου} \qquad S_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Για μια τέτοια περιστροφή βρίσκουμε

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \delta\alpha_3 & 0 \\ -\delta\alpha_3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + \delta\alpha_3 y \\ -\delta\alpha_3 x + y \\ z \end{pmatrix}$$

Οπότε βρίσκουμε

$$\begin{aligned} x' = x + \delta\alpha_3 y \quad &\Longrightarrow \quad x' - x = \delta x = \delta\alpha_3 y \\ y' = y - \delta\alpha_3 x \quad &\Longrightarrow \quad y' - y = \delta y = -\delta\alpha_3 x \\ z' = z \quad &\Longrightarrow \quad z' - z = \delta z = 0 \end{aligned}$$

Μια περιστροφή κατά μια γωνία α_3 μπορεί να θεωρηθεί ότι είναι πολλές περιστροφές κατά την απειροστή γωνία $\delta\alpha_3$. Δηλαδή

$$A_z(\alpha_3) = A_z(\delta\alpha_3) A_z(\delta\alpha_3) \cdots A_z(\delta\alpha_3)$$

Θέτουμε $\delta\alpha_3 = \alpha_3/N$ εκτελούμε N διαδοχικές περιστροφές και παίρνουμε το όριο $\mathrm{N} \to \infty$. Βρίσκουμε

$$A_z(\alpha_3) = \lim_{N\to\infty} \left(1 + \frac{\alpha_3}{N} S_3\right)^N = e^{\alpha_3 S_3}$$

Με τον ίδιο ακριβώς τρόπο μπορούμε να γράψουμε και τις περιστροφές γύρω από τους άξονες x και y.

$$A_x(\delta\alpha_1) = 1 + \delta\alpha_1 S_1 \qquad \text{όπου} \qquad S_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A_y(\delta\alpha_2) = 1 + \delta\alpha_2 S_2 \qquad \text{όπου} \qquad S_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Οι τρεις μήτρες S_1, S_2 και S_3 είναι αντισυμμετρικές έχουν τροχιά μηδέν και η ορίζουσά τους είναι ίση με την μονάδα.

Θα αποδείξουμε τώρα ότι οι τρεις μήτρες S_1, S_2 και S_3 ικανοποιούν και τις ακόλουθες σχέσεις εναλλαγής

$$[S_1, S_2] = S_3 \qquad [S_2, S_3] = S_1 \qquad [S_3, S_1] = S_2$$

Οι τρεις παραπάνω σχέσεις με την βοήθεια του τανυστή ε_{jkm} γράφονται

(5.1) $$[S_j, S_k] = S_j S_k - S_k S_j = \varepsilon_{jkm} S_m$$

Η συμμετρική διαφορά

$$[\mathrm{A}, \mathrm{B}] = \mathrm{AB} - \mathrm{BA}$$

ονομάζεται μεταθέτης τον μητρών Α και Β.

Οι σχέσεις (5.1) είναι $3 \times 3 = 9$ συνολικά σχέσεις. Από τον ορισμό της παραστάσεως $[\mathrm{A}.\mathrm{B}] = \mathrm{AB} - \mathrm{BA}$ είναι προφανές ότι

$$[S_i, S_i] = S_i S_i - S_i S_i = 0$$

Επίσης από τον ορισμό είναι προφανές ότι ο μεταθέτης ικανοποιεί την σχέση

$$[S_i, S_j] = -[S_j, S_i]$$

Επομένως από τις 9 σχέσεις απομένουν να αποδείξουμε τις εξής τρεις σχέσεις

$$[S_1, S_2] = S_3 \qquad [S_2, S_3] = S_1 \qquad [S_3, S_1] = S_2$$

Θα αποδείξουμε μόνο την πρώτη. Οι υπόλοιπες, που προκύπτουν από την πρώτη με κυκλική εναλλαγή των δεικτών, αποδεικνύονται με τον ίδιο τρόπο.

Έχουμε

$$S_1S_2 - S_2S_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = S_3$$

Θα υπολογίσουμε τώρα την μήτρα

$$A(\vec{\alpha}) = \exp\left(C(\vec{\alpha})\right) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(C(\vec{\alpha})\right)^n}{n!}$$

όπου η μήτρα $C(\vec{\alpha})$ είναι

$$C(\vec{\alpha}) = \vec{\alpha} \cdot \vec{S} = \alpha_1 S_1 + \alpha_2 S_2 + \alpha_3 S_3$$

Η παραπάνω μήτρα παριστάνει μια περιστροφή μέτρου $|\alpha|$ γύρω από τον άξονα $\vec{n} = \vec{\alpha}/|\vec{\alpha}|$ και είναι ένα στοιχείο της ομάδας $R(3)$.

Η μήτρα είναι αντισυμμετρική και τα διαγώνια στοιχεία της είναι μηδέν. Κατά συνέπεια η τροχιά της είναι μηδέν. Βρίσκουμε το τετράγωνο της μήτρας αυτής. Έχουμε

$$\left(C(\vec{\alpha})\right)^2 = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha_3 & \alpha_2 \\ \alpha_3 & 0 & -\alpha_1 \\ -\alpha_2 & \alpha_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -\alpha_3 & \alpha_2 \\ \alpha_3 & 0 & -\alpha_1 \\ -\alpha_2 & \alpha_1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -\alpha_3^2 - \alpha_2^2 & \alpha_1\alpha_2 & \alpha_1\alpha_3 \\ \alpha_1\alpha_2 & -\alpha_3^2 - \alpha_1^2 & -\alpha_2\alpha_3 \\ -\alpha_1\alpha_3 & \alpha_2\alpha_3 & -\alpha_1^2 - \alpha_2^2 \end{pmatrix}$$

Βρίσκουμε ακολούθως την τρίτη δύναμη της μήτρας $C(\vec{\alpha})$.

$$\left(C(\vec{\alpha})\right)^3 = \begin{pmatrix} -\alpha_3^2 - \alpha_2^2 & \alpha_1\alpha_2 & \alpha_1\alpha_3 \\ \alpha_1\alpha_2 & -\alpha_3^2 - \alpha_1^2 & -\alpha_2\alpha_3 \\ -\alpha_1\alpha_3 & \alpha_2\alpha_3 & -\alpha_1^2 - \alpha_2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -\alpha_3 & \alpha_2 \\ \alpha_3 & 0 & -\alpha_1 \\ -\alpha_2 & \alpha_1 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 0 & \alpha_3\alpha_3^2+\alpha_3\alpha_2^2+\alpha_3\alpha_1^2 & -\alpha_2\alpha_3^2-\alpha_2\alpha_2^2-\alpha_2\alpha_1^2 \\ -\alpha_3\alpha_3^2-\alpha_3\alpha_2^2-\alpha_3\alpha_1^2 & 0 & \alpha_1\alpha_2^2+\alpha_1\alpha_3^2+\alpha_1\alpha_1^2 \\ \alpha_2\alpha_3^2+\alpha_2\alpha_2^2+\alpha_2\alpha_1^2 & -\alpha_1\alpha_2^2-\alpha_1\alpha_3^2-\alpha_1\alpha_1^2 & 0 \end{pmatrix}$$

Παρατηρούμε ότι τα στοιχεία της μήτρας αυτής είναι όλα ανάλογα του μέτρου του διανύσματος $\vec{\alpha}$ δηλαδή ανάλογα του α^2. Βγάζουμε κοινό παράγοντα το α^2 και έχουμε

$$(C(\vec{\alpha}))^3 = -\alpha^2\,(C(\vec{\alpha}))$$

Η τέταρτη δύναμη της μήτρας $C(\vec{\alpha})$ είναι ανάλογη της μήτρας $(C(\vec{\alpha}))^2$, η πέμπτη δύναμη ανάλογη της $C(\vec{\alpha})$ κ.λ.π. Συμβολίζουμε με $P(\vec{\alpha})$ την μήτρα $-C(\vec{\alpha})/\alpha^2$ δηλαδή

$$P(\vec{\alpha}) = -\frac{1}{\alpha^2}C(\vec{\alpha})C(\vec{\alpha})$$

και βρίσκουμε τελικά για όλες τις δυνάμεις της μήτρας $C(\vec{\alpha})$ τις σχέσεις

$$(C(\vec{\alpha}))^{2n} = (-1)^n\alpha^{2n}P(\vec{\alpha}) \qquad\qquad (C(\vec{\alpha}))^{2n+1} = (-1)^n\alpha^{2n}C(\vec{\alpha})$$

Μπορούμε τώρα να υπολογίσουμε την μήτρα $\exp(C(\vec{\alpha}))$. Χωρίζουμε το άθροισμα στις περιττές δυνάμεις του $C(\vec{\alpha})$ και στις άρτιες δυνάμεις. Έχουμε

$$A(\vec{\alpha}) = \exp(C(\vec{\alpha})) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(C(\vec{\alpha}))^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(C(\vec{\alpha}))^{2k+1}}{(2k+1)!} =$$

$$1 + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\alpha^{2n}}{(2k)!}P(\vec{\alpha}) + \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\alpha^{2n}}{(2k+1)!}C(\vec{\alpha})$$

Τα άπειρα αθροίσματα είναι το ανάπτυγμα κατά Τέυλορ του συνημιτόνου και του ημιτόνου αντιστοίχως και επομένως έχουμε τελικά

$$\mathrm{A}(\vec{\alpha}) = 1 + (\text{συν}\,\alpha - 1)P(\vec{\alpha}) + \frac{\text{ημ}\,\alpha}{\alpha}C(\vec{\alpha})$$

Άρα πραγματικά η μήτρα αυτή είναι ένα στοιχείο της ομάδας των περιστροφών $R(3)$. Παρατηρούμε ότι

$$\mathrm{A}(2\pi) = 1$$

Το 1 στην παραπάνω σχέση είναι ο πίνακας μονάδα.

Θα βρούμε τώρα πως μετασχηματίζεται μια συνάρτηση των (x, y, z) από τον απειροστό μετασχηματισμό $\mathrm{A}_z(\delta\alpha_3)$. Ο μετασχηματισμός περιστρέφει τις μεταβλητές.

$$\psi' = \mathrm{A}_z(\delta\alpha_3)\psi(x, y, z) = \psi\left(\mathrm{A}_z(\delta\alpha_3)(x, y, z)\right) = \psi(x + y\delta\alpha_3, y - x\delta\alpha_3, z)$$

Αναλύουμε την συνάρτηση $\psi(x + y\delta\alpha_3, y - x\delta\alpha_3, z)$ κατά Τέυλορ διατηρώντας μόνο τους γραμμικούς όρους ως προς την απειροστή μεταβολή $\delta\alpha_3$. Βρίσκουμε

$$\psi' = \mathrm{A}_z(\delta\alpha_3)\psi = \psi - \delta\alpha_3\left(x\frac{\partial\psi}{\partial y} - y\frac{\partial\psi}{\partial x}\right) + O(\delta\alpha_3)^2 = (1 - \delta\alpha_3 L_3)\,\psi$$

όπου το L_3 είναι ένας διαφορικός τελεστής της μορφής

$$L_3 = \left(x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}\right)$$

Αν τώρα θέλουμε να βρούμε πως μετασχηματίζεται μια συνάρτηση από την περιστροφή $A_z(\varphi)$ όπως και προηγουμένως βρίσκουμε

$$A_z(\alpha_3)\psi = \lim_{N\to\infty}\left(1 - \frac{\alpha_3}{N}L_3\right)\psi = e^{-a_3 L_3}\psi$$

$$= \psi(x\,\text{συν}\,\alpha_3 + y\,\text{ημ}\,\alpha_3, -x\,\text{ημ}\,\alpha_3 + y\,\text{συν}\,\alpha_3, z)$$

Με όμοιο τρόπο βρίσκουμε και της απειροστές μεταβολές κάποιας συναρτήσεως από τους απειροστούς μετασχηματισμούς περιστροφής των συντεταγμένων γύρω από τους άξονες x και y.

$$L_1 = \left(y\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial y}\right) \qquad L_2 = \left(z\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial z}\right)$$

Αποδεικνύεται ότι οι τελεστές L_1, L_2 και L_3 ικανοποιούν επίσης τις εξισώσεις (5.1).

Θα βρούμε και άλλες λύσεις των εξισώσεων (5.1). Αποδεικνύεται ότι και οι ακόλουθες μήτρες, που είναι διαστάσεως 2×2 είναι επίσης λύσεις των εξισώσεων αυτών

$$s_1 = \frac{-i}{2}\sigma_1 \qquad s_2 = \frac{-i}{2}\sigma_2 \qquad s_3 = \frac{-i}{2}\sigma_3$$

Οι μήτρες σ_1, σ_2, σ_2 είναι

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \qquad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

και ονομάζονται μήτρες του Πάουλι. Η απόδειξη είναι απλή και θα την παραλείψουμε.

Για τις μήτρες του Πάουλι μπορούμε να αποδείξουμε πολύ εύκολα ότι το τετράγωνο τους είναι ίσο με τον πίνακα μονάδα

$$\sigma_i^2 = 1 \qquad\qquad i = 1, 2, 3$$

Επίσης εύκολα αποδεικνύεται ότι το γινόμενο δύο μητρών του Πάουλι ικανοποιεί την σχέση

$$\sigma_j \sigma_k + \sigma_k \sigma_j = 0 \qquad\qquad j \neq k$$

Οι δύο παραπάνω εξισώσεις μας βοηθούν να υπολογίσουμε την παράσταση $\exp\left(C(\vec{\alpha})\right)$ όπου

$$C(\vec{\alpha}) = \alpha_1 s_1 + \alpha_2 s_2 + \alpha_3 s_3 = -\frac{i}{2}\left(\alpha_1\sigma_1 + \alpha_2\sigma_2 + \alpha_3\sigma_3\right) = -\frac{i}{2}\vec{\alpha}\cdot\vec{\sigma}$$

Υψώνουμε την μήτρα αυτή στο τετράγωνο και βρίσκουμε

$$\left(\alpha_1\sigma_1 + \alpha_2\sigma_2 + \alpha_3\sigma_3\right)^2 = \alpha_1^2\sigma_1^2 + \alpha_2^2\sigma_2^2 + \alpha_3^2\sigma_3^2 +$$
$$+\alpha_1\alpha_2\sigma_1\sigma_2 + \alpha_2\alpha_3\sigma_2\sigma_3 + \alpha_3\alpha_1\sigma_3\sigma_1 = \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 = \alpha^2$$

Επομένως βρίσκουμε για όλες τις δυνάμεις της μήτρας $C(\vec{\alpha})$ τις σχέσεις

$$\left(C(\vec{\alpha})\right)^{2n} = (-1)^n \left(\frac{\alpha}{2}\right)^{2n} \qquad\qquad \left(C(\vec{\alpha})\right)^{2n+1} = -i\vec{\alpha}\cdot\vec{\sigma}(-1)^n \left(\frac{\alpha}{2}\right)^{2n+1}$$

Μπορούμε τώρα να υπολογίσουμε την μήτρα $\exp\left(C(\vec{\alpha})\right)$. Βρίσκουμε τελικά μετά από απλές πράξεις

$$a(\vec{\alpha}) = \text{συν}\,\frac{\alpha}{2} - i\vec{\alpha}\cdot\vec{\sigma}\,\text{ημ}\,\frac{\alpha}{2}$$

Ο πίνακας αυτός είναι ένα στοιχείο της ομάδας$SU(2)$.

Παρατηρούμε ότι για την μήτρα αυτή ισχύουν οι σχέσεις

$$a(2\pi) = -1 \qquad\qquad \mathrm{A}(4\pi) = 1$$

Αντίθετα για τα στοιχεία της ομάδας $R(3)$ περιστροφή κατά 2π δεν δίνει την μονάδα αλλά το -1 και αυτό είναι μια βασική διαφορά μεταξύ των ομάδων $SU(2)$ και $R(3)$.

Οι σχέσεις (5.1) δέχονται και άλλες λύσεις. Μια ομάδα λύσεων αποτελείται από τετραγωνικές μήτρες με περιττή διάσταση $3, 5, 7, \cdots$ και μια άλλη ομάδα αποτελείται από τετραγωνικές μήτρες με άρτια διάσταση $2, 4, 6, \cdots$.

Κεφάλαιο 6

Αναλυτική Μηχανική

6.1 Οι εξισώσεις του Λαγκράνζ

Η μέθοδος του Λαγκράνζ μπορεί να εφαρμοστεί για να περιγράψει πολλά δυναμικά συστήματα και να τα αντιμετωπίσει με τον ίδιο ενιαίο και απλό τρόπο. Μπορούμε επίσης να εφαρμόσουμε την θεωρία αυτή και σε πολλά άλλα πεδία της φυσικής όχι μόνο στην δυναμική όπως για παράδειγμα στην θεωρία των πεδίων.

Υποθέτουμε ότι ένα φυσικό σύστημα μεταβαίνει από μια κατάσταση στην άλλη. Οι δρόμοι που μπορεί να ακολουθήσει το σύστημα είναι πολλοί. Το ερώτημα είναι πιο δρόμο θα επιλέξει το σύστημα. Η μέθοδος στηρίζεται στο αξίωμα ότι το σύστημα θα διαλέξει τον συντομότερο δρόμο για την μετάβαση από την μία κατάσταση στην άλλη.

Η πιο γενική αρχή για την κίνηση ενός μηχανικού συστήματος είναι η αρχή της ελάχιστης δράσεως ή η αρχή του Χάμιλτον. Για να είναι απλούστερες οι σχέσεις υποθέτουμε στην αρχή ότι το σύστημα έχει ένα βαθμό ελευθερίας και συμβολίζουμε με q τις συντεταγμένες της θέσεως. Θεωρούμε ένα σύστημα που βρίσκεται τις χρονικές στιγμές t_1 και t_2 στις θέσεις $q(t_1) = q^{(1)}$ και $q(t_2) = q^{(2)}$.

Σύμφωνα με τη αρχή του Χάμιλτον ένα μηχανικό σύστημα χαρακτηρίζεται από μία συνάρτηση $L(q, \dot{q}, t)$ που ονομάζεται συνάρτηση Λαγκράνζ. Το σύστημα κινείται από το ένα σημείο στο άλλο έτσι ώστε το ακόλουθο ολοκλήρωμα να παίρνει την ελάχιστη τιμή του.

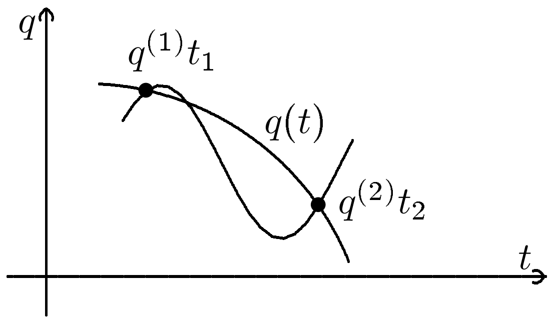
$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t) dt$$

Το ολοκλήρωμα αυτό ονομάζεται δράση του συστήματος.

Θα βρούμε τώρα την διαφορική εξίσωση που πρέπει να ικανοποιείται ώστε το ολοκλήρωμα της δράσεως να είναι ελάχιστο.

Έστω ότι $q(t)$ είναι η τροχιά που το ολοκλήρωμα της δράσεως είναι ελάχιστο. Αν $q(t) + \delta q(t)$ είναι μια άλλη τροχιά το ολοκλήρωμα είναι μεγαλύτερο. Οι δύο αυτές τροχιές διαφέρουν ελάχιστα μεταξύ τους και περνούν και οι δύο από τα σημεία $q^{(1)}$ και $q^{(2)}$ τις χρονικές στιγμές t_1 και t_2. Δηλαδή

$$\delta q(t_1) = \delta q(t_2) = 0$$



Σχήμα 6.1
Δύο τυχούσες τροχιές στο χώρο των θέσεων

Η αναγκαία συνθήκη ώστε η δράση να παίρνει την ελάχιστη τιμή της είναι η μεταβολή στο ολοκλήρωμα της δράσεως να είναι μηδέν.

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t) dt = 0 \tag{1}$$

Αναλύουμε την συνάρτηση Λαγκράνζ κατά Τέυλορ διατηρώντας μόνο τους γραμμικούς όρους. Έχουμε

$$L(q + \delta q, \dot{q} + \delta \dot{q}, t) = L(q, \dot{q}, t) + \frac{\partial L}{\partial q}\delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\delta \dot{q}$$

Η αλλαγή στο ολοκλήρωμα της δράσεως είναι

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \delta L(q, \dot{q}, t) dt = \int_{t_1}^{t_2} \left(L(q + \delta q, \dot{q} + \delta\dot{q}, t) - L(q, \dot{q}, t) \right) dt =$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q}\delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\delta\dot{q} \right) dt = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q}\delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\frac{d}{dt}\delta q \right) dt$$

Για την τελευταία ισότητα χρησιμοποιήθηκε η σχέση $\delta\dot{q} = d\delta q/dt$. Ολοκληρώνουμε κατά παράγοντες τον δεύτερο όρο και έχουμε

$$\delta S = \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\delta q \right]_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \delta q dt$$

Ο επιφανειακός όρος είναι μηδέν λόγω των συνθηκών $\delta q(t_1) = \delta q(t_2) = 0$. Το ολοκλήρωμα που παραμένει πρέπει να είναι μηδέν για όλες τις τιμές του δq και αυτό είναι δυνατόν μόνο αν

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0$$

Η εξίσωση αυτή ονομάζεται εξίσωση Λαγκράνζ.

Παρατήρηση: Η συνάρτηση Λαγκράνζ δεν προσδιορίζεται μονοσήμαντα από το κάθε σύστημα. Αν στην συνάρτηση Λαγκράνζ προσθέσουμε μια ολική παράγωγο ως προς τον χρόνο μιας αυθαίρετης συναρτήσεως $f(q, t)$ των συντεταγμένων και του χρόνου δηλαδή

$$L'(q_i, \dot{q}_i, t) = L(q_i, \dot{q}_i, t) + \frac{d}{dt} f(q_i, t)$$

τότε στο ολοκλήρωμα της δράσεως προστίθεται ένας σταθερός όρος. Άρα το δS η μεταβολή του ολοκληρώματος της δράσεως δεν αλλάζει $\delta S' = \delta S$. Κατά συνέπεια και οι εξισώσεις Λαγκράνζ παραμένουν αμετάβλητες. Δηλαδή οι δύο συναρτήσεις Λαγκράνζ προσδιορίζουν το ίδιο σύστημα.

Για ένα σύστημα με n βαθμούς ελευθερίας έχουμε n ανεξάρτητες συναρτήσεις $q_i(t)$, $i = 1, 2, \cdots, n$ που προσδιορίζουν πλήρως την θέση του συστήματος. Οι συναρτήσεις αυτές είναι δυνατόν να μην είναι μόνο οι καρτεσιανές συντεταγμένες των σωματίων. Αυτές μπορεί να είναι οι γωνίες ή οι αποστάσεις από κάποιο σημείο ή και οι συναρτήσεις τέτοιων μεγεθών. Ονομάζουμε τις συντεταγμένες αυτές γενικευμένες. Οι παράγωγοι $\dot{q}_i(t)$ ονομάζονται γενικευμένες ταχύτητες.

Το σύστημα προσδιορίζεται αν γνωρίζουμε την συνάρτηση Λαγκράνζ του συστήματος $L(q_1, q_2, \cdots, q_n; \dot{q}_1, \dot{q}_2, \cdots, \dot{q}_n; t)$. Οι εξισώσεις Λαγκράνζ είναι οι ακόλουθες n σε πλήθος δευτέρας τάξεως διαφορικές εξισώσεις

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \qquad\qquad i = 1, 2, \cdots, n$$

Οι παράγωγοι της συναρτήσεως Λαγκράνζ ως προς τις ταχύτητες ονομάζονται γενικευμένες ορμές και οι παράγωγοι της ως προς τις συντεταγμένες ονομάζονται γενικευμένες δυνάμεις.

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \qquad\qquad F_i = \frac{\partial L}{\partial q_i}$$

Έτσι η εξίσωση Λαγκράνζ γίνεται

$$F_i = \frac{d}{dt} p_i$$

Αν η συνάρτηση $L(q_i, \dot{q}_i, t)$ του συστήματος είναι γνωστή τότε οι εξισώσεις Λαγκράνζ είναι οι εξισώσεις κινήσεως του συστήματος. Είναι διαφορικές εξισώσεις δευτέρας τάξεως ως προς τις άγνωστες συναρτήσεις $q_i(t)$. Η γενική λύση περιέχει $2n$ αυθαίρετες σταθερές που μπορούν να προσδιοριστούν από τις αρχικές συνθήκες του προβλήματος.

Ο δείκτης i παριστάνει τους βαθμούς ελευθερίας του συστήματος και μεταβάλλεται από το 1 το n και πολλές φορές έως το άπειρο (αριθμήσιμο). Υπάρχουν όμως συστήματα με άπειρους (συνεχείς) βαθμούς ελευθερίας. Τα συστήματα αυτά ονομάζονται πεδία και περιγράφονται από μια συνάρτηση των συντεταγμένων $\vec{r}$. Ο δείκτης i δηλαδή έχει αντικατασταθεί από την συνεχή παράμετρο $\vec{r}$. Τα συστήματα αυτά εξετάζονται σε επόμενο κεφάλαιο.

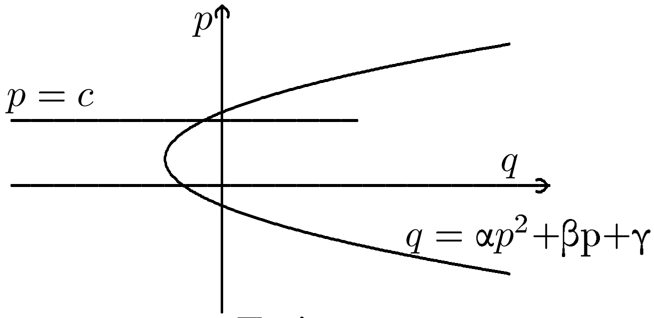
Πολλά προβλήματα, όπως για παράδειγμα προβλήματα με δυνάμεις τριβής δεν έχουν καμία συνάρτηση Λαγκράνζ που να τα προσδιορίζει. Μπορούμε να συμπεριλάβουμε και τέτοια συστήματα αν γράψουμε την εξίσωση κινήσεως με την μορφή

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_j$$

όπου με Q_j είναι οι δυνάμεις που δεν προέρχονται από κάποιο δυναμικό.

Η περιγραφή των δυναμικών συστημάτων με την συνάρτηση του Λαγκράνζ, γίνεται με την βοήθεια των γενικευμένων συντεταγμένων και ταχυτήτων. Οστόσο είναι πολλές φορές προτιμότερο να εργαστούμε με τις γενικευμένες συντεταγμένες και τις αντίστοιχες γενικευμένες ορμές του συστήματος, να εργαστούμε δηλαδή στον χώρο των φάσεων. Οι εξισώσεις κινήσεως στην περιγραφή αυτή είναι 2n σε πλήθος και πρώτης τάξεως.

Ο χώρος των φάσεων είναι ένας χώρος διαστάσεως $2n$ όπου n είναι ο βαθμός ελευθερίας του συστήματος. Οι n από αυτές τις συντεταγμένες είναι οι γενικευμένες θέσεις q_i και οι άλλες n είναι οι γενικευμένες ορμές του συστήματος. Κάθε σημείο του χώρου αυτού παριστάνει μια ορισμένη κατάσταση ενός συστήματος και αντιστρόφως. ΄Οταν το σύστημα κινείται το σημείο διαγράφει μια τροχιά στον χώρο των φάσεων.



Σχήμα 6.2
Κίνηση με σταθερή ταχύτητα και κίνηση με σταθερή επιτάχυνση

6.2 Οι εξισώσεις του Χάμιλτον

Ορισμός: Ορίζουμε την συνάρτηση $H(p_i, q_i, t)$ των συντεταγμένων και των ορμών από την σχέση

(1) $$H(p_i, q_i, t) = \sum_i p_i \dot{q}_i - L(q_i, \dot{q}_1, t)$$

Η συνάρτηση αυτή ονομάζεται Χαμιλτονιανή του συστήματος.

Οι γενικευμένες ορμές p_i ορίζονται από την παράγωγους της L ως προς τις ταχύτητες ενώ η παράγωγοι των ορμών ως προς τον χρόνο από την εξίσωση του Λαγκράνζ είναι ίσες με τις παραγώγους της L ως προς τις θέσεις. Δηλαδή ισχύουν οι σχέσεις

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \qquad \dot{p}_i = \frac{\partial L}{\partial q_i}$$

Διαφορίζουμε την συνάρτηση του Χάμιλτον και έχουμε

$$dH(p_i, q_i, t) = \sum_i \frac{\partial H}{\partial p_i} dp_i + \sum_i \frac{\partial H}{\partial q_i} dq_i$$

Ενώ αν διαφορίσουμε το δεύτερο μέλος της (1) βρίσκουμε

$$d\left(\sum_i p_i \dot{q}_i - L(q_i, \dot{q}_1, t)\right) = \sum_i p_i d\dot{q}_i + \sum_i \dot{q}_i dp_i - \sum_i \frac{\partial L}{dq_i} dp_i \sum_i \frac{\partial L}{d\dot{q}_i} d\dot{q}_i =$$

$$= \sum_i p_i d\dot{q}_i + \sum_i \dot{q}_i dp_i - \sum_i \dot{p}_i dp_i - \sum_i p_i d\dot{q}_i = \sum_i \dot{q}_i dp_i - \sum_i \dot{p}_i dp_i$$

Από τις δύο παραπάνω σχέσεων συνεπάγονται οι εξισώσεις

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \qquad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \qquad i = 1, 2, \cdots, n$$

Αν η συνάρτηση του Χάμιλτον είναι γνωστή οι παραπάνω εξισώσεις είναι οι εξισώσεις της κινήσεως για τις συντεταγμένες και τις αντίστοιχες ορμές του συστήματος. Ονομάζονται κανονικές εξισώσεις ή εξισώσεις του Χάμιλτον. Είναι $2n$ σε πλήθος πρώτης τάξεως διαφορικές εξισώσεις και είναι ισοδύναμες προς τις n σε πλήθος διαφορικές εξισώσεις δευτέρας τάξεως του Λαγκράνζ.

Οι κανονικές εξισώσεις του Χάμιλτον μπορούν να προκύψουν απευθείας από την αρχή της ελάχιστης δράσεως. Γράφουμε το ολοκλήρωμα της δράσεως σαν συνάρτηση της Χαμιλτονιανής και η αρχή παίρνει τώρα την μορφή

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \left(\sum_i p_i \dot{q}_i - H(p_i, q_i, t)\right) dt = \delta \int_{t_1}^{t_2} \sum_i p_i dq_i - H(p_i, q_i, t) dt = 0$$

όπου στα άκρα του διαστήματος ισχύει $\delta q_i = \delta p_i = 0$.

Οι κανονικές εξισώσεις του Χάμιλτον είναι χρήσιμες για να βρούμε την παράγωγο ως προς τον χρόνο οποιουδήποτε μεγέθους της κλασσικής μηχανικής.

Ένα φυσικό μέγεθος της κλασσικής μηχανικής ορίζεται από μία συνάρτηση $f(p_i, q_i, t)$ των συντεταγμένων και των ορμών και ενδεχομένως και του χρόνου. Παραγωγίζουμε την συνάρτηση αυτή ως προς τον χρόνο και έχουμε

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_k \left(\frac{\partial f}{\partial q_k}\dot{q}_k + \frac{\partial f}{\partial p_k}\dot{p}_k \right)$$

Αν αντικαταστήσουμε στην σχέση αυτή τα $\dot{p}_i$ και $\dot{q}_i$ από τις εξισώσεις του Χάμιλτον έχουμε

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_k \left(\frac{\partial f}{\partial q_k}\frac{\partial H}{\partial p_k} - \frac{\partial f}{\partial p_k}\frac{\partial H}{\partial p_k} \right)$$

Το άθροισμα της παραπάνω εξισώσεως ονομάζεται αγκύλη Πουασόν και συμβολίζεται με $\{f, H\}$ δηλαδή

$$\{f, H\} = \sum_k \left(\frac{\partial f}{\partial q_k}\frac{\partial H}{\partial p_k} - \frac{\partial f}{\partial p_k}\frac{\partial H}{\partial p_k} \right)$$

Άρα η εξίσωση κινήσεως γράφεται συμβολικά

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \{f, H\}$$

Η παραπάνω εξίσωση δίνει την εξέλιξη ενός μεγέθους $f(p_k, q_k, t)$ ως προς τον χρόνο. Οι κανονικές εξισώσεις του Χάμιλτον προκύπτουν σαν μερικές περιπτώσεις από την εξίσωση αυτή αν θέσουμε $f = p_i$ ή $f = q_i$. Πράγματι βρίσκουμε

$$\dot{q}_i = \{q_i, H\} = \frac{\partial H}{\partial p_i} \qquad\qquad \dot{p}_i = \{p_i, H\} = -\frac{\partial H}{\partial p_i}$$

Η αγκύλη Πουασόν όπως ορίστηκε αποδεικνύεται ότι ικανοποιεί τις σχέσεις

Αντισυμμετρικότητα	$\{f, g\} = -\{g, f\}$
Γραμμικότητα	$\{f + h, g\} = \{f, g\} + \{h, g\}$
Ταυτότητα του Τζακόμπι	$\{f, \{h, g\}\} + \{h, \{g, f\}\} + \{g, \{f, h\}\} = 0$

Για τις συντεταγμένες και τις ορμές αποδεικνύονται εύκολα οι σχέσεις

$$\{q_i, q_j\} = \{p_i, p_j\} = 0 \qquad\qquad \{q_i, p_j\} = \delta_{ij}$$

Το δ_{ij} είναι ο τανυστής του Κρόνεκερ και παίρνει την τιμή 1 για $i = j$ και την τιμή 0 για $i \neq j$.

Ένα φυσικό μέγεθος είναι μια σταθερά της κινήσεως αν δεν μεταβάλλεται ως προς τον χρόνο. Δηλαδή

$$\frac{df}{dt} = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{\partial f}{\partial t} + \{H, f\} = 0$$

Αν το μέγεθος αυτό δεν έχει αναλυτική χρονική εξάρτηση τότε η μερική παράγωγος $\partial f/\partial t = 0$ και το μέγεθος είναι ένα ολοκλήρωμα της κινήσεως αν ισχύει

$$\{H, f\} = 0$$

Η ίδια η Χαμιλτονιανή δεδομένου ότι $\{H, H\} = 0$ είναι ένα ολοκλήρωμα της κινήσεως αν δεν περιέχει αναλυτική χρονική εξάρτηση. Η εξίσωση

$$H(p_i, q_i) = E$$

είναι επομένως ένα πρώτο ολοκλήρωμα. Αν υποθέσουμε ότι υπάρχει μια συνάρτηση των συντεταγμένων q_i τέτοια ώστε οι αντίστοιχες ορμές να δίνονται από την σχέση

$$\vec{p} = \vec{\nabla} S$$

τότε η παραπάνω εξίσωση γράφεται

$$H\left(\frac{\partial S}{\partial q_i}, q_i\right) = E$$

Η εξίσωση αυτή είναι μια διαφορική εξίσωση που περιέχει μόνο τις συντεταγμένες q_i και ονομάζεται εξίσωση Χάμιλτον - Τζακόμπι. Αν η Χαμιλτονιανή περιέχει αναλυτική χρονική εξάρτηση τότε η εξίσωση Χάμιλτον - Τζακόμπι είναι

$$H\left(\frac{\partial S}{\partial q_i}, q_i, t\right) = -\frac{\partial S}{\partial t}$$

Η εξίσωση αυτή μπορεί να λυθεί εύκολα αν μπορέσουμε να διαχωρίσουμε τις μεταβλητές. Αυτό μπορεί να γίνει αν βρούμε ένα σύνολο συντεταγμένων q_i τέτοιων ώστε η λύση να έχει την μορφή

$$S(q_1, q_2, \cdots) = S_1(q_1) + S_2(q_2) + \cdots = \sum_k S_k(q_k)$$

Η εξίσωση διαχωρίζεται τότε στις εξισώσεις

$$\left(\frac{dS_k}{dq_k}\right)^2 = F(q_k) \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{dS_k}{dq_k} = f(q_k)$$

και η συνάρτηση S_k βρίσκεται ολοκληρώνοντας την συνάρτηση $f(q_k)$.

Εφαρμογή: Θεωρούμε ένα σύστημα που αποτελείται από n σωμάτια που αλληλεπιδρούν μεταξύ τους. Καμία άλλη εξωτερική δύναμη δεν επιδρά στα σωμάτια του συστήματος. Ένα τέτοιο σύστημα ονομάζεται κλειστό. Αποδεικνύεται ότι η συνάρτηση Λαγκράνζ του συστήματος είναι ίση με την διαφορά της κινητικής ενέργειας και της δυναμικής ενέργειας του συστήματος.

$$L = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{\upsilon}_i^{\,2} - U(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \cdots, \vec{r}_n)$$

Αν όλες οι δυνάμεις που ασκούνται πάνω στα σωματίδια ενός συστήματος προέρχονται από κάποιο δυναμικό το σύστημα ονομάζεται συντηρητικό. Αν το σύστημα δεν είναι κλειστό αλλά υπάρχουν και εξωτερικές δυνάμεις η συνάρτηση U εξαρτάται αναλυτικά και από τον χρόνο $U = U(\vec{r}_i, t)$.

Αντικαθιστούμε την παραπάνω συνάρτηση στην εξίσωση Λαγκράνζ και βρίσκουμε

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \vec{\upsilon}_i} = \frac{\partial L}{\partial \vec{r}} \qquad \Longrightarrow \qquad m_i \frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = -\frac{\partial U}{\partial \vec{r}_i}$$

Η τελευταία αυτή εξίσωση είναι η γνωστή εξίσωση του Νεύτωνα. Το διάνυσμα του δεύτερου μέλους της παραπάνω εξισώσεως

$$\vec{F}_i = -\frac{\partial U}{\partial \vec{r}_i}$$

είναι η δύναμη που επιδρά πάνω στο i σωμάτιο και το διάνυσμα

$$\vec{p} = \frac{\partial L}{\partial \vec{\upsilon}_i}$$

είναι η ορμή του i σωματίου.

Η Χαμιλτονιανή ενός τέτοιου συστήματος είναι το άθροισμα της κινητικής και της δυναμικής ενέργειας

$$\mathrm{H} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\vec{p}_i^{\,2}}{2m_i} + U(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \cdots, \vec{r}_n)$$

και παριστάνει την συνολική ενέργεια του συστήματος που παραμένει σταθερή. Οι κανονικές εξισώσεις του Χάμιλτον με την παραπάνω χαμιλτονιανή δίνουν τις σχέσεις

$$\dot{\vec{q}_i} = \frac{\partial H}{\partial \vec{p}_i} = \frac{1}{m_i}\vec{p}_i \qquad \dot{\vec{p}_i} = -\frac{\partial H}{\partial \vec{q}_i} = -\frac{\partial U}{\partial \vec{q}_i} = \vec{F}_i$$

Η πρώτη από τις σχέσεις αυτές είναι η γνωστή αναλογία μεταξύ της ορμής και της ταχύτητας με σταθερά αναλογίας την μάζα και η δεύτερη είναι η εξίσωση του Νεύτωνα.

Παρατήρηση: Παρατηρούμε ότι η δυναμική ενέργεια U εξαρτάται μόνο από τα διανύσματα θέσεως των σωματίων και όχι από την ταχύτητα της αλληλεπιδράσεως. Αυτό σημαίνει ότι η αλληλεπίδραση διαδίδεται ακαριαία με άπειρη ταχύτητα πράγμα που είναι κατά προσέγγιση σωστό. Η ταχύτητα αυτή είναι πολύ μεγάλη αλλά σύμφωνα με την ειδική θεωρία της σχετικότητας δεν μπορεί να υπερβεί την ταχύτητα του φωτός.

6.3 Οι κανονικοί μετασχηματισμοί

Ορισμός: Θεωρούμε τους ακόλουθους σημειακούς μετασχηματισμούς στον χώρο των φάσεων

$$Q_i = Q_i(p_j, q_j, t) \qquad P_i = P_i(p_j, q_j, t) \qquad i = 1, 2, \cdots, n$$

Ο μετασχηματισμός αυτός ονομάζεται κανονικός εάν οι κανονικές εξισώσεις του Χάμιλτον παραμένουν αναλλοίωτοι δηλαδή αν ισχύει

$$\dot{Q}_i = \frac{\partial H'(P_j, Q_j)}{\partial P_i} \qquad \dot{P}_i = -\frac{\partial H'(P_j, Q_j)}{\partial Q_i} \qquad i = 1, 2, \cdots, n$$

Είναι φανερό ότι για να βρούμε τις ίδιες εξισώσεις κινήσεως πρέπει η μεταβολή του ολοκληρώματος της δράσεως να είναι ίση στα δύο συστήματα δηλαδή

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \left(\sum_k P_k \dot{Q}_i - H'(P_k, Q_k, t) \right) dt = \delta \int_{t_1}^{t_2} \left(\sum_i p_i \dot{q}_i - H(p_i, q_i, t) \right) dt$$

Άρα οι υπό ολοκλήρωση ποσότητες ή πρέπει να είναι ίσες ή γενικότερα να διαφέρουν κατά την παράγωγο ως προς τον χρόνο μιας αυθαίρετης συναρτήσεως F στον χώρο των φάσεων. Έτσι η διαφορά των δύο ολοκληρωμάτων δράσεως είναι κάποιοι επιφανειακοί όροι που μηδενίζονται. Η σχέση είναι

$$\sum_k P_k\dot{Q}_k - H'(P_k, Q_k, t) = \sum_i p_i\dot{q}_i - H(p_i, q_i, t) - \frac{dF}{dt} \tag{6.1}$$

Η συνθήκη είναι ικανή ώστε οι εξισώσεις του Χάμιλτον να παραμείνουν αναλλοίωτοι.

Η συνάρτηση F ονομάζεται γεννήτρια συνάρτηση του κανονικού μετασχηματισμού. Εξαρτάται από $2n$ σε πλήθος μεταβλητές από τις μεταβλητές Q_k, P_k, q_i, και p_i και ενδεχομένως εξαρτάται και από τον χρόνο. Δεν επιτρέπεται να εξαρτάται από περισσότερες μεταβλητές διότι τα ζεύγη των μεταβλητών Q_k, P_k και q_i, p_i είναι ανεξάρτητα δεν υπάρχει δηλαδή συναρτησιακή σχέση μεταξύ τους. Είναι δυνατόν δηλαδή να έχει μια από τις παρακάτω μορφές

$$F(Q_k, q_k, t) \qquad F(P_k, q_k, t) \qquad F(Q_k, p_k, t) \qquad F(P_k, p_k, t)$$

Θα εξετάσουμε την πρώτη περίπτωση που η γεννήτρια συνάρτηση είναι της μορφής $F(Q_k, q_k, t)$. Όλα τα μεγέθη της εξισώσεως υποθέτουμε ότι είναι συναρτήσεις των ανεξάρτητων μεταβλητών Q_k, q_k και του χρόνου t. Επομένως βρίσκουμε

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + \sum_i \frac{\partial F}{\partial q_i}\dot{q}_i + \sum_i \frac{\partial F}{\partial Q_i}\dot{Q}_i$$

Αντικαθιστούμε στην σχέση (6.1) και η εξίσωση γίνεται

$$\sum_i P_i\dot{Q}_i - H' = \sum_i p_i\dot{q}_i - H - \frac{\partial F}{\partial t} - \sum_i \frac{\partial F}{\partial q_i}\dot{q}_i - \sum_i \frac{\partial F}{\partial Q_i}\dot{Q}_i$$

Επειδή οι μεταβλητές q_i και Q_i είναι ανεξάρτητες εξισώνουμε τους συντελεστές των $\dot{q}_i$ και $\dot{Q}_i$ και τους σταθερούς και βρίσκουμε

$$p_i = \frac{\partial F(Q_k, q_k, t)}{\partial q_i} \qquad P_i = -\frac{\partial F(Q_k, q_k, t)}{\partial Q_i} \qquad H' = H + \frac{\partial F(Q_k, q_k, t)}{\partial t}$$

Για να έχει η πρώτη εξίσωση λύση ως προς Q πρέπει η παρακάτω ορίζουσα να μην μηδενίζεται

$$det\left|\frac{\partial^2 F}{\partial q_i \partial Q_k}\right| \neq 0$$

που είναι η αναγκαία και ικανή συνθήκη που πρέπει να ικανοποιεί η γεννήτρια συνάρτηση.

Για να μελετήσουμε την δεύτερη γεννήτρια συνάρτηση $F(P_k, q_k, t)$ γράφουμε την σχέση (6.1) με την μορφή

$$-\sum_k \dot{P}_k Q_k - H'(P_k, Q_k, t) = \sum_i p_i \dot{q}_i - H(p_i, q_i, t) - \frac{d}{dt}F'$$

όπου η συνάρτηση F' είναι

$$F' = \sum_k P_k Q_k + F$$

Αν τώρα η συνάρτηση αυτή εξαρτάται από τις μεταβλητές q_k και P_k τότε βρίσκουμε με τον ίδιο τρόπο τις εξισώσεις

$$p_k = \frac{\partial F'(P_k, q_k, t)}{\partial q_k} \qquad Q_k = \frac{\partial F'(P_k, q_k, t)}{\partial P_k} \qquad H' = H + \frac{\partial F'(P_k, q_k, t)}{\partial t}$$

Η αναγκαία και ικανή συνθήκη είναι τώρα η παρακάτω

$$det\left|\frac{\partial^2 F}{\partial q_i \partial P_k}\right| \neq 0$$

Για την ιδική περίπτωση που η γεννήτρια αυτή συνάρτηση είναι της μορφής

$$F' = \sum_j q_j P_j$$

οι παραπάνω σχέσεις δίνουν

$$p_k = P_k \qquad q_k = Q_k \qquad H = H'$$

Δηλαδή ο μετασχηματισμός αυτός είναι ο ταυτοτικός μετασχηματισμός.

Με όμοιο τρόπο μπορούμε να μελετήσουμε και τις άλλες γεννήτριες συναρτήσεις.

Η ικανή σχέση (6.1) περιέχει την συνάρτηση F. Θα προσπαθήσουμε τώρα να βρούμε ισοδύναμη αναγκαία σχέση που να μην περιέχει την F στην περίπτωση που δεν είναι γνωστή.

Υποθέτουμε ότι όλα τα μεγέθη της σχέσεως αυτής είναι συναρτήσεις των ανεξάρτητων μεταβλητών Q_k και P_k. Οι παράγωγοι ως προς τον χρόνο των q_i και F είναι

$$\dot{q}_i = \frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial q_i}{\partial t} + \sum_j \frac{\partial q_i}{\partial Q_j}\dot{Q}_j + \sum_j \frac{\partial q_i}{\partial P_j}\dot{P}_j$$

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + \sum_j \frac{\partial F}{\partial Q_j}\dot{Q}_j + \sum_j \frac{\partial F}{\partial P_j}\dot{P}_j$$

Επομένως η εξίσωση (6.1) γίνεται

$$\sum_k P_k\dot{Q}_k - H' = \sum_i p_i \left(\frac{\partial q_i}{\partial t} + \sum_j \frac{\partial q_i}{\partial Q_j}\dot{Q}_j + \sum_j \frac{\partial q_i}{\partial P_j}\dot{P}_j \right) - H -$$

$$\frac{\partial F}{\partial t} - \sum_j \frac{\partial F}{\partial Q_j}\dot{Q}_j - \sum_j \frac{\partial F}{\partial P_j}\dot{P}_j = \left(\sum_i p_i \sum_j \frac{\partial q_i}{\partial Q_j} - \sum_j \frac{\partial F}{\partial Q_j} \right) \dot{Q}_j +$$

$$\left(\sum_i p_i \sum_j \frac{\partial q_i}{\partial P_j} - \sum_j \frac{\partial F}{\partial P_j} \right) \dot{P}_j + \sum_i p_i \frac{\partial q_i}{\partial t} - H - \frac{\partial F}{\partial t}$$

Επειδή η μεταβλητές Q_k και P_k είναι ανεξάρτητες εξισώνουμε τους συντελεστές των $\dot{Q}_k$, $\dot{P}_k$ και τους σταθερούς όρους και βρίσκουμε

$$P_k = \sum_i p_i \frac{\partial q_i}{\partial Q_k} - \frac{\partial F}{\partial Q_k} \qquad\qquad 0 = \sum_i p_i \frac{\partial q_i}{\partial P_k} - \frac{\partial F}{\partial P_k}$$

$$H'(Q_k, P_k, t) = H(q_k, p_k, t) - \sum_i p_i \frac{\partial q_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t} F(Q_k, P_k, t)$$

Αν καταφέρουμε και λύσουμε το διαφορικό σύστημα των δύο πρώτων εξισώσεων τότε η τρίτη εξίσωση δίνει την συνάρτηση $H'(Q_k, P_k, t)$.

Είναι τώρα προφανές ότι μπορούμε να απαλλαγούμε από την άγνωστη συνάρτηση F κατά τρεις τρόπους. Παραγωγίζουμε την πρώτη ομάδα ως προς Q_j δυο φορές με κατάλληλη εκλογή των δεικτών και αφαιρούμε τις δύο σχέσεις που θα προκύψουν ή παραγωγίζουμε την δεύτερη ομάδα ως προς P_j δυο φορές με κατάλληλη εκλογή των δεικτών και αφαιρούμε τις δύο σχέσεις ή τέλος παραγωγίζουμε την πρώτη ως προς P_l την δεύτερη ως προς Q_k και αφαιρούμε τις δύο σχέσεις. Το αποτέλεσμα είναι

$$-\frac{\partial}{\partial Q_l}\left(P_k - \sum_i p_i \frac{\partial q_i}{\partial Q_k}\right) + \frac{\partial}{\partial Q_k}\left(P_l - \sum_i p_i \frac{\partial q_i}{\partial Q_l}\right) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial P_l}\left(\sum_i p_i \frac{\partial q_i}{\partial P_k}\right) - \frac{\partial}{\partial P_k}\left(\sum_i p_i \frac{\partial q_i}{\partial P_l}\right) = 0$$

$$-\frac{\partial}{\partial P_l}\left(P_k - \sum_i p_i \frac{\partial q_i}{\partial Q_k}\right) - \frac{\partial}{\partial Q_k}\left(\sum_i p_i \frac{\partial q_i}{\partial P_l}\right) = 0$$

Αποδεικνύεται ότι οι παραπάνω σχέσεις είναι οι αναγκαίες και ικανές συνθήκες ώστε το διαφορικό σύστημα να έχει λύση ως προς F. Θα παραλείψουμε την απόδειξη σημειώνουμε μόνο ότι ανάλογη πρόταση ισχύει στον τριδιάστατο χώρο όπου η εξίσωση

$$\vec{G} = \vec{\nabla} V$$

έχει λύση ως προς V όταν ισχύει η αναγκαία και ικανή συνθήκη

$$\vec{\nabla} \times \vec{G} = 0$$

Εκτελούμε τις παραγωγίσεις και βρίσκουμε τελικά

$$\sum_i \left(\frac{\partial p_i}{\partial Q_l}\frac{\partial q_i}{\partial Q_k} - \frac{\partial p_i}{\partial Q_k}\frac{\partial q_i}{\partial Q_l}\right) = 0 \qquad \sum_i \left(\frac{\partial p_i}{\partial Q_l}\frac{\partial q_i}{\partial P_k} - \frac{\partial p_i}{\partial P_k}\frac{\partial q_i}{\partial P_l}\right) = 0$$

$$\sum_i \left(\frac{\partial p_i}{\partial P_l}\frac{\partial q_i}{\partial Q_k} - \frac{\partial p_i}{\partial P_k}\frac{\partial q_i}{\partial P_l}\right) = \frac{\partial P_k}{\partial P_l} = \delta_{kl}$$

Τις παραπάνω σχέσεις τις γράφουμε συμβολικά

$$\{P_l, Q_k\}'_{p,q} = 0 \qquad \{P_l, Q_k\}'_{p,q} = 0 \qquad \{P_l, Q_k\}'_{p,q} = \delta_{lk}$$

Οι αγκύλες έχουν υπολογιστεί με τις αρχικές μεταβλητές p, q που γι αυτό εμφανίζονται σαν δείκτες στις παραπάνω σχέσεις. Αποδεικνύεται ότι οι παραπάνω σχέσεις είναι αναγκαίες και ικανές ώστε οι μετασχηματισμοί να είναι κανονικοί.

Παρατηρούμε ότι οι αγκύλες αυτές όπως ορίστηκαν εδώ είναι διαφορετικές από τις αγκύλες Πουασόν όπως ορίστηκαν στην προηγούμενη παράγραφο. Οι αγκύλες αυτές ονομάζονται αγκύλες Λαγκράνζ. Γράφουμε πάλι εδώ τους ορισμούς για τις δύο αυτές αγκύλες.

$$\{A, B\}' = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial q_i}{\partial A} \frac{\partial p_i}{\partial B} - \frac{\partial q_i}{\partial A} \frac{\partial p_i}{\partial B} \right)$$

$$\{A, B\} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial A}{\partial q_i} \frac{\partial B}{\partial p_i} - \frac{\partial A}{\partial p_i} \frac{\partial B}{\partial p_i} \right)$$

Μπορούμε να αποδείξουμε εύκολα ότι για ένα σύνολο $2n$ ανεξάρτητων μεταβλητών A_l που είναι συναρτήσεις των (p_l, q_k), οι δύο αυτές αγκύλες είναι η μία αντίστροφη της άλλης. Συγκεκριμένα ισχύει

$$\sum_{l=1}^{2n} \{A_i, A_l\}' \{A_l, A_j\} = -\delta_{ij} \qquad i, j = 1, 2, \cdots, 2n$$

Οι παραπάνω ικανές και αναγκαίες σχέσεις μπορούν συνεπώς να εκφραστούν και με την βοήθεια των αγκυλών Πουασόν. Οι σχέσεις είναι

$$\{Q_l, Q_k\}_{p,q} = 0 \qquad \{P_l, P_k\}_{p,q} = 0 \qquad \{Q_l, P_k\}_{p,q} = \delta_{lk}$$

Οι σχέσεις αυτές είναι οι αναγκαίες και ικανές συνθήκες ώστε ο μετασχηματισμός $p, q \to P, Q$ να είναι κανονικός.

Παράδειγμα: Ένα τυπικό παράδειγμα κανονικών μετασχηματισμών δίνονται από την λύση των εξισώσεων κινήσεως. Αν $Q_i(q_k, p_l)$ και $P_i(q_k, p_l)$ είναι οι λύσεις αυτές όπου οι μεταβλητές (q_k, p_l) αντιστοιχούν στις αρχικές συνθήκες. Αποδεικνύεται στις ασκήσεις ότι οι αγκύλες Πουασόν παραμένουν αναλλοίωτες. Η γεννήτρια συνάρτηση του κανονικού αυτού μετασχηματισμού είναι το ολοκλήρωμα S της δράσεως.

Οι κανονικοί μετασχηματισμοί είναι εκείνοι που διατηρούν αναλλοίωτες τις αγκύλες Πουασόν και Λαγκράνζ. Αποδεικνύεται ότι οι κανονικοί μετασχηματισμοί διατηρούν επίσης σταθερό τον όγκο στον χώρο των φάσεων.

Θεωρούμε τον $2n-$διαστάσεων χώρο των φάσεων με n συντεταγμένες για την θέση και n για τις αντίστοιχες ορμές. Το γινόμενο των διαφορικών

$$dq_1 \cdots dq_n dp_1 \cdots dp_n$$

είναι ο στοιχειώδης όγκος στον χώρο των φάσεων. Το ολοκλήρωμα του όγκου αυτού σε μια περιοχή δίνει τον όγκο της περιοχής αυτής.

Θεώρημα: Ο όγκος μιας περιοχής στον χώρο των φάσεων δεν μεταβάλλεται από τους κανονικούς μετασχηματισμούς $p, q \to P, Q$. Δηλαδή ισχύει η σχέση

$$\int dq_1 \cdots dq_n dp_1 \cdots dp_n = \int dQ_1 \cdots dQ_n dP_1 \cdots dP_n$$

Η πρόταση ονομάζεται Θεώρημα του Λιουβίλ.

Προφανώς πρέπει να αποδείξουμε ότι η Ιακωβιανή του μετασχηματισμού είναι ίση με την μονάδα

$$J = \frac{\partial(Q_1 \cdots Q_n P_1 \cdots P_n)}{\partial(q_1 \cdots q_n p_1 \cdots p_n)} = 1$$

Την απόδειξη του θεωρήματος θα την παραλείψουμε.

Επειδή η μεταβολή των q_i και p_j ως προς τον χρόνο μπορεί να θεωρηθεί σαν ένας κανονικός μετασχηματισμός το θεώρημα μας λέει επίσης ότι ο όγκος στον χώρο των φάσεων παραμένει αναλλοίωτος κατά την χρονική εξέλιξη του συστήματος. Το θεώρημα του Λιουβίλ είναι βασικό θεώρημα για την στατιστική μηχανική.

Μπορούμε να αποδείξουμε επίσης ότι και τα ολοκληρώματα πάνω σε μια πολλαπλότητα δύο, τεσσάρων κ.λ.π διαστάσεων, δηλαδή

$$\iint \sum_i dq_i dp_i, \qquad \iiiint \sum_{i \neq j} dq_i dp_i dq_j dp_j, \qquad \text{κ.λ.π.}$$

παραμένουν αναλλοίωτα από τους κανονικούς μετασχηματισμούς. Οι κανονικές αναλλοίωτες αυτές ποσότητες ονομάζονται Πουανκαρέ αναλλοίωτες.

Εφαρμογή: Θα βρούμε τους κανονικούς μετασχηματισμούς που προκύπτουν από την γεννήτρια συνάρτηση

$$F(q, Q) = \frac{1}{2} m\omega q^2 \,\sigma\varphi\, Q$$

στον χώρο των φάσεων με διάσταση $n = 2$ και θα χρησιμοποιήσουμε τους μετασχηματισμούς αυτούς για να λύσουμε το πρόβλημα του αρμονικού ταλαντωτή όπου

$$H(p, q, t) = \frac{1}{2m} p^2 + \frac{1}{2} m\omega^2 q^2$$

Θα χρησιμοποιήσουμε την εξίσωση (6.1) που ξαναγράφουμε πάλι εδώ για $n = 2$

$$P\dot{Q} - H'(P, Q, t) = p\dot{q} - H(p, q, t) - \frac{dF}{dt}$$

Υποθέτουμε ότι όλοι οι όροι είναι συναρτήσεις των ανεξάρτητων μεταβλητών (q, Q). Αναλύουμε την παράγωγο ως προς τον χρόνο της συναρτήσεως F και βρίσκουμε

$$P\dot{Q} - H'(P, Q, t) = p\dot{q} - H(p, q, t) - \frac{\partial F}{\partial t} - \frac{\partial F}{\partial q}\dot{q} - \frac{\partial F}{\partial Q}\dot{Q}$$

Εξισώνουμε τώρα τους συντελεστές του $\dot{q}$, του $\dot{Q}$ και τους σταθερούς και βρίσκουμε

$$P = -\frac{\partial F}{\partial Q} \qquad p = \frac{\partial F}{\partial q} \qquad H(p, q, t) = H'(P, Q, t)$$

Από την δύο πρώτες σχέσεις θα βρούμε την συναρτησιακή σχέση των μεταβλητών. Είναι πιο εύκολο να λύσουμε ως προς q και p. Βρίσκουμε

$$P = \frac{1}{2} m\omega q^2 \frac{1}{\eta\mu^2 Q} \qquad p = m\omega q \,\sigma\varphi\, Q \qquad \Longrightarrow$$

$$q = \sqrt{\frac{2P}{m\omega}}\,\eta\mu\, Q \qquad p = \sqrt{2m\omega P}\,\sigma\upsilon\nu\, Q$$

Αντικαθιστούμε τις σχέσεις αυτές στην Χαμιλτονιανή και βρίσκουμε

$$H(p,q,t) = \frac{1}{2m} 2m\omega P\,\text{συν}^2 Q + \frac{1}{2} m\omega^2 \frac{2P}{m\omega}\,\text{ημ}^2 Q = \omega P\,\text{συν}^2 Q + \omega P\,\text{ημ}^2 Q$$

$$\Longrightarrow \qquad H'(P,Q,t) = \omega P$$

Γράφουμε τώρα και λύνουμε τις κανονικές εξισώσεις κινήσεως ως προς τις καινούργιες μεταβλητές. Παρατηρούμε ότι η νέα Χαμιλτονιανή δεν περιέχει την θέση Q. Μια τέτοια μεταβλητή που δεν εμφανίζεται στην Χαμιλτονιανή ονομάζεται κυκλική. Για μια τέτοια μεταβλητή η συζυγής της ορμή είναι σταθερή. Πράγματι βρίσκουμε

$$\dot{P} = -\frac{\partial H'}{\partial Q} = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad P = c = \frac{\mathrm{E}}{\omega}$$

όπου με Ε συμβολίζουμε την Χαμιλτονιανή που είναι σταθερή. Η τιμή της βρίσκεται από τις αρχικές συνθήκες του προβλήματος.

Η δεύτερη κανονική εξίσωση της κινήσεως δίνει την θέση

$$Q = \frac{\partial H'}{\partial P} = \omega \qquad \Longrightarrow \qquad Q = \omega t + \varphi$$

Η σταθερά φ προσδιορίζεται από τις αρχικές συνθήκες. Επομένως η κατάσταση του συστήματος δίνεται από την σχέση

$$q(t) = \sqrt{\frac{2P}{m\omega}}\,\text{ημ}\,Q = \sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}}\,\text{ημ}\,(\omega t + \varphi)$$

$$p(t) = \sqrt{2m\omega P}\,\text{συν}\,Q = \sqrt{2mE}\,\text{συν}\,(\omega t + \varphi)$$

Οι κανονικοί μετασχηματισμοί μας βοήθησαν να λύσουμε πολύ εύκολα το πρόβλημα.

Για ένα πρόβλημα με περισσότερες μεταβλητές φαίνεται ότι θα ήταν ευχής έργο αν μπορούσαμε να βρούμε ένα κατάλληλο κανονικό μετασχηματισμό τέτοιο ώστε όλες οι μεταβλητές να είναι κυκλικές ή τουλάχιστον κάποιες από αυτές. Τότε οι συζυγείς μεταβλητές των συντεταγμένων αυτών είναι σταθερές. Όταν η Χαμιλτονιανή διατηρείται αυτό είναι δυνατόν.

Όταν η Χαμιλτονιανή εξαρτάται από τον χρόνο τότε μπορούμε να αναζητήσουμε τον κανονικό μετασχηματισμό ώστε η νέα Χαμιλτονιανή να είναι ταυτοτικά μηδέν.

$$H'(P_i, Q_i, t) = 0$$

Τότε προφανώς όλες οι μεταβλητές είναι κυκλικές και η Χαμιλτονιανή ικανοποιεί την σχέση

$$H(p_i, q_i, t) + \frac{\partial F}{\partial t} = 0$$

Υποθέτουμε για την απλοποίηση των σχέσεων ότι ο ζητούμενος μετασχηματισμός έχει την μορφή $F(q_i, P_i, t)$. Με την βοήθεια αυτού του μετασχηματισμού η σχέση (6.1) δίνει την σχέση

$$p_i = \frac{\partial F}{\partial q_i}$$

και η παραπάνω εξίσωση γίνεται

$$H(p_i, \frac{\partial F}{\partial q_i}, t) + \frac{\partial F}{\partial t} = 0$$

Η εξίσωση αυτή είναι η γνωστή εξίσωση Χάμιλτον - Τζακόμπι και έχει μελετηθεί σε άλλο σημείο του κεφαλαίου αυτού.

6.4 Η κανονική ομάδα

Το σύνολο των κανονικών μετασχηματισμών σε έναν $2n-$ διάστατο χώρο των φάσεων που δεν εξαρτώνται από τον χρόνο μπορεί να γίνει ομάδα. Θα ονομάζουμε αυτή την ομάδα κανονική ομάδα. Ο νόμος συνθέσεως της ομάδας αυτής ορίζεται ως εξής.

Ορισμός: Θεωρούμε τους ακόλουθους δύο κανονικούς μετασχηματισμούς

$$p, q \to p_1, q_1 \qquad\qquad p_1, q_1 \to p_2, q_2$$

Η σύνθεση αυτών των δύο αυτών μετασχηματισμών ορίζεται ο μετασχηματισμός

$$p, q \to p_2, q_2$$

Εύκολα αποδεικνύεται ότι ο μετασχηματισμός αυτός είναι κανονικός και επομένως είναι ένας εσωτερικός νόμος για το σύνολο των κανονικών μετασχηματισμών. Το σύνολο γίνεται ομάδα αν ισχύει η προσεταιριστική ιδιότητα που αποδεικνύεται επίσης εύκολα.

Η μονάδα της ομάδας αυτής είναι ο ταυτοτικός μετασχηματισμός

$$p, q \to p, q$$

που είναι προφανώς ένας κανονικός μετασχηματισμός. Τέλος για κάθε κανονικό μετασχηματισμό

$$p, q \to p_1, q_1$$

ο αντίστροφος μετασχηματισμός

$$p_1, q_1 \to p, q$$

αποδεικνύεται ότι είναι κανονικός και άρα παριστάνει το αντίστροφο στοιχείο της ομάδα αυτής. Προφανώς η σύνθεση των δύο αυτών μετασχηματισμών δίνει τον ταυτοτικό μετασχηματισμό δηλαδή την μονάδα της κανονικής ομάδας.

Μια πολύ σπουδαία υποομάδα της κανονικής ομάδας είναι η ταυτοτική συνιστώσα που βρίσκεται αν εκτελέσουμε αλλεπάλληλους απειροστούς μετασχηματισμούς. Ένας μετασχηματισμός ανήκει στην υποομάδα αυτή αν μπορεί να βρεθεί μια μονοπαραμετρική υποομάδα από κανονικούς μετασχηματισμούς φ_t τέτοια ώστε η φ_t να είναι συνεχής ως προς t και επιπλέον να ισχύει

$$\lim_{t\to 0} \varphi_t = e \qquad \lim_{t\to 1} \varphi_t = \varphi$$

Δηλαδή οι μετασχηματισμοί αυτοί μπορούν να συνδεθούν συνεχώς με το ταυτοτικό στοιχείο της ομάδας. Η ταυτοτική συνιστώσα είναι η συνεκτική συνιστώσα του ταυτοτικού στοιχείου της ομάδας όπου για ευκολία δεχόμαστε ότι οι συνιστώσες του ταυτοτικού στοιχείου της ομάδας είναι μηδέν.

$$e \longrightarrow e(0, 0, \cdots)$$

Ένας πεπερασμένος κανονικός μετασχηματισμός που μπορεί να συνδεθεί συνεχώς με την μονάδα κτίζεται από αλλεπάλληλους απειροστούς μετασχηματισμούς. Θα ορίσουμε ακολούθως τους μετασχηματισμούς αυτούς.

Θεωρούμε τους ακόλουθους απειροστούς κανονικούς μετασχηματισμούς

$$Q_k = q_k + \delta\varphi \mathrm{A}_k(q_i, p_j) \qquad\qquad P_l = p_l + \delta\theta B_l(q_i, p_j)$$

όπου δφ και δθ είναι απειροστές ποσότητες και οι A_k και B_l είναι πεπερασμένες αλλά αυθαίρετες συναρτήσεις των θέσεων και των ορμών. Θα βρούμε τις αυθαίρετες αυτές συναρτήσεις ώστε οι μετασχηματισμοί να είναι κανονικοί.

Για να είναι οι μετασχηματισμοί αυτοί κανονικοί πρέπει να ικανοποιούν τις αναγκαίες και ικανές σχέσεις. Οι σχέσεις αυτές είναι

$$\{Q_k, Q_l\}_{p,q} = 0 \qquad\qquad \{P_k, P_l\}_{p,q} = 0 \qquad\qquad \{Q_k, P_l\}_{p,q} = \delta_{kl}$$

όπου οι αγκύλες είναι οι αγκύλες Πουασόν.

Οι δύο πρώτες είναι προφανείς και ισχύουν για οποιεσδήποτε συναρτήσεις A_k B_l. Σημειώστε ότι απορρίπτουμε σαν μηδενικούς, όρους που πολλαπλασιάζονται με τις απειροστές ποσότητες $(\delta\varphi)^2$ $(\delta\theta)^2$ και $(\delta\varphi)(\delta\theta)$. Η τελευταία συνθήκη δίνει τις παρακάτω σχέσεις όπου εννοείται άθροιση ως προς m και n που επαναλαμβάνονται δύο φορές στην ίδια πλευρά της ισότητας

$$\frac{\partial Q_k}{\partial q_m}\frac{\partial P_l}{\partial p_n} - \frac{\partial P_l}{\partial q_m}\frac{\partial Q_k}{\partial p_n} = \frac{\partial\left(q_k + \delta\varphi \mathrm{A}_k\right)}{\partial q_m}\frac{\partial\left(p_l + \delta\theta B_l\right)}{\partial p_n} -$$

$$\frac{\partial\left(p_l + \delta\theta B_l\right)}{\partial q_m}\frac{\partial\left(q_k + \delta\varphi \mathrm{A}_k\right)}{\partial p_n} = \left(\delta_{km} + \delta\varphi\frac{\partial \mathrm{A}_k}{\partial q_m}\right)\left(\delta_{ln} + \delta\theta\frac{\partial B_l}{\partial p_n}\right) -$$

$$(\delta\theta)\frac{\partial B_l}{\partial q_m}(\delta\varphi)\frac{\partial \mathrm{A}_k}{\partial p_n} = \delta_{km}\delta_{ln} + \delta_{km}\delta\theta\frac{\partial B_l}{\partial p_n} + \delta_{ln}\delta\varphi\frac{\partial \mathrm{A}_k}{\partial q_m} = \delta_{kl}$$

$$\Longrightarrow \qquad \sum_n \frac{\partial B_l}{\partial p_n} + \sum_m \frac{\partial \mathrm{A}_k}{\partial q_m} = 0$$

Η εξίσωση αυτή ικανοποιείται όταν υπάρχει συνάρτηση $\varphi(q_i, p_j)$ τέτοια ώστε να ισχύουν οι σχέσεις

$$B_l = \sum_i \frac{\partial\varphi}{\partial q_i} = \{p_l, \varphi\} \qquad\qquad A_k = -\sum_j \frac{\partial\varphi}{\partial p_j} = \{q_k, \varphi\}$$

Οι απειροστοί κανονικοί μετασχηματισμοί έχουν επομένως την μορφή

$$Q_k = q_k + \delta\varphi\{q_k, \varphi\} \qquad\qquad P_l = p_l + \delta\theta\{p_l, \varphi\}$$

Η μεταβολή στις μεταβλητές q_k και p_l είναι

$$Q_k - q_k = \delta q_k = \delta\varphi\{q_k, \varphi\} \qquad P_k - p_k = \delta p_l = \delta\theta\{p_l, \varphi\}$$

Θα βρούμε τέλος την μεταβολή μιας συναρτήσεως $f(q_k, p_k)$ ορισμένης στον χώρο των φάσεων από τους απειροστούς κανονικούς μετασχηματισμούς. Βρίσκουμε

$$\delta f = f(q_k, p_k) - f(Q_k, P_k) = f(q_k, p_k) - f\left(q_k + \delta\varphi\{q_k, \varphi\}, p_k + \delta\theta\{p_k, \varphi\}\right) =$$

$$-\delta\varphi\{q_k, \varphi\}\frac{\partial f}{\partial q_k} - \delta\theta\{p_k, \varphi\})\frac{\partial f}{\partial p_k}$$

6.5 Η θεωρία των πεδίων

Για ένα σύστημα με n βαθμούς ελευθερίας έχουμε n ανεξάρτητες συναρτήσεις $q_i(t)$, $i = 1, 2, \cdots, n$ που προσδιορίζουν πλήρως την θέση του συστήματος. Το σύστημα προσδιορίζεται αν γνωρίζουμε την συνάρτηση Λαγκράνζ του συστήματος $L(q_1, q_2, \cdots, q_n; \dot{q}_1, \dot{q}_2, \cdots, \dot{q}_n; t)$. Οι εξισώσεις Λαγκράνζ είναι οι εξισώσεις κινήσεως και είναι διαφορικές εξισώσεις δεύτερης τάξης ως προς τις συναρτήσεις $q_i(t)$.

Ο δείκτης i παριστάνει τους βαθμούς ελευθερίας του συστήματος και μεταβάλλεται από το 1 το n και πολλές φορές έως το άπειρο (αριθμήσιμο). Υπάρχουν όμως συστήματα με άπειρους (συνεχείς) βαθμούς ελευθερίας. Τα συστήματα αυτά ονομάζονται πεδία και περιγράφονται από μια συνάρτηση των συντεταγμένων $\vec{r}$. Ο δείκτης i δηλαδή έχει αντικατασταθεί από την συνεχή παράμετρο $\vec{r}$. Οι γενικευμένες συναρτήσεις $q_i(t)$ και $p_i(t)$ πρέπει να αντικατασταθούν από τις πεδιακές συναρτήσεις $\varphi(\vec{r}, t)$ και $\pi(\vec{r}, t)$ αντιστοίχως.

$$i \longrightarrow \vec{r} \qquad q_i(t) = q(i, t) \longrightarrow \varphi(\vec{r}, t) \quad p_i(t) = p(i, t) \longrightarrow \pi(\vec{r}, t)$$

Στο κεφάλαιο αυτό θα συμβολίζουμε με x_1, x_2 και x_3 τις συνιστώσες του διανύσματος $\vec{r}$, δηλαδή

$$\vec{r} = (x_1, x_2, x_3)$$

Οι νέες μεταβλητές είναι ένας γραμμικός συνδυασμός των q_i και p_j της μορφής

$$\varphi(\vec{r}, t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(\vec{r}) q_k \qquad \pi(\vec{r}, t) = \sum_{k=1}^{\infty} v_k(\vec{r}) p_k$$

Οι σχέσεις αυτές είναι μια γραμμική σχέση ανάμεσα σε ένα σύστημα με αριθμήσιμα άπειρους βαθμούς ελευθερίας και σε ένα σύστημα με συνεχείς άπειρους βαθμούς ελευθερίας. Οι “ μήτρες ” μετασχηματισμού με στοιχεία $u_k(\vec{r})$ και $v_k(\vec{r})$ έχουν στήλες που τις μετράμε με τον αριθμήσιμο δείκτη k και γραμμές που τις μετράμε με τον συνεχή δείκτη $\vec{r}$. Συνεπώς οι περίεργες αυτές “ μήτρες ” έχουν αριθμήσιμα άπειρο αριθμό στηλών και συνεχές άπειρο αριθμό γραμμών.

Οι συναρτήσεις $u_k(\vec{r})$ και $v_k(\vec{r})$ ικανοποιούν τις σχέσεις

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k(\vec{r})v_k(\vec{r}\,') = \delta(\vec{r}-\vec{r}\,') \qquad\qquad \iiint d^3\vec{r}u_k(\vec{r})v_s(\vec{r}) = \delta_{sk}$$

Οι σχέσεις αυτές μας λένε ότι οι δύο “ μήτρες ” είναι η μία αντίστροφη της άλλης. Οι γενικευμένες συντεταγμένες και οι αντίστοιχες ορμές αποδεικνύεται εύκολα ότι ικανοποιούν τις σχέσεις

$$\{\varphi(\vec{r},t),\varphi(\vec{r}\,',t)\} = \{\pi(\vec{r},t),\pi(\vec{r}\,',t)\} = 0 \qquad\qquad \{\varphi(\vec{r},t),\pi(\vec{r}\,',t)\} = \delta(\vec{r}-\vec{r}\,')$$

όπου το $\delta(\vec{r}-\vec{r}\,')$ είναι το δέλτα συναρτησιακό ή το συναρτησικό του Ντιράκ και έχει αντικαταστήσει το σύμβολο δ_{ij} του Κρόνεκερ. Δεν θα δώσουμε εδώ τον αυστηρό μαθηματικό ορισμό του συναρτησιακού του Ντιράκ. Για παράδειγμα γράφουμε τις σχέσεις

$$\sum_i F_i\delta_{ij} = F_j \qquad\qquad \int f(\vec{r}\,')\delta(\vec{r}-\vec{r}\,')d^3\vec{r} = f(\vec{r})$$

όπου έχουμε άθροισμα ως προς τον αριθμήσιμο δείκτη και ολοκλήρωμα ως προς τον συνεχή “δείκτη”. Η τελευταία σχέση μπορεί να θεωρηθεί σαν ο ορισμός του συναρτησιακού.

Για τα συστήματα αυτά η συνάρτηση του Λαγκράνζ δίνεται συνήθως σαν ένα ολοκλήρωμα στον τριδιάστατο χώρο μιας συναρτήσεως πυκνότητας ℓ. Μια συνάρτηση που ορίζεται με τον τρόπο αυτό, σαν ένα ολοκλήρωμα δηλαδή μιας πυκνότητας σε μια περιοχή του χώρου, ονομάζεται τοπική.

$$L(\varphi,\dot{\varphi}) = \iiint d^3\vec{r}\;\ell\left(\varphi, \frac{\partial\varphi}{\partial t}, \frac{\partial\varphi}{\partial x_1}, \frac{\partial\varphi}{\partial x_2}, \frac{\partial\varphi}{\partial x_3}\right)$$

Δεχόμαστε για την απλούστευση των σχέσεων ότι η συνάρτηση πυκνότητας του Λαγκράνζ εξαρτάται μόνο από την χρονική παράγωγο του $\varphi(\vec{r},t)$

και από όλες τις πρώτες χωρικές μερικές παραγώγους του. Σημειώστε ότι η πυκνότητα δεν εξαρτάται από τις χωρικές μερικές παραγώγους της $\dot{\varphi}$. Δεν εξαρτάται επίσης από τις δεύτερες αλλά και από μεγαλύτερες μερικές παραγώγους της φ.

Η μεταβολή $\delta\ell$ της συναρτήσεως αυτής γράφεται

$$\delta\ell = \frac{\partial\ell}{\partial\varphi}\delta\varphi + \frac{\partial\ell}{\partial\dot{\varphi}}\delta\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right) + \sum_{i=1}^{3}\frac{\partial\ell}{\partial\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right)}\delta\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right)$$

Η αρχή της ελάχιστης δράσεως έχει τώρα την μορφή

$$\delta S = \delta\int_{t_1}^{t_2}\!\!\iiint \ell(\varphi, \dot{\varphi}, \frac{\partial\varphi}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial\varphi}{\partial x_3})d^3\vec{r}dt = 0$$

Εισάγουμε την μεταβολή δ στο ολοκλήρωμα και μετά από μία κατά παράγοντες ολοκλήρωση βρίσκουμε.

$$\delta L = \iiiint d^3\vec{r}dt\left[\frac{\partial\ell}{\partial\varphi}\delta\varphi + \frac{\partial\ell}{\partial\dot{\varphi}}\delta\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right) + \sum_{i=1}^{3}\frac{\partial\ell}{\partial\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right)}\delta\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right)\right] =$$

$$\iiiint d^3\vec{r}dt\delta\varphi\left[\frac{\partial\ell}{\partial\varphi} - \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial\ell}{\partial\dot{\varphi}} - \sum_{i=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial\ell}{\partial\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right)}\right] = 0$$

Υποθέτουμε βεβαίως και εδώ ότι η μεταβολή $\delta\varphi$ μηδενίζεται στα άκρα του χωρικού ολοκληρώματος και άρα ο επιφανειακός όρος είναι μηδέν. Στην πραγματικότητα η διαταραχή που εκφράζει το πεδίο μηδενίζεται πολύ γρήγορα στο άπειρο. Από την σχέση αυτή συνεπάγεται ότι

$$\frac{\partial\ell}{\partial\varphi} - \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial\ell}{\partial\dot{\varphi}} - \sum_{i=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial\ell}{\partial\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right)} = 0$$

που είναι η εξίσωση κινήσεως του συστήματος. Αν δεχτούμε τον χρόνο t σαν μια τέταρτη συνιστώσα x_4 τότε μπορούμε να γράψουμε την εξίσωση κινήσεως με την εξής μορφή

$$\frac{\partial\ell}{\partial\varphi} - \sum_{i=1}^{4}\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial\ell}{\partial\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right)} = 0$$

που είναι πολύ χρήσιμη για την ειδική θεωρία της σχετικότητας.

Για να απλοποιήσουμε την παραπάνω εξίσωση της κινήσεως ορίζουμε την συναρτησιακή παράγωγο της L ως προς φ από την σχέση

$$\frac{\delta L}{\delta \varphi} = \frac{\partial \ell}{\partial \varphi} - \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial \ell}{\partial \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\right)}$$

Εφαρμόζουμε τον ορισμό αυτό για την παράγωγο της L ως προς $\dot{\varphi}$. Επειδή η πυκνότητα δεν εξαρτάται από της χωρικές μερικές παραγώγους της $\dot{\varphi}$ βρίσκουμε

$$\frac{\delta L}{\delta \dot{\varphi}} = \frac{\partial \ell}{\partial \dot{\varphi}}$$

Επομένως τελικά η εξίσωση κινήσεως γίνεται

$$\frac{d}{dt} \frac{\delta L}{\delta \dot{\varphi}} - \frac{\delta L}{\delta \varphi} = 0$$

που μοιάζει με αυτή των συστημάτων με έναν βαθμό ελευθερίας. Η ορμή π_i δίνεται πάλι από την σχέση

$$\pi_i = \frac{\delta L}{\delta \dot{\varphi}_i} = \frac{\partial \ell}{\partial \dot{\varphi}_i}$$

Η συνάρτηση Λαγκράνζ είναι δυνατόν να εξαρτάται από n σε πλήθος πεδιακά μεγέθη $\varphi_i(\vec{r}, t)$. Οι εξισώσεις κινήσεως είναι τώρα

$$\frac{d}{dt} \frac{\delta L}{\delta \dot{\varphi}_i} - \frac{\delta L}{\delta \varphi_i} = 0 \qquad\qquad i = 1, 2, \cdots n$$

Οι βασικές αγκύλες Πουασόν πρέπει τώρα να τροποποιηθούν και να πάρουν την μορφή

$$\{\varphi_i(\vec{r}, t), \varphi_j(\vec{r}\,', t)\} = \{\pi_i(\vec{r}, t), \pi_j(\vec{r}\,', t)\} = 0$$

$$\{\varphi_i(\vec{r}, t), \pi_j(\vec{r}\,', t)\} = \delta(\vec{r} - \vec{r}\,')\delta_{ij}$$

όπου έχουμε το συναρτησιακό του Ντιράκ για τον συνεχή δείκτη και ο σύμβολο του Κρόνεκερ για τον αριθμήσιμο.

Μπορούμε να επεκταθούμε και στην θεωρία του Χάμιλτον για συστήματα με συνεχές σύνολο συντεταγμένων. Η συνάρτηση του Χάμιλτον ορίζεται όπως και η συνάρτηση του Λαγκράνζ τοπικά σαν ένα ολοκλήρωμα χώρου μιας κατάλληλης συναρτήσεως πυκνότητας $h(\pi_i, \varphi_i)$ που εξαρτάται από τις θέσεις και τις ορμές.

$$H(\varphi_i.\pi_i) = \iiint d^3\vec{r} h(\varphi_i, \pi_i) = \iiint d^3\vec{r} \left(\sum_i \pi_i \dot{\varphi}_i - \ell \right)$$

Οι κανονικές εξισώσεις της κινήσεως μπορούν να προκύψουν με τον ίδιο τρόπο όπως και στα διακριτά συστήματα. Δεν θα επαναλάβουμε την διαδικασία θα γράψουμε το τελικό αποτέλεσμα που είναι

$$-\dot{\pi}_i = \frac{\delta H}{\delta \varphi_i} = \frac{\partial h}{\partial \varphi_i} - \sum_j \frac{d}{dx_j} \frac{\partial h}{\partial \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} \right)} \qquad \dot{\varphi}_i = \frac{\delta H}{\delta \pi_i} = \frac{\partial h}{\partial \pi_i}$$

Ισχύει επίσης προφανώς και η ταυτότητα

$$\frac{\partial h}{\partial t} = -\frac{\partial \ell}{\partial t}$$

Τέλος παρόμοια εξίσωση με την περίπτωση των διακριτών συστημάτων ισχύει και εδώ για την χρονική εξέλιξη οποιουδήποτε μεγέθους που μπορεί να παρασταθεί από ένα ολοκλήρωμα όγκου κάποιας πυκνότητας. Για

$$G(\varphi_i.\pi_i) = \iiint g(\varphi_i.\pi_i) d^3\vec{r}$$

βρίσκουμε ότι

$$\frac{dG}{dt} = \iiint \sum_i \left(\frac{\delta G}{\delta \varphi_i} \frac{\delta H}{\delta \pi_i} - \frac{\delta G}{\delta \pi_i} \frac{\delta H}{\delta \varphi_i} \right) d^3\vec{r} + \iiint \frac{\partial g}{\partial t} d^3\vec{r}$$

Αν ορίσουμε τώρα μια νέα αγκύλη Πουασόν όπου υπάρχει άθροισμα ως προς τον διακριτό δείκτη i και ολοκλήρωμα ως προς τον συνεχή δείκτη $\vec{r}$ καταλήγουμε πάλι στην γνωστή εξίσωση

$$\frac{dG}{dt} = \{G, H\} + \frac{\partial G}{\partial t}$$

Συστήματα με άπειρους βαθμούς ελευθερίας εμφανίζονται πολύ συχνά στη φυσική όπως για παράδειγμα στην θεωρία των ρευστών και στην φυσική της στερεάς καταστάσεως. Ένα τυπικό παράδειγμα ενός συστήματος με άπειρους βαθμούς ελευθερίας είναι το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο.

6.6 Το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο

Τα πεδία $\vec{\mathrm{E}}(\vec{r},t)$ και $\vec{B}(\vec{r},t)$ προκύπτουν από ένα διανυσματικό δυναμικό $\vec{A}(\vec{r},t)$ και από ένα βαθμωτό δυναμικό $\varphi(\vec{r},t)$ από τις σχέσεις

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\vec{A} \qquad\qquad \vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A}$$

Η πυκνότητα Λαγκράνζ του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου δίνεται από την σχέση

$$\ell = \frac{1}{8\pi}\left(E^2 - B^2\right) - \rho\varphi + \frac{1}{c}\vec{j}\cdot\vec{A}$$

Η παραπάνω πυκνότητα Λαγκράνζ οδηγεί στις ακόλουθες εξισώσεις του Μάξγουελ.

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0 \qquad \vec{\nabla}\times\vec{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = 0$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = 4\pi\rho \qquad \vec{\nabla}\times\vec{B} - \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c}\vec{j}$$

Θα αποδείξουμε μόνο την πρώτη που αντιστοιχεί στην εξίσωση κινήσεως για την συντεταγμένη φ. Βρίσκουμε την παράγωγο ως προς το $\dot{\varphi}$. Η πυκνότητα δεν περιέχει παραγώγους της φ ως προς τον χρόνο και επομένως

$$\frac{d}{dt}\frac{\delta L}{\delta\dot{\varphi}} = \frac{d}{dt}\frac{\partial\ell}{\partial\dot{\varphi}} = 0$$

Το γεγονός ότι η πυκνότητα δεν περιέχει την $\dot{\varphi}$ απλουστεύει τους υπολογισμούς όμως παρουσιάζει την δυσκολία να μην υπάρχει κανονική συζυγής ορμή της φ και έτσι να μην μπορούμε να περιγράψουμε το πεδίο με την θεωρία του Χάμιλτον.

Ακολούθως βρίσκουμε την παράγωγο ως προς το φ.

$$\frac{\delta L}{\delta\varphi} = \frac{\partial\ell}{\partial\varphi} - \sum_{i=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial\ell}{\partial\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right)} = -\rho - \frac{1}{8\pi}\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial E^2}{\partial\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right)} =$$

$$-\rho - \frac{1}{4\pi}\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_i}\sum_{k=1}^{3}E_k\frac{\partial E_k}{\partial\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right)} = -\rho - \frac{1}{4\pi}\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_i}\sum_{k=1}^{3}E_k\left(-\delta_{ik}\right) =$$

$$-\rho + \frac{1}{4\pi}\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_i}E_i = -\rho + \frac{1}{4\pi}\vec{\nabla}\cdot\vec{E}$$

Η εξίσωση Λαγκράνζ δίνει προφανώς την πρώτη από τις εξισώσεις του Μάξγουελ. Βρίσκουμε

$$\frac{d}{dt}\frac{\delta L}{\delta\dot{\varphi}} - \frac{\delta L}{\delta\varphi} = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \vec{\nabla}\cdot\vec{E} = 4\pi\rho$$

Τα πεδία $\vec{A}(\vec{r},t)$ και $\varphi(\vec{r},t)$ δεν είναι μοναδικά. Αν $f(\vec{r},t)$ είναι μια οποιαδήποτε συνάρτηση των συντεταγμένων και του χρόνου τότε τα δυναμικά

$$\vec{A}\,' = \vec{A} + \vec{\nabla}f \qquad\qquad \varphi\,' = \varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial f}{\partial t}$$

παράγουν το ίδιο ηλεκτρομαγνητικό πεδίο. Οι παραπάνω μετασχηματισμοί ονομάζονται μετασχηματισμοί βαθμίδας. Πραγματικά για το ηλεκτρικό πεδίο έχουμε

$$\vec{E}\,' = -\vec{\nabla}\varphi\,' - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\vec{A}\,' = -\vec{\nabla}\left(\varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial f}{\partial t}\right) - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{A} + \vec{\nabla}f\right) =$$

$$-\vec{\nabla}\varphi + \frac{1}{c}\frac{\partial f}{\partial t}\vec{\nabla}f - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\vec{A} + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\vec{\nabla}f = \vec{E}$$

και για το μαγνητικό πεδίο

$$\vec{B}\,' = \vec{\nabla}\times\vec{A}\,' = \vec{\nabla}\times\left(\vec{A} + \vec{\nabla}f\right) = \vec{\nabla}\times\vec{A} + \vec{\nabla}\times\vec{\nabla}f = \vec{\nabla}\times\vec{A} = \vec{B}$$

Παράδειγμα: Σαν παράδειγμα θα βρούμε της συνάρτηση βαθμίδας $f(\vec{r},t)$ τέτοια ώστε τα νέα πεδία να ικανοποιούν τις σχέσεις

$$\varphi\,'(\vec{r},t) = 0 \qquad\qquad \vec{\nabla}\cdot\vec{A}\,'(\vec{r},t) = 0$$

Η τελευταία σχέση ονομάζεται συνθήκη του Λόρεντς.

Για να ισχύει η σχέση $\varphi'(\vec{r},t)=0$ πρέπει

$$\varphi' = \varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial f}{\partial t} = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad f = c\int \varphi dt + F(\vec{r})$$

όπου $F(\vec{r})$ μια συνάρτηση μόνο της θέσεως που θα προσδιοριστεί από την δεύτερη εξίσωση. Για να ισχύει η δεύτερη πρέπει

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{A}' = \vec{\nabla}\cdot\left(\vec{A}+\vec{\nabla}f\right) = \vec{\nabla}\cdot\vec{A} + \vec{\nabla}^2\left(c\int\varphi dt + F(\vec{r})\right) = 0 \qquad \Longrightarrow$$

$$\vec{\nabla}^2 F(\vec{r}) = -\vec{\nabla}\cdot\vec{A} - c\int \vec{\nabla}^2\varphi dt$$

Επομένως η συνάρτηση $F(\vec{r})$ είναι λύση της παραπάνω εξισώσεως. Το δεύτερο σκέλος της εξισώσεως είναι ανεξάρτητο του χρόνου και η εξίσωση είναι τύπου Πουασόν της μορφής

$$\vec{\nabla}^2 F(\vec{r}) = \rho(\vec{r})$$

Εφαρμογή: Σαν μια εφαρμογή της θεωρίας των συνεχών συστημάτων θα βρούμε την εξίσωση κινήσεως του δυναμικού $\vec{A}(\vec{r},t)$.

Θεωρούμε το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο στο κενό (ο χώρος δεν περιέχει φορτία) με μηδενικό βαθμωτό δυναμικό $\varphi=0$ και διανυσματικό δυναμικό με απόκλιση μηδέν $\vec{\nabla}\cdot\vec{A}=0$.

Η συνάρτηση Λαγκράνζ του πεδίου των δυναμικών αυτών γίνεται

$$L(\vec{A},\dot{\vec{A}}) = \frac{1}{2}\iiint d^3\vec{r}\left(\frac{1}{c^2}\dot{A}^2 - (\vec{\nabla}\times\vec{A})^2\right)$$

Η συνάρτηση πυκνότητας του Λαγκράνζ είναι αναλυτικά

$$\ell = \frac{1}{2}\frac{1}{c^2}\dot{A}^2 - \frac{1}{2}(\vec{\nabla}\times\vec{A})^2 =$$

$$\frac{1}{2}\frac{1}{c^2}\dot{A}^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial A_3}{\partial x_2}-\frac{\partial A_2}{\partial x_3}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial A_1}{\partial x_3}-\frac{\partial A_3}{\partial x_1}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial A_2}{\partial x_1}-\frac{\partial A_1}{\partial x_2}\right)^2$$

Θα βρούμε τώρα την εξίσωση κινήσεως για το πεδίο $\vec{A}_1(\vec{r},t)$. Βρίσκουμε την παράγωγο ως προς $\dot{A}_1$.

$$\frac{\delta L}{\delta \dot{A}_1} = \frac{\partial \ell}{\partial \dot{A}_1} = \frac{\partial}{\partial \dot{A}_1}\frac{1}{2}\dot{A}^2 = \dot{A}_1$$

Βρίσκουμε ακολούθως την παράγωγο ως προς A_1. Παραλείπουμε τους όρους $\partial\ell/\partial A_1$ και $\partial\ell/\partial\left(\frac{\partial A_1}{\partial x_1}\right)$ που είναι μηδέν.

$$\frac{\delta L}{\delta A_1} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_2}\frac{\partial}{\frac{\partial A_1}{\partial x_2}}\left(\frac{\partial A_2}{\partial x_1} - \frac{\partial A_1}{\partial x_2}\right)^2 + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_3}\frac{\partial}{\frac{\partial A_1}{\partial x_3}}\left(\frac{\partial A_1}{\partial x_3} - \frac{\partial A_3}{\partial x_1}\right)^2 =$$

$$-\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial A_2}{\partial x_1} - \frac{\partial A_1}{\partial x_2}\right) + \frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{\partial A_1}{\partial x_3} - \frac{\partial A_3}{\partial x_1}\right) = -\frac{\partial^2 A_2}{\partial x_2 x_1} + \frac{\partial^2 A_1}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 A_1}{\partial x_3^2} -$$

$$\frac{\partial^2 A_3}{\partial x_3 \partial x_1} = \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}\right)A_1 - \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial A_1}{\partial x_1} + \frac{\partial A_2}{\partial x_2} + \frac{\partial A_3}{\partial x_3}\right) \quad \Longrightarrow$$

$$\frac{\delta L}{\delta A_1} = \vec{\nabla}^2 A_1 - \frac{\partial}{\partial x_1}\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = \vec{\nabla}^2 A_1$$

Ο όρος $\vec{\nabla}\cdot\vec{A}$ είναι μηδέν λόγω της συνθήκης Λόρεντς που δεχτήκαμε για το διανυσματικό δυναμικό. Γράφουμε τέλος την εξίσωση κινήσεως του Λαγκράνζ για το πεδίο $A_1(\vec{r},t)$

$$\frac{d}{dt}\frac{\delta L}{\delta \dot{A}_1} - \frac{\delta L}{\delta A_1} = \left(\vec{\nabla}^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\vec{A}_1 = 0$$

Η εξίσωση είναι η γνωστή κυματική εξίσωση.

Παρόμοιες σχέσεις ισχύουν προφανώς και για τα άλλα δύο πεδία $A_2(\vec{r},t)$ και $A_3(\vec{r},t)$. Γράφουμε και τις τρεις αυτές εξισώσεις με την μορφή

$$\left(\vec{\nabla}^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\vec{A} = 0$$

Η λύση της κυματικής εξισώσεως έχει την μορφή επιπέδου κύματος

$$\vec{A} = \vec{A}_0 e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)}$$

όπου $\vec{A}_0$ είναι ένα σταθερό διάνυσμα. Ο παράγοντας που φαίνεται πολλαπλασιασμένος με το i στο εκθετικό ονομάζεται φάση του κύματος.

Οι ισοφασικές επιφάνειες του κύματος αυτού ικανοποιούν την σχέση

$$\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t = k_1x_1 + k_2x_2 + k_3x_3 - \omega t = c$$

είναι δηλαδή επίπεδα και αυτό δικαιολογεί την ονομασία τους. Το διάνυσμα

$$\vec{k} = \frac{\omega}{c}\vec{n}$$

όπου $\vec{n}$ το μοναδιαίο διάνυσμα είναι κάθετο στο επίπεδο αυτό, ονομάζεται κυματάνυσμα και έχει την διεύθυνση που διαδίδεται το κύμα.

Εισάγουμε την λύση στην διαφορική εξίσωση και βρίσκουμε

$$\left(\vec{\nabla}^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)} = \left(k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 - \frac{1}{c^2}\omega^2\right)e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)} = 0 \qquad \Longrightarrow$$

$$k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 - \frac{1}{c^2}\omega^2 = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \omega = c|\vec{k}| = ck$$

Το διάνυσμα $\vec{A}(\vec{r}, t)$ πρέπει να ικανοποιεί επίσης και την συνθήκη του Λόρεντς δηλαδή πρέπει

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{A}_0e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)} = \vec{A}_0\cdot\vec{k}e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)} = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \vec{A}_0\cdot\vec{k} = 0$$

Το διάνυσμα $\vec{A}_0$ και επομένως και το πεδίο $\vec{A}(\vec{r}, t)$ βρίσκεται σε ένα επίπεδο κάθετο στο διάνυσμα $\vec{k}$ την διεύθυνση δηλαδή που διαδίδεται το κύμα.

Μπορούμε τώρα να βρούμε τις εντάσεις $\vec{E}$ και $\vec{B}$ του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου.

$$\vec{E} = -\frac{1}{c}\dot{\vec{A}} = ik\vec{A} \qquad\qquad \vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A} = i\vec{k}\times\vec{A}$$

Το ηλεκτρικό πεδίο $\vec{E}$ έχει την διεύθυνση του διανυσματικού δυναμικού $\vec{A}$ ενώ το μαγνητικό πεδίο $\vec{B}$ είναι κάθετο προς το $\vec{A}$ και επομένως κάθετο και στο ηλεκτρικό πεδίο.

Συμβολίζουμε με $\vec{e}_{k,1}$ και $\vec{e}_{k,2}$ τα δύο μοναδιαία διανύσματα που είναι κάθετα μεταξύ τους και κάθετα στο $\vec{k}$.

Η γενική λύση της διαφορικές εξισώσεως του κύματος είναι

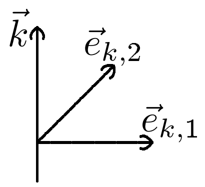
$$\vec{A}(\vec{r},t) = \sum_{\vec{k}} \sum_{s=1}^{2} a_{k,s}\vec{e}_{k,s}e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega_k t)} + a^*_{k,s}\vec{e}_{k,s}e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega_k t)} \qquad \omega_k = ck$$

Οι συντελεστές $a_{k,s}$ και $a^*_{k,s}$ έχουν επιλεγεί συζυγείς μιγαδικοί αριθμοί έτσι ώστε η λύση να είναι πραγματική. Το άθροισμα ως προς $\vec{k}$ γίνεται πάνω σε όλες τις δυνατές τιμές του $\vec{k}$. Αν για παράδειγμα θεωρήσουμε ότι το κύμα βρίσκεται σε ένα παραλληλεπίπεδο με πλευρές A, B, Γ τότε η δυνατές τιμές του $\vec{k}$ έχουν συνιστώσες

$$k_1 = \frac{2\pi n_1}{A} \qquad k_2 = \frac{2\pi n_2}{B} \qquad k_3 = \frac{2\pi n_3}{\Gamma}$$

όπου τα n_1, n_2 και n_3 είναι θετικοί και αρνητικοί ακέραιοι αριθμοί.

Αν το $\vec{k}$ παίρνει συνεχείς τιμές τότε το άθροισμα πρέπει να αντικατασταθεί με ένα τριπλό ολοκλήρωμα.



Σχήμα 6.3
Οι δύο διευθύνσεις $\vec{e}_{k,s}$ που είναι πολωμένο το πεδίο

Μέσα στα πολλά ονόματα που αναφέρθηκαν στο κεφάλαιο αυτό θα ήταν παράλειψη αν δεν αναφέραμε και το όνομα του δικού μας Καραθεοδωρή που υπήρξε ένας από τους πιο σημαντικούς μαθηματικούς του αιώνα μας. Στο σύγγραμμα του Variationsrechnung μπορεί να βρει κανείς πλούσιο υλικό για τους κανονικούς μετασχηματισμούς. Η συμβολή του περιλαμβάνει μια θεωρία για τις μη συνεχείς λύσεις στον λογισμό των μεταβολών. Διατύπωσε επίσης κάποιες σχέσεις των διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξεως με τον λογισμό των μεταβολών. Εργάστηκε τέλος και σε προβλήματα μεταβολών $m-$ διάστατων επιφανειών σε $n-$ διάστατους χώρους.

Ο Κωνσταντίνος Καραθεοδωρής εργάστηκε όχι μόνο στον λογισμό των μεταβολών αλλά και στην θεωρία των συναρτήσεων πολλών μεταβλητών και στην θεωρία του μέτρου. Σημαντικότατη υπήρξε επίσης η συμβολή του στην θερμοδυναμική και στην ειδική θεωρία της σχετικότητας.

Ασκήσεις

Άσκηση 6.1

Αν $q(t)$ είναι μια συνάρτηση του t τότε να αποδειχτούν οι σχέσεις

$$\delta(dq) = d(\delta q) \qquad \delta(\frac{dq}{dt}) = \frac{d}{dt}(\delta q)$$

Τις σχέσεις αυτές τις χρησιμοποιήσαμε για την απόδειξη των συναρτήσεων του Λαγκράνζ και του Χάμιλτον. Να υπολογίσετε την μεταβολή του ολοκληρώματος της δράσεως

$$\delta S = \int_{t_2}^{t_1} L(q, \dot{q}, t) dt$$

Λύση: Θεωρούμε μια συνάρτηση $q(t)$ και μια άλλη συνάρτηση $\bar{q}(t)$ που διαφέρει ελάχιστα από την $q(t)$. Συμβολίζουμε την διαφορά των δύο αυτών συναρτήσεων με δq. Μπορούμε δηλαδή να γράψουμε

$$\delta q = \bar{q}(t) - q(t) = \varepsilon\eta(t)$$

όπου ε είναι μια παράμετρος που την θεωρούμε απειροστή. Δηλαδή αν σε κάποια σχέση υπάρχει όρος με τον ε^2 τον μηδενίζουμε. Η συνάρτηση $\eta(t)$ είναι μια πεπερασμένη συνάρτηση που όμως θεωρούμε ότι μπορεί να την εκλέξουμε αυθαίρετα.

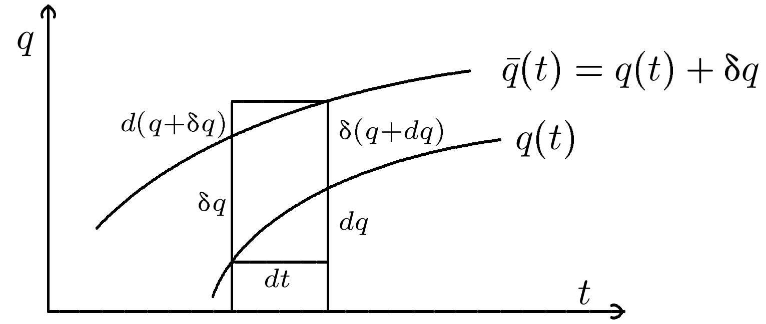
Πρέπει να κάνουμε σαφή διάκριση της διαφοράς δq από το διαφορικό dq που ορίζεται βεβαίως από την σχέση

$$dq = q(t + dt) - q(t)$$

Η μεταβολή δq είναι βεβαίως μια συνάρτηση του χρόνου που μπορούμε να την διαφορίσουμε ή και να την παραγωγίσουμε ως προς τον χρόνο.

Διαφορίζουμε την μεταβολή δq και βρίσκουμε

$$d(\delta q) = d\bar{q} - dq = \varepsilon \frac{d\eta(t)}{dt} dt = \left(\frac{d\bar{q}}{dt} - \frac{dq}{dt} \right) dt = \delta \frac{dq}{dt} dt = \delta(dq)$$



Σχήμα 6.4
Γεωμετρική απόδειξη της σχέσεως $d(\delta q) = \delta(dq)$

Η απόδειξη της σχέσεως φαίνεται και στο σχήμα όπου σαφώς φαίνεται ότι ισχύει

$$d(q + \delta q) + \delta q = \delta(q + dq) + dq \qquad \Longrightarrow \qquad \delta(dq) = d(\delta q)$$

Αν έχουμε τώρα μια συνάρτηση $L(q_1, q_2, \cdots)$ τότε η μεταβολή της συναρτήσεως αυτής δίνεται από την σχέση

$$\delta L = \frac{\partial L}{\partial q_1} \delta q_1 + \frac{\partial L}{\partial q_2} \delta q_2 + \cdots$$

Θα βρούμε ακολούθως την μεταβολή του ολοκληρώματος της δράσεως. Βρίσκουμε

$$\delta S = \delta \int_{t_2}^{t_1} L(q, \dot{q}, t) dt = \int_{t_2}^{t_1} \left(\frac{\partial L}{\partial q} \delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta \dot{q} \right) dt =$$

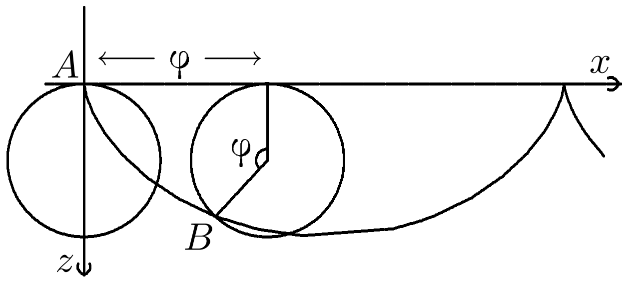
$$\int_{t_2}^{t_1} \left(\frac{\partial L}{\partial q} \delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \frac{d}{dt} \delta q \right) dt = \int_{t_2}^{t_1} \left(\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) dt \delta q + \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta q \right)_{t_2}^{t_1}$$

όπου για την τελευταία ισότητα έγινε μια κατά παράγοντες ολοκλήρωση.

Άσκηση 6.2

Ένα σωμάτιο γλιστράει χωρίς τριβές σε ένα τόξο που συνδέει ένα σημείο Α με ένα σημείο Β που βρίσκεται πιο κάτω από το Α και στο ίδιο κατακόρυφο επίπεδο. Το σωμάτιο ξεκινάει από το Α χωρίς αρχική ταχύτητα υπό την επίδραση της βαρύτητας. Ποιο πρέπει να είναι το σχήμα της τροχιάς ώστε να φθάσει στο συντομότερο δυνατό χρόνο στο Β. Να βρεθεί ο χρόνος που το σωμάτιο θα φθάσει στο κάτω μέρος της τροχιάς. Να αποδειχτεί ότι ο χρόνος αυτός είναι ανεξάρτητος από το σημείο που ξεκινάει το σωμάτιο.

Το πρόβλημα έχει ιστορική αξία. Έχει μελετηθεί από τον Ι. Μπερνούλι και η τροχιά ονομάστηκε βραχυστόχρονη (brachistochrone).



Σχήμα 6.5
Η κυκλοειδής καμπύλη

Λύση: Θεωρούμε ένα σύστημα αξόνων στο κατακόρυφο επίπεδο που περιέχει τα σημεία Α και Β τέτοιο ώστε το σημείο Α να βρίσκεται στην αρχή (0,0) και το σημείο Β στο σημείο με συντεταγμένες x_B, z_B. Η ταχύτητα του σωματίου σε μια θέση που απέχει απόσταση ίση με z κάτω από τον άξονα του x βρίσκεται από την σχέση

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = mgz \qquad \Longrightarrow \qquad v = \sqrt{2gz}$$

δεδομένου ότι η αρχική ταχύτητα v_0 είναι μηδέν. Η ταχύτητα όμως πάνω στο τόξο AB δίνεται από την σχέση

$$v = \frac{ds}{dt} \qquad \Longrightarrow \qquad t = \int_B^A \frac{ds}{v}$$

όπου s το μήκος του τόξου και το μήκος του τόξου δίνεται από την σχέση

$$ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2}$$

Επομένως τελικά βρίσκουμε

$$t = \int_{x_B}^{0} \sqrt{\frac{1 + (dz/dx)^2}{2gz}} dx$$

Γράφουμε το παραπάνω ολοκλήρωμα με την μορφή

$$t(z, z\,') = \int_{x_B}^{0} L(z, z\,')dx \qquad\qquad L(z, z\,') = \sqrt{\frac{1 + (dz/dx)^2}{2gz}}$$

Το πρόβλημα είναι να βρούμε το ελάχιστο της παραστάσεως αυτής. Βρίσκουμε από το προηγούμενο πρόβλημα.

$$\delta \int_{x_B}^{0} L(z, z\,')dx = \int_{x_B}^{0} dxdz \left(\frac{\partial L}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial L}{\partial z\,'}\right) = 0 \quad \Longrightarrow$$

$$\frac{\partial L}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial L}{\partial z\,'} = 0$$

που είναι η διαφορική εξίσωση της τροχιάς.

Δεν θα γράψουμε αναλυτικά την παραπάνω διαφορική εξίσωση. Παρατηρούμε ότι επειδή η συνάρτηση $L(z, z\,')$ εξαρτάται από τα z και $z\,'$ έχουμε

$$\frac{d}{dx}\left(L - z\,'\frac{\partial L}{\partial z\,'}\right) = \frac{d}{dx}L - z\,''\frac{\partial L}{\partial z\,'} - z\,'\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial L}{\partial z\,'} = \left(z\,'\frac{\partial}{\partial z} + z\,''\frac{\partial}{\partial z\,'}\right)L -$$

$$-z\,''\frac{\partial L}{\partial z\,'} - z\,'\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial L}{\partial z\,'} = z\,'\frac{\partial L}{\partial z} + z\,''\frac{\partial L}{\partial z\,'} - z\,''\frac{\partial L}{\partial z\,'} - z\,'\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial L}{\partial z\,'} =$$

$$z\,'\frac{\partial L}{\partial z} - z\,'\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial L}{\partial z\,'} = z\,'\left(\frac{\partial L}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial L}{\partial z\,'}\right) = 0$$

Η τελευταία ισχύει λόγω της διαφορικής εξισώσεως που θέλουμε να λύσουμε. Από την εξίσωση αυτή βρίσκουμε ένα πρώτο ολοκλήρωμα

$$\frac{d}{dx}\left(L - z'\frac{\partial L}{\partial z'}\right) = 0 \quad \Longrightarrow \quad L - z'\frac{\partial L}{\partial z'} = C_1$$

όπου C_1 μια σταθερά. Βρίσκουμε όμως

$$L - z'\frac{\partial L}{\partial z'} = \frac{1}{\sqrt{2gz}}\left(\sqrt{1+z'^2} - \frac{z'^2}{\sqrt{1+z'^2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2gz}}\frac{1+z'^2-z'^2}{\sqrt{1+z'^2}} =$$

$$\frac{1}{\sqrt{2gz}\sqrt{1+z'^2}} = C_1 \qquad \Longrightarrow \qquad z\left(1+z'^2\right) = C_2$$

Για να λύσουμε την παραπάνω διαφορική εξίσωση εισάγουμε την παράμετρο θ και θέτουμε

$$z' = \text{σφ}\,\theta \qquad \Longrightarrow \qquad 1 + z'^2 = \frac{1}{\text{ημ}^2\theta} = \frac{2}{1-\text{συν}\,2\theta}$$

και από την διαφορική εξίσωση συνεπάγεται ότι

$$z = \frac{C_2}{2}(1 - \text{συν}\,2\theta)$$

Παρατηρούμε ότι για $\theta = 0$ συνεπάγεται ότι $z = 0$ και άρα το σημείο $(0,0)$ είναι η κορυφή ($\theta = 0$) της καμπύλης. Αν δεν είχαμε θεωρήσει την αρχική ταχύτητα v_0 μηδενική τότε από την πρώτη εξίσωση της ασκήσεως θα είχαμε

$$v = \sqrt{2gz + v_0^2}$$

και η κορυφή ($\theta = 0$) της καμπύλης θα βρισκόταν ψηλότερα από το $(0,0)$ σε απόσταση ίση με $v_0^2/2g$ από το σημείο αυτό.

Θεωρούμε τώρα το x σαν συνάρτηση του z και έχουμε ότι

$$\frac{dx}{d\theta} = \frac{dx}{dz}\frac{dz}{d\theta} = \frac{1}{z'}\frac{dz}{d\theta} = \frac{1}{\text{σφ}\,\theta}C_2\,\text{ημ}\,2\theta = C_2\frac{\text{ημ}\,\theta}{\text{συν}\,\theta}2\,\text{ημ}\,\theta\,\text{συν}\,\theta =$$

$$2C_2\,\text{ημ}\,\theta\,\text{ημ}\,\theta = C_2(1-\text{συν}\,2\theta) \qquad \Longrightarrow \qquad x = C_2\theta - \frac{C_2}{2}\,\text{ημ}\,2\theta + C_3$$

Για $\theta = 0$ έχουμε $x = z = 0$ και άρα φαίνεται εύκολα ότι η νέα σταθερά C_3 είναι μηδέν.

Την τελική λύση θα την απλοποιήσουμε λίγο ακόμα θέτοντας $C_2/2 = C$ και $2\theta = \varphi$ και έχουμε

$$x = C(\varphi - \eta\mu\,\varphi) \qquad\qquad z = C(1 - \sigma\upsilon\nu\,\varphi)$$

Οι εξισώσεις αυτές είναι οι παραμετρικές εξισώσεις της κυκλοειδούς. Μια καμπύλη δηλαδή που διαγράφεται από ένα σημείο της περιφέρειας ενός τροχού που κυλιέται στον $x-$άξονα. Η σταθερά C υπολογίζεται από την συνθήκη η καμπύλη να διέρχεται και από το σημείο Β.

Ο χρόνος δίνεται από το ολοκλήρωμα

$$t = \int_0^{\pi} \sqrt{\frac{(dx/d\varphi)^2 + (dz/d\varphi)^2}{2gz}}d\varphi = \int_0^{\pi} \sqrt{\frac{c^2(1 - \sigma\upsilon\nu\,\varphi)^2 + c^2\,\eta\mu^2\,\varphi}{2gc(1 - \sigma\upsilon\nu\,\varphi)}}d\varphi =$$

$$\int_0^{\pi} \sqrt{\frac{2c^2(1 - \sigma\upsilon\nu\,\varphi)}{2gc(1 - \sigma\upsilon\nu\,\varphi)}}d\varphi = \sqrt{\frac{c}{g}}\int_0^{\pi} d\varphi = \pi\sqrt{\frac{c}{g}}$$

Θα βρούμε τώρα τον χρόνο που θα κάνει το κινητό να φθάσει στο κατώτερο σημείο της τροχιάς ($\varphi = \pi$) όταν αφεθεί από σημείο όπου $\varphi = \varphi_0$ χωρίς αρχική ταχύτητα. Στο σημείο αυτό η κινητική ενέργεια είναι μηδέν διότι $v_0 = 0$. Βρίσκουμε

$$\frac{1}{2}mv_0^2 + mgz(\varphi_0) = \frac{1}{2}mv^2 + mgz(\varphi) \quad \Longrightarrow \quad v = \sqrt{gc(\sigma\upsilon\nu\,\varphi_0 - \sigma\upsilon\nu\,\varphi)}$$

Επομένως ο ζητούμενος χρόνος δίνεται από το ολοκλήρωμα

$$t = \sqrt{\frac{c}{g}}\int_{\varphi_0}^{\pi} \sqrt{\frac{1 - \sigma\upsilon\nu\,\varphi}{\sigma\upsilon\nu\,\varphi_0 - \sigma\upsilon\nu\,\varphi}}d\varphi$$

Για τον υπολογισμό του ολοκληρώματος θα γράφουμε τα συνημίτονα συναρτήσει του τόξου $\varphi/2$. Οι τύποι είναι

$$\sigma\upsilon\nu\,\varphi = 1 - 2\,\eta\mu\,\frac{\varphi}{2} \qquad\qquad \sigma\upsilon\nu\,\varphi = 2\,\sigma\upsilon\nu\,\frac{\varphi}{2} - 1 \qquad \sigma\upsilon\nu\,\varphi_0 = 2\,\sigma\upsilon\nu\,\frac{\varphi_0}{2} - 1$$

Χρησιμοποιούμε τον πρώτο τύπο για τον αριθμητή και τους υπόλοιπους για τον παρονομαστή. Το ολοκλήρωμα γίνεται

$$t = \sqrt{\frac{c}{g}} \int_{\varphi_0}^{\pi} \frac{\text{ημ}\,\frac{\varphi}{2}\; d\varphi}{\sqrt{\text{συν}^2\,\frac{\varphi_0}{2} - \text{συν}^2\,\frac{\varphi}{2}}}$$

Κάνουμε τώρα την αντικατάσταση

$$\text{συν}\,\frac{\varphi_0}{2} = a \qquad\qquad \text{συν}\,\frac{\varphi}{2} = x \implies -\frac{1}{2}\,\text{ημ}\,\frac{\varphi}{2} d\varphi = dx$$

και η υπό ολοκλήρωση συνάρτηση γίνεται

$$\frac{-2dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$$

Το ολοκλήρωμα της οποίας ως γνωστό είναι το τοξσυν $\frac{x}{a}$.

Κατά συνέπεια βρίσκουμε

$$t = \sqrt{\frac{c}{g}} \int_{\varphi_0}^{\pi} \frac{2d\left(\text{συν}\,\frac{\varphi}{2}\right)}{\sqrt{\text{συν}^2\,\frac{\varphi_0}{2} - \text{συν}^2\,\frac{\varphi}{2}}} = 2\sqrt{\frac{c}{g}} \left[\text{τοξσυν}\left(\frac{\text{συν}\,\frac{\varphi}{2}}{\text{συν}\,\frac{\varphi_0}{2}}\right)\right]_{\varphi_0}^{\pi} =$$

$$2\sqrt{\frac{c}{g}}\,\text{τοξσυν}\,0 - 2\sqrt{\frac{c}{g}}\,\text{τοξσυν}\,1 = \pi\sqrt{\frac{c}{g}}$$

Αποδείξαμε επομένως ότι ο χρόνος που θα φθάσει το σωμάτιο στο κάτω μέρος της τροχιάς είναι πάντα ίσος με $\pi\sqrt{c/g}$ ανεξάρτητα από το σημείο φ_0 που ξεκίνησε.

Άσκηση 6.3

Να αποδειχτούν οι σχέσεις

α) $\{fh, g\} = f\{h, g\} + \{f, g\}h$ β) $\dfrac{d}{dt}\{f, g\} = \left\{\dfrac{df}{dt}, g\right\} + \left\{f, \dfrac{dg}{dt}\right\}$

Λύση: α) Από τον ορισμό της αγκύλης Πουασόν έχουμε

$$\{fh, g\} = \frac{\partial(fh)}{\partial q_k}\frac{\partial g}{\partial p_k} - \frac{\partial(fh)}{\partial p_k}\frac{\partial g}{\partial p_k} = f\frac{\partial h}{\partial q_k}\frac{\partial g}{\partial p_k} +$$

$$+h\frac{\partial f}{\partial q_k}\frac{\partial g}{\partial p_k} - f\frac{\partial h}{\partial p_k}\frac{\partial g}{\partial p_k} - h\frac{\partial f}{\partial p_k}\frac{\partial g}{\partial p_k} = f\left(\frac{\partial h}{\partial q_k}\frac{\partial g}{\partial p_k} - \frac{\partial h}{\partial p_k}\frac{\partial g}{\partial p_k}\right) +$$

$$+h\left(\frac{\partial f}{\partial q_k}\frac{\partial g}{\partial p_k} - \frac{\partial f}{\partial p_k}\frac{\partial g}{\partial p_k}\right) = f\{h,g\} + \{f,g\}h$$

Για να αποδείξουμε το β) ερώτημα θα χρησιμοποιήσουμε την σχέση

$$\frac{\partial}{\partial t}\{f,g\} = \left\{\frac{\partial f}{\partial t}, g\right\} + \left\{f, \frac{\partial g}{\partial t}\right\} \tag{1}$$

που είναι πολύ εύκολο να αποδειχτεί.

Η εξίσωση κινήσεως για το μέγεθος $\{f,g\}$ είναι

$$\frac{d}{dt}\{f,g\} = \frac{\partial}{\partial t}\{f,g\} + \{H,\{f,g\}\}$$

Ο πρώτος όρος του δεξιού μέλους της παραπάνω ισότητας μπορεί να αναλυθεί από την εξίσωση (1), ενώ για τον δεύτερο θα χρησιμοποιήσουμε την ταυτότητα Τζακόμπι. Έχουμε

$$\frac{d}{dt}\{f,g\} = \left\{\frac{\partial f}{\partial t}, g\right\} + \left\{f, \frac{\partial g}{\partial t}\right\} - \{f,\{g,H\}\} - \{g,\{H,f\}\} =$$

$$\left\{\frac{\partial f}{\partial t} + \{H,f\}, g\right\} + \left\{f, \frac{\partial g}{\partial t} + \{H,g\}\right\} = \left\{\frac{df}{dt}, g\right\} + \left\{f, \frac{dg}{dt}\right\}$$

Αν τα μεγέθη f και g είναι σταθερές της κινήσεως τότε

$$\frac{df}{dt} = 0 \qquad \text{και} \qquad \frac{dg}{dt} = 0$$

Από την παραπάνω σχέση συνεπάγεται ότι

$$\frac{d}{dt}\{f,g\} = 0$$

και επομένως και η αγκύλη Πουασόν των μεγεθών αυτών είναι επίσης μία σταθερά της κινήσεως. Η πρόταση αυτή είναι γνωστή σαν θεώρημα Πουασόν.

Υπενθυμίζουμε ότι οι σταθερές ή ολοκληρώματα της κινήσεως είναι συνολικά $2s-1$ σε πλήθος όπου s ο βαθμός ελευθερίας του συστήματος.

Άσκηση 6.4

Να βρεθούν οι αγκύλες Πουασόν α) των συνιστωσών της στροφορμής β) των συνιστωσών της στροφορμής με τις συνιστώσες της ορμής και τέλος γ) των συνιστωσών της στροφορμής με τις γενικευμένες θέσεις.

Λύση: Η στροφορμή ενός συστήματος ορίζεται από το εξωτερικό γινόμενο

$$\vec{L} = \vec{q} \times \vec{p}$$

και έχει συνιστώσες

$$L_1 = q_2p_3 - q_3p_2 \qquad L_2 = q_3p_1 - q_1p_3 \qquad L_2 = q_1p_2 - q_2p_1$$

Και οι τρεις αυτές σχέσεις μπορούν να γραφτούν σαν μία με την βοήθεια του τανυστή ε_{jkm}. Έχουμε

$$L_m = \varepsilon_{jkm} q_j p_k$$

όπου εννοείται φυσικά ότι υπάρχει άθροισμα στο δεύτερο σκέλος της ισότητας ως προς j και k. Όλοι οι δείκτες μπορούν να πάρουν τις τιμές $1, 2, 3$.

α) Θα αποδείξουμε ότι η αγκύλες Πουασόν των συνιστωσών της στροφορμής είναι

$$\{L_j, L_k\} = \varepsilon_{jkm} L_m$$

Από τις 9 αυτές σχέσεις θα αποδείξουμε τις παρακάτω τρεις σχέσεις

$$\{L_1, L_2\} = L_3 \qquad \{L_2, L_3\} = L_1 \qquad \{L_3, L_1\} = L_2$$

Οι υπόλοιπες ή είναι προφανείς ή προκύπτουν εύκολα από αυτές τις τρεις παραπάνω σχέσεις. Έχουμε

$$\{L_1, L_2\} = \sum_{k=1}^{3} \left(\frac{\partial L_1}{\partial q_k} \frac{\partial L_2}{\partial p_k} - \frac{\partial L_1}{\partial p_k} \frac{\partial L_2}{\partial q_k} \right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{3} \left(\frac{\partial (q_2p_3 - q_3p_2)}{\partial q_k} \frac{\partial (q_3p_1 - q_1p_3)}{\partial p_k} - \frac{\partial (q_2p_3 - q_3p_2)}{\partial p_k} \frac{\partial (q_3p_1 - q_1p_3)}{\partial q_k} \right) =$$

$$= \frac{\partial (q_2p_3 - q_3p_2)}{\partial q_3} \frac{\partial (q_3p_1 - q_1p_3)}{\partial p_3} - \frac{\partial (q_2p_3 - q_3p_2)}{\partial p_3} \frac{\partial (q_3p_1 - q_1p_3)}{\partial q_3} =$$

$$= -p_2(-q_1) - q_2p_1 = q_1p_2 - q_2p_1 = L_3$$

Οι υπόλοιπες δύο σχέσεις αποδεικνύονται ομοίως με κυκλική εναλλαγή των δεικτών.

β) Οι σχέσεις που θα αποδείξουμε στην περίπτωση αυτή είναι

$$\{L_j, p_k\} = \varepsilon_{jkm} p_m$$

Από τις 9 αυτές σχέσεις τα αποδείξουμε ενδεικτικά μόνο την

$$\{L_1, p_2\} = p_3$$

Αναλύουμε την αγκύλη Πουασόν. Από τον ορισμό εχουμε

$$\{L_1, p_2\} = \sum_{k=1}^{3} \left(\frac{\partial L_1}{\partial q_k} \frac{\partial p_2}{\partial p_k} - \frac{\partial L_1}{\partial p_k} \frac{\partial p_2}{\partial q_k} \right) = \sum_{k=1}^{3} \left(\frac{\partial (q_2p_3 - q_3p_2)}{\partial q_k} \frac{\partial p_2}{\partial p_k} \right) =$$

$$= \frac{\partial (q_2p_3 - q_3p_2)}{\partial q_2} \frac{\partial p_2}{\partial p_2} = p_3$$

γ) Σε αυτή την περίπτωση οι σχέσεις που πρέπει να αποδείξουμε είναι

$$\{L_j, q_l\} = \varepsilon_{jlm} q_m$$

Θα αποδείξουμε μόνο την σχέση

$$[L_1, q_2] = q_3$$

΄Εχουμε

$$\{L_1, q_2\} = \sum_{n=1}^{3} \left(\frac{\partial L_1}{\partial q_n} \frac{\partial q_2}{\partial p_n} - \frac{\partial L_1}{\partial p_n} \frac{\partial q_2}{\partial q_n} \right) = -\frac{\partial L_1}{\partial p_2} =$$

$$= -\frac{\partial (q_2p_3 - q_3p_2)}{\partial p_2} = q_3$$

Άσκηση 6.5

Να βρεθούν οι κανονικές εξισώσεις της κινήσεως για ένα σύστημα που κινείται σε μία διάσταση και περιγράφεται από την χαμιλτονιανή

$$\mathrm{H}(p,q) = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 q^2$$

Λύση: Το σύστημα είναι ένας αρμονικός ταλαντωτής. Οι εξισώσεις του Χάμιλτον δίνουν

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{\partial}{\partial p}\frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 q^2 = \frac{p}{m}$$

και

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} = -\frac{\partial}{\partial q}\frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 q^2 = -m\omega^2 q$$

Παραγωγίζουμε την πρώτη ως προς τον χρόνο και αντικαθιστούμε το $\dot{p}$ από την δεύτερη. Βρίσκουμε

$$\ddot{q} + \omega^2 q = 0$$

Παρόμοια εξίσωση βρίσκουμε και για την ορμή του συστήματος

$$\ddot{p} + \omega^2 p = 0$$

Και οι δύο εξισώσεις έχουν λύσεις της μορφής

$$q(t) = c_1 \,\text{συν}\, \omega t + c_2 \,\text{ημ}\, \omega t \qquad q(t) = d_1 \,\text{συν}\, \omega t + d_2 \,\text{ημ}\, \omega t$$

Οι σταθερές μπορούν να προσδιοριστούν από τις αρχικές συνθήκες του προβλήματος. Αν δεχτούμε τις ακόλουθες αρχικές συνθήκες

$$q(t)|_{t=0} = q_0 \qquad p(t)|_{t=0} = p_0$$

τότε η λύση των εξισώσεων της κινήσεως που ικανοποιούν και τις αρχικές συνθήκες είναι

$$q(t) = q_0 \,\text{συν}\, \omega t + \frac{p_0}{m\omega} \,\text{ημ}\, \omega t \qquad p(t) = p_0 \,\text{συν}\, \omega t - q_0 m\omega \,\text{ημ}\, \omega t$$

Παρατηρούμε ότι η Χαμιλτονιανή δεν μεταβάλετε με τον χρόνο

$$\mathrm{H}(p,q,t)=\frac{1}{2m}p^2(t)+\frac{1}{2}m\omega^2 q^2(t)=\frac{1}{2m}\left(p_0\,\text{συν}\,\omega t-q_0 m\omega\,\text{ημ}\,\omega t\right)^2+$$

$$\frac{1}{2}m\omega^2\left(q_0\,\text{συν}\,\omega t+\frac{p_0}{m\omega}\,\text{ημ}\,\omega t\right)^2=\frac{1}{2m}p_0^2+\frac{1}{2}m\omega^2 q_0^2(t)=H(p,q,0)$$

Άσκηση 6.6

Θεωρούμε ένα σύστημα με δύο βαθμούς ελευθερίας με συνάρτηση Λαγκράνζ της μορφής

$$L=\frac{1}{2}\left(\dot{x}^2+\dot{y}^2\right)-\frac{1}{2}\omega^2\left(x^2+y^2\right)+axy$$

Να γραφούν οι εξισώσεις της κινήσεως και να βρεθούν οι περιοδικές λύσεις.

Λύση: Πρόκειται για δύο αρμονικούς ταλαντωτές με ίσες συχνότητες ω συνδεδεμένοι μεταξύ τους και η αλληλεπίδραση αυτή περιγράφεται από τον όρο $-axy$.

Οι εξισώσεις κινήσεως του Λαγκράνζ για τις γενικευμένες συντεταγμένες x και y είναι

$$\ddot{x}-\omega^2 x=ay \qquad \ddot{y}-\omega^2 y=ax$$

Αναζητούμε λύσεις της μορφής

$$x(t)=A_x\,\text{συν}\,\Omega t \qquad y(t)=A_y\,\text{συν}\,\Omega t$$

Αντικαθιστούμε τις λύσεις αυτές στο διαφορικό σύστημα και βρίσκουμε

$$A_x\left(\omega^2-\Omega^2\right)=aA_y \qquad A_y\left(\omega^2-\Omega^2\right)=aA_x$$

Το αλγεβρικό αυτό σύστημα των δύο εξισώσεων με αγνώστους τα πλάτη A_x και A_y έχει μη μηδενική λύση αν ισχύει η χαρακτηριστική εξίσωση

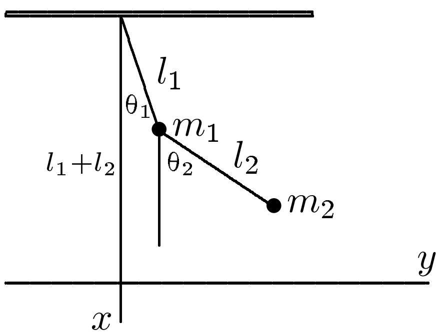
$$\left(\omega^2-\Omega^2\right)^2=a^2$$

Οπότε το σύστημα έχει τις ακόλουθες δύο λύσεις

$$\Omega_1^2 = \omega^2 + a \quad A_x = -A_y \qquad\qquad \Omega_2^2 = \omega^2 - a \quad A_x = A_y$$

Άσκηση 6.7

Να βρεθεί η συνάρτηση του Λαγκράνζ και οι εξισώσεις της κινήσεως για το διπλό εκκρεμές του σχήματος. Οι δύο μάζες κινούνται υπό την επίδραση του πεδίου βαρύτητας σε ένα κατακόρυφο επίπεδο.



Σχήμα 6.6
Οι μάζες κινούνται σε ένα κατακόρυφο επίπεδο

Λύση: Οι συντεταγμένες των μαζών m_1 και m_2 είναι (x_1, y_1) και (x_1, y_1) αντιστοίχως. Επειδή οι μάζες κινούνται σε ένα κατακόρυφο επίπεδο οι γενικευμένες συντεταγμένες θ_1 και θ_2 καθορίζουν πλήρως την θέση των δύο μαζών. Από το σχήμα βρίσκουμε εύκολα τις σχέσεις

$$\begin{aligned} x_1 &= l_1 \,\text{συν}\,\theta_1 & y_1 &= l_1 \,\text{ημ}\,\theta_1 \\ x_2 &= l_1 \,\text{συν}\,\theta_1 + l_2 \,\text{συν}\,\theta_2 & y_2 &= l_1 \,\text{ημ}\,\theta_1 + l_2 \,\text{ημ}\,\theta_2 \end{aligned}$$

Παραγωγίζουμε τις σχέσεις αυτές ως προς τον χρόνο και βρίσκουμε

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -\dot{\theta}_1 l_1 \,\text{ημ}\,\theta_1 & \dot{y}_1 &= \dot{\theta}_1 l_1 \,\text{συν}\,\theta_1 \\ \dot{x}_2 &= -\dot{\theta}_1 l_1 \,\text{ημ}\,\theta_1 - \dot{\theta}_2 l_2 \,\text{ημ}\,\theta_2 & \dot{y}_2 &= \dot{\theta}_1 l_1 \,\text{συν}\,\theta_1 + \dot{\theta}_2 l_2 \,\text{συν}\,\theta_2 \end{aligned}$$

Υπολογίζουμε την κινητική ενέργεια του συστήματος από τον τύπο

$$E_k = \frac{1}{2} m_1 \left(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2\right) + \frac{1}{2} m_2 \left(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2\right)$$

Μετά από απλές πράξεις βρίσκουμε

$$E_k = \frac{1}{2}m_1\dot{\theta}_1^2 l_1^2 + \frac{1}{2}m_2\left(\dot{\theta}_1^2 l_1^2 + \dot{\theta}_2^2 l_2^2 + 2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 l_1 l_2 \,\text{συν}\,(\theta_1 - \theta_2)\right)$$

Υπολογίζουμε ακολούθως την δυναμική ενέργεια. Θα χρησιμοποιήσουμε τον τύπο $V = mgh$ όπου h το ύψος που βρίσκεται η μάζα m. Διαλέγουμε το επίπεδο αναφοράς σε απόσταση $l_1 + l_2$ από το σημείο εξαρτήσεως των μαζών. Βρίσκουμε

$$V = m_1 g\,(l_1 + l_2 - l_1 \,\text{συν}\,\theta_1) + m_2 g\,(l_1 + l_2 - l_1 \,\text{συν}\,\theta_1 + l_2 \,\text{συν}\,\theta_2)$$

Η συνάρτηση Λαγκράνζ είναι η διαφορά αυτών των ενεργειών. Βρίσκουμε

$$L = E_k - V = \frac{1}{2}m_1\dot{\theta}_1^2 l_1^2 + \frac{1}{2}m_2\left(\dot{\theta}_1^2 l_1^2 + \dot{\theta}_2^2 l_2^2 + 2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 l_1 l_2 \,\text{συν}\,(\theta_1 - \theta_2)\right) -$$

$$m_1 g\,(l_1 + l_2 - l_1 \,\text{συν}\,\theta_1) + m_2 g\,(l_1 + l_2 - l_1 \,\text{συν}\,\theta_1 + l_2 \,\text{συν}\,\theta_2)$$

Οι εξισώσεις κινήσεως για τις γωνίες θ_1 και θ_2 του Λαγκράνζ δίνονται από τις σχέσεις

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} - \frac{\partial L}{\partial \theta_1} = 0 \qquad\qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} - \frac{\partial L}{\partial \theta_2} = 0$$

Μετά από απλές πράξεις βρίσκουμε

$$l_1\ddot{\theta}_1 + \frac{m_2}{m_1 + m_2} l_2 \left(\ddot{\theta}_2 \,\text{συν}\,(\theta_1 - \theta_2) + \dot{\theta}_2^2 \,\text{ημ}\,(\theta_1 - \theta_2)\right) = -g \,\text{ημ}\,\theta_1$$

$$l_2\ddot{\theta}_2 + l_1 \left(\ddot{\theta}_1 \,\text{συν}\,(\theta_1 - \theta_2) - \dot{\theta}_1^2 \,\text{ημ}\,(\theta_1 - \theta_2)\right) = -g \,\text{ημ}\,\theta_2$$

Δεν θα βρούμε τις πλήρεις λύσεις των εξισώσεων αυτών. Η λύση και η διερεύνηση των εξισώσεων αυτών μπορεί να γίνει βεβαίως με την βοήθεια του υπολογιστή.

Θα μελετήσουμε τις παραπάνω εξισώσεις στην περίπτωση που οι γωνίες θ_1 και θ_2 είναι αρκετά μικρές. Για μικρές γωνίες έχουμε

$$\text{συν}\,\theta = 1 \qquad\qquad \text{ημ}\,\theta = \theta$$

Δεχόμαστε επίσης και την προσέγγιση

$$\dot{\theta}_1^2\,\eta\mu\,(\theta_1-\theta_2)=\dot{\theta}_2^2\,\eta\mu\,(\theta_1-\theta_2)=0$$

και οι εξισώσεις κινήσεως γίνονται

$$l_1\ddot{\theta}_1+\frac{m_2}{m_1+m_2}l_2\ddot{\theta}_2=-g\theta_1 \qquad l_2\ddot{\theta}_2+l_1\ddot{\theta}_1=-g\theta_2$$

Θέτουμε $\mu=m_2/(m_1+m_2)$, $\omega_1^2=g/l_1$, $\omega_2^2=g/l_2$ και $\lambda=l_1/l_2$ και οι εξισώσεις γίνονται

$$\ddot{\theta}_1+\omega_1^2\theta_1=-\frac{\mu}{\lambda}\ddot{\theta}_2 \qquad \ddot{\theta}_2+\omega_2^2\theta_2=-\lambda\ddot{\theta}_1$$

Θα βρούμε τις συνθήκες που πρέπει να ισχύουν ώστε οι λύσεις να είναι της μορφής.

$$\theta_1(t)=A_1\,\sigma\upsilon\nu\,\omega t \qquad \theta_2(t)=A_2\,\sigma\upsilon\nu\,\omega t$$

Αντικαθιστούμε τις λύσεις αυτές στις εξισώσεις και βρίσκουμε

$$\left(\omega_1^2-\omega^2\right)A_1+\frac{\mu}{\lambda}\omega^2A_2=0 \qquad \lambda\omega^2A_1+\left(\omega_2^2-\omega^2\right)A_2=0$$

Το παραπάνω αλγεβρικό σύστημα των δύο εξισώσεων με αγνώστους τα πλάτη A_1 και A_2 έχει μη μηδενική λύση όταν η ορίζουσα των συντελεστών των αγνώστων είναι μηδέν. Η εξίσωση αυτή είναι

$$\left(\omega_1^2-\omega^2\right)\left(\omega_2^2-\omega^2\right)-\mu\omega^4=0$$

Η εξίσωση έχει γενικά τέσσερις λύσεις. Για μία από αυτές τις λύσεις η δεύτερη των εξισώσεων του συστήματος δίνει

$$\mathrm{A}_1=-\frac{\left(\omega_2^2-\omega^2\right)}{\lambda\omega^2}A_2$$

Παρόμοιο πρόβλημα μπορούμε να μελετήσουμε με τρεις μάζες συνδεδεμένες μεταξύ τους κατά ανάλογο τρόπο ώστε να σχηματίζουν ένα τριπλό εκκρεμές, που να κινούνται σε ένα κατακόρυφο επίπεδο.

Είναι επίσης δυνατόν οι μάζες να μην κινούνται σε κατακόρυφο επίπεδο αλλά σε όλο το χώρο. Η κίνηση γίνεται στην επιφάνεια μιας σφαίρας με ακτίνα το μήκος του νήματος. Το εκκρεμές ονομάζεται σφαιρικό εκκρεμές. Είναι και εδώ δυνατό να έχουμε απλό, διπλό ή και τριπλό εκκρεμές.

Άσκηση 6.8

Ένα σωμάτιο κινείται σε κεντρικό δυναμικό $V(r)$ όπου $r = \|\vec{r}\|$ Να γραφεί η εξίσωση Χάμιλτον - Τζακόμπι.

Λύση: Θα μελετήσουμε το πρόβλημα σε σφαιρικές συντεταγμένες

$$x = r\,\text{ημ}\,\theta\,\text{συν}\,\varphi \qquad x = r\,\text{ημ}\,\theta\,\text{ημ}\,\varphi \qquad x = r\,\text{συν}\,\theta$$

Η κινητική ενέργεια δίνεται από την σχέση

$$E_k = \frac{1}{2}m\left[\dot{r}^2 + r^2\left(\dot{\theta}^2 + \text{ημ}^2\,\theta\dot{\varphi}^2\right)\right]$$

και επομένως η συνάρτηση του Λαγκράνζ είναι

$$L = \frac{1}{2}m\left[\dot{r}^2 + r^2\left(\dot{\theta}^2 + \text{ημ}^2\,\theta\dot{\varphi}^2\right)\right] - V(r)$$

Βρίσκουμε ακολούθως τις ορμές του σωματίου.

$$p_r = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r} \qquad p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta} \qquad p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2\,\text{ημ}^\theta\,\dot{\varphi}$$

Επομένως η συνάρτηση του Χάμιλτον που παριστάνει και την ενέργεια του συστήματος είναι

$$H = \frac{1}{2m}\left[p_r^2 + \frac{1}{r^2}\left(p_\theta^2 + \frac{1}{\text{ημ}^2\,\theta}p_\varphi^2\right)\right] + V(r)$$

Στην εξίσωση αυτή κάνουμε τις αντικαταστάσεις

$$p_r = \frac{\partial S}{\partial r} \qquad p_\theta = \frac{\partial S}{\partial \theta} \qquad p_\varphi = \frac{\partial S}{\partial \varphi}$$

και βρίσκουμε την ζητούμενη εξίσωση Χάμιλτον - Τζακόμπι

$$E = \frac{1}{2m}\left[\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\left(\frac{\partial S}{\partial \theta}\right)^2 + \frac{1}{\eta\mu^2\theta}\left(\frac{\partial S}{\partial \varphi}\right)^2\right)\right] + V(r)$$

Μπορούμε να λύσουμε την εξίσωση αυτή χωρίζοντας τις ανεξάρτητες μεταβλητές. Η εξίσωση δέχεται λύση της μορφής

$$S(r,\theta,\varphi) = S_r(r) + S_\theta(\theta) + S_\varphi(\varphi)$$

και η εξίσωση διασπάται στις ακόλουθες τρεις συνήθεις διαφορικές εξισώσεις

$$\frac{dS_\varphi}{d\varphi} = \alpha_3 \qquad \left(\frac{dS_\theta}{d\theta}\right)^2 + \frac{\alpha_3^2}{\eta\mu^2\theta} = \alpha_2^2 \qquad \left(\frac{dS_r}{dr}\right)^2 + \frac{\alpha_2^2}{r^2} = 2m\left[E - V(r)\right]$$

όπου τα α_1, α_2 και α_3 είναι σταθερές.

Από τις εξισώσεις αυτές με μια απλή ολοκλήρωση βρίσκουμε την δράση S. Δεν θα προχωρήσουμε στην λύση διότι το πρόβλημα έχει λυθεί αναλυτικά σε άλλο κεφάλαιο.

Άσκηση 6.9

Να βρεθούν οι εξισώσεις της κινήσεως για τα δύο ανεξάρτητα πεδία $\psi(\vec{r},t)$ και $\psi^*(\vec{r},t)$ που προκύπτουν από την ακόλουθη πυκνότητα Λαγκράνζ.

$$\ell = \frac{\hbar}{2i}\left(\dot{\psi}^*\psi - \psi^*\dot{\psi}\right) - \frac{\hbar^2}{2m}\vec{\nabla}\psi\cdot\vec{\nabla}\psi^* - V(\vec{r},t)\psi\psi^*$$

Να βρεθεί η κανονική ορμή και η συνάρτηση Χάμιλτον.

Να βρεθεί πως μεταβάλλεται η πυκνότητα από ένα απειροστό μετασχηματισμό των γενικευμένων συντεταγμένων. Πότε η πυκνότητα παραμένει αναλλοίωτη από το μετασχηματισμό αυτό.

Λύση: Για να γράψουμε τις εξισώσεις της κινήσεως πρέπει να υπολογίσουμε τις παραγώγους της συναρτήσεως L του Λαγκράνζ ως προς τα πεδία ψ και ψ. Γράφουμε αναλυτικά την πυκνότητα

$$\ell = \frac{\hbar}{2i}\left(\dot{\psi}^*\psi - \psi^*\dot{\psi}\right) - \frac{\hbar^2}{2m}\left(\psi_x\psi_x^* + \psi_y\psi_y^* + \psi_z\psi_z^*\right) - V(\vec{r},t)\psi\psi^*$$

όπου οι δείκτες x, y, και z σημαίνουν παραγώγιση ως προς τους αντίστοιχους δείκτες.

Βρίσκουμε

$$\frac{\partial \ell}{\partial \psi} = \frac{\hbar}{2i}\dot{\psi}^* - V\psi^* \qquad \frac{\partial \ell}{\partial \dot{\psi}} = -\frac{\hbar}{2i}\psi^*$$

$$\frac{\partial \ell}{\partial \psi_x} = -\frac{\hbar^2}{2m}\psi_x^* \qquad \frac{\partial \ell}{\partial \psi_y} = -\frac{\hbar^2}{2m}\psi_y^* \qquad \frac{\partial \ell}{\partial \psi_z} = -\frac{\hbar^2}{2m}\psi_z^*$$

Επομένως η εξίσωση της κινήσεως για το πεδίο ψ^* είναι

$$-\frac{\partial \ell}{\partial \psi} + \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \ell}{\partial \dot{\psi}} + \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial \ell}{\partial \psi_x} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial \ell}{\partial \psi_y} + \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial \ell}{\partial \psi_z} = -\frac{\hbar}{2i}\dot{\psi}^* + V\Psi^* - \frac{\partial}{\partial t}\frac{\hbar}{2i}\psi^* -$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\hbar^2}{2m}\psi_x^* - \frac{\partial}{\partial y}\frac{\hbar^2}{2m}\psi_y^* - \frac{\partial}{\partial z}\frac{\hbar^2}{2m}\psi_z^* = -\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial t}\psi^* - \frac{\hbar^2}{2m}\vec{\nabla}^2\psi^* + V\Psi^* = 0$$

Με τον ίδιο τρόπο παραγωγίζοντας ως προς τα πεδία ψ^* και $\dot{\psi}^*$ αποδεικνύεται ότι η εξίσωση κινήσεως για το πεδίο ψ είναι

$$\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial t}\psi - \frac{\hbar^2}{2m}\vec{\nabla}^2\psi + V\psi = 0$$

Οι εξισώσεις αυτές ονομάζονται εξισώσεις του Σρέντινγκερ και παίζουν κεντρικό ρόλο στην κβαντική μηχανική.

Προφανώς η πυκνότητα, επειδή περιέχει μόνο παράγοντες της μορφής $\psi\psi^*$, δεν μεταβάλλεται με τον μετασχηματισμό

$$\psi \longrightarrow e^{i\alpha}\psi \qquad \psi^* \longrightarrow e^{-i\alpha}\psi^*$$

όπου α μια πραγματική σταθερά. Οι μετασχηματισμοί αυτοί είναι γνωστοί σαν μετασχηματισμοί βαθμίδας. Οι μετασχηματισμοί

$$\psi \longrightarrow \psi + i\delta\alpha\,\psi \qquad \psi^* \longrightarrow \psi^* - i\delta\alpha\,\psi^*$$

είναι οι αντίστοιχοι απειροστοί μετασχηματισμοί των παραπάνω μετασχηματισμών βαθμίδας. Είναι επίσης εύκολο να αποδειχτεί ότι η πυκνότητα είναι αναλλοίωτη από τους απειροστούς αυτούς μετασχηματισμούς. Οι όροι που είναι ανάλογοι της μεταβολής $\delta\alpha$ αλληλοαναιρούνται και οι όροι που είναι ανάλογοι της μεταβολής $(\delta\alpha)^2$ είναι πολύ μικροί και τους μηδενίζουμε.

Οι κανονικές ορμές δίνονται από τις σχέσεις

$$\pi = \frac{\delta L}{\delta \dot{\psi}} = \frac{\partial \ell}{\partial \dot{\psi}} = -\frac{\hbar}{2i}\psi^* \qquad \pi^* = \frac{\delta L}{\delta \dot{\psi}^*} = \frac{\partial \ell}{\partial \dot{\psi}^*} = \frac{\hbar}{2i}\psi$$

Η πυκνότητα του Χάμιλτον είναι

$$h = \pi\dot{\psi} + \pi^*\dot{\psi}^* - \ell = -\frac{\hbar}{2i}\psi^*\dot{\psi} + \frac{\hbar}{2i}\psi\dot{\psi}^* - \frac{\hbar}{2i}\left(\dot{\psi}^*\psi - \psi^*\dot{\psi}\right)$$

$$+\frac{\hbar^2}{2m}\left(\psi_x\psi_x^* + \psi_y\psi_y^* + \psi_z\psi_z^*\right) + V(\vec{r},t)\psi\psi^* = \frac{\hbar^2}{2m}\vec{\nabla}\psi\cdot\vec{\nabla}\psi^* + V(\vec{r},t)\psi\psi^*$$

Η συνάρτηση του Χάμιλτον είναι το ολοκλήρωμα της παραπάνω πυκνότητας. Βρίσκουμε

$$H = \iiint d^3\vec{r}\left(\frac{\hbar^2}{2m}\vec{\nabla}\psi\cdot\vec{\nabla}\psi^* + V(\vec{r},t)\psi\psi^*\right)$$

Με μια κατά παράγοντες ολοκλήρωση και δεδομένου ότι ο επιφανειακός όρος μηδενίζεται βρίσκουμε

$$H = \iiint d^3\vec{r}\ \psi^*\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\vec{\nabla}^2 + V(\vec{r},t)\right)\psi$$

Η μέση τιμή του μεγέθους $f(\vec{r},\vec{p},t)$ ενός συστήματος που βρίσκεται στην κατάσταση $\psi(\vec{r},t)$ στην κβαντική μηχανική δίνεται από την σχέση

$$< f(\vec{r},\vec{p},t) >= \iiint d^3\vec{r}\ \psi^* f\left(\vec{f}, -i\hbar\vec{\nabla}, t\right)\psi$$

Επομένως ο παραπάνω τύπος της Χαμιλτονιανής δεν είναι τίποτα άλλο παρά η μέση τιμή της γνωστής κλασσικής Χαμιλτονιανής

$$H = \frac{1}{2m}p^2 + V(\vec{r},t)$$

Κεφάλαιο 7

Ειδική θεωρία της σχετικότητας

7.1 Η οριακή ταχύτητα του φωτός

Η αλληλεπίδραση μεταξύ δύο συστημάτων περιγράφεται στην κλασσική φυσική από μια δυναμική συνάρτηση των συντεταγμένων και πιθανώς και του χρόνου. Αν $\vec{r}$, $\vec{r}\,'$ είναι οι συντεταγμένες των δύο συστημάτων η αλληλεπίδραση περιγράφεται από την συνάρτηση $V(\vec{r}\,' - \vec{r})$. Παρατηρούμε ότι μια αλλαγή στην θέση του ενός συστήματος επηρεάζει το άλλο ακαριαία. Η αλλαγή της θέσεως του ενός συστήματος γίνεται, ταυτόχρονα αντιληπτή από το άλλο.

Με το όρο αλληλεπίδραση ανάμεσα σε δύο συστήματα εννοούμε ότι κάποιο σήμα εκπέμπεται από το ένα σύστημα και λαμβάνεται από το άλλο. Τα πειράματα μας λένε ότι η ταχύτητα του σήματος της αλληλεπιδράσεως δεν είναι άπειρη. Μεσολαβεί κάποιος χρόνος για να αντιληφθεί το ένα σύστημα την αλλαγή που υπέστη το άλλο. Αν $t - t'$ είναι ο χρόνος αυτός τότε η ταχύτητα του σήματος

$$\vec{v} = \frac{\vec{r} - \vec{r}\,'}{t - t'}$$

ονομάζεται ταχύτητα αλληλεπιδράσεως.

Είναι πειραματικό δεδομένο ότι η ταχύτητα αυτή δεν είναι άπειρη αλλά έχει ένα ανώτατο όριο. Οι ταχύτητες των υλικών σωματίων φυσικά δεν υπερβαίνουν την ταχύτητα της αλληλεπιδράσεως, και άρα επίσης πρέπει να έχουν κάποιο ανώτατο όριο. Η οριακή αυτή ταχύτητα είναι η ταχύτητα του φωτός στο κενό και έχει την τιμή

$$c = 2,99793 \times 10^{10} cm/sec$$

Το κλασσικό πείραμα που απέδειξε ότι η ταχύτητα αυτή είναι οριακή είναι το πείραμα Μάικελσον - Μόρλυ. Με το πείραμα αυτό μετρήθηκε η ταχύτητα του φωτός σε μια διεύθυνση κάθετη στην ταχύτητα της γης και σε μια διεύθυνση παράλληλη προς την ταχύτητα αυτή. Κατά την αρχή του Γαλιλαίου οι δύο αυτές ταχύτητες έπρεπε να είναι c και $c+V$ όπου V η ταχύτητα της γης. Αντιθέτως το πείραμα απέδειξε ότι η ταχύτητα c έχει την ίδια τιμή είτε το φως τρέχει κάθετα προς την ταχύτητα της γης είτε παράλληλα προς αυτή. Η ταχύτητα του φωτός στο κενό είναι ίδια σε όλα τα συστήματα και δεν εξαρτάται από την ταχύτητα του παρατηρητή ή της πηγής.

Η διαπίστωση αυτή αποδείχτηκε και με άλλα περισσότερο ακριβή πειράματα. Πειράματα με μεγάλη ακρίβεια στην γη με κινούμενες πηγές φωτός έδειξαν ότι η ταχύτητα της πηγής δεν προστίθεται στην ταχύτητα του φωτός. Αλλά και αστρονομικές παρατηρήσεις με συστήματα διπλών αστέρων έχουν επιβεβαιώσει την παγκοσμιότητα της ταχύτητας c. Η ταχύτητα c είναι μια σταθερά της φύσεως. Μεγαλύτερη ταχύτητα από αυτή δεν υπάρχει στην φύση και όλα τα υλικά σωμάτια κινούνται με ταχύτητες μικρότερες της ταχύτητας αυτής. Η ταχύτητα του φωτός στο κενό έχει την τιμή c σε ένα ακίνητο σύστημα αναφοράς και έχει επίσης την τιμή c σε ένα άλλο κινούμενο σύστημα με σχετική ταχύτητα V ως προς το ακίνητο.

7.2 Τα αξιώματα της σχετικότητας

Τα αξιώματα της ειδικής θεωρίας της σχετικότητας είναι δύο. Πάνω στα αξιώματα αυτά θεμελιώνεται ολόκληρη η θεωρία της ειδικής σχετικότητας.

Αξίωμα 1: Όλοι οι νόμοι της φύσεως είναι ίδιοι σε όλα τα αδρανιακά συστήματα και εκφράζονται με τις ίδιες μαθηματικές σχέσεις.

Αξίωμα 2: Η ταχύτητα του φωτός στο κενό είναι ίση με c σε όλα τα αδρανιακά συστήματα. Η ταχύτητα αυτή είναι η ανώτερη ταχύτητα στη φύση.

Το πρώτο αξίωμα είναι ταυτόσημο με το αντίστοιχο αξίωμα της κλασσικής μηχανικής. Ένα σύστημα που οι εξισώσεις της φυσικής έχουν μια απλή μορφή ονομάζεται αδρανιακό σύστημα. Για τέτοια συστήματα στην κλασσική μηχανική ένα υλικό σημείο που κινείται με σταθερή ταχύτητα εξακολουθεί να κινείται με την ίδια ταχύτητα αν δεν επιδράσει επάνω του καμία δύναμη. Αν δύο συστήματα κινούνται με σταθερή ταχύτητα και το ένα είναι αδρανιακό τότε και το άλλο είναι αδρανιακό σύστημα.

Το δεύτερο αξίωμα είναι ένα πειραματικό δεδομένο. Όλα τα πειράματα που έχουν γίνει μέχρι σήμερα το επιβεβαιώνουν. Η ύπαρξη του ορίου αυτού για τις ταχύτητες είναι απαράδεκτη για την κλασσική φυσική. Έτσι η κλασσική μηχανική δεν μπορεί να περιγράψει συστήματα που κινούνται με μεγάλες ταχύτητες, περιορίζεται να εξηγεί τα φυσικά φαινόμενα που οι ταχύτητες τους είναι μικρές συγκριτικά με την ταχύτητα c. Οι ταχύτητες των σωμάτων που συμμετέχουν σε ενα συνηθισμένο πείραμα είναι πολύ μικρότερες από αυτή και επομένως μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τα συμπεράσματα της κλασσικής φυσικής.

Οι σχετικιστικές εξισώσεις πρέπει να μετατρέπονται σε κλασσικές εξισώσεις αν θεωρήσουμε την ταχύτητα του φωτός άπειρη. Τυπικά αυτό σημαίνει ότι οι σχετικιστικές εξισώσεις αν πάρουμε το όριο $c \to \infty$ θα πρέπει να παίρνουν την γνωστή κλασσική μορφής τους και αυτό είναι και ένα ακόμα κριτήριο για την ορθότητα τους.

Στην κλασσική μηχανική ο χρόνος είναι απόλυτος. Δηλαδή υπάρχει ένας χρόνος για όλα τα συστήματα αναφοράς. Με άλλα λόγια αν δύο συμβάντα είναι ταυτόχρονα για κάποιο παρατηρητή είναι επίσης ταυτόχρονα για οποιονδήποτε άλλο. Αυτό το προφανές για την κοινή μας εμπειρία γεγονός δεν ισχύει στην σχετικότητα. Ο χρόνος κιλά με διαφορετικό ρυθμό στα διάφορα συστήματα αναφοράς. Έτσι, η πρόταση ότι το τραίνο θα φθάσει στον σταθμό στις δώδεκα δεν έχει έννοια αν δεν προσδιορίσουμε πρώτα το σύστημα αναφοράς. Δύο γεγονότα ταυτόχρονα όπως είναι η άφιξη του τραίνου και η ένδειξη των δεικτών του ρολογιού ότι η ώρα είναι δώδεκα είναι δυνατόν να μην είναι ταυτόχρονα για κάποιον κινούμενο παρατηρητή.

7.3 Οι μετασχηματισμοί του Λόρεντς

Για την περιγραφή ενός γεγονότος πρέπει να έχουμε ορίσει ένα σύστημα αναφοράς. Το σύστημα αυτό αποτελείται από ένα τρισορθογώνιο σύστημα αξόνων που δείχνει κάθε φορά την θέση του γεγονότος στον χώρο και από ένα ρολόι σταθερά συνδεδεμένο με το σύστημα αναφοράς που μας χρησιμεύει για να ορίσουμε τον χρόνο που γίνεται το γεγονός.

Ορισμός: Με το όρο συμβάν θα εννοούμε κάτι που γίνεται σε ορισμένο σημείο του χώρου κάποια χρονική στιγμή.

Ένα συμβάν ορίζεται από τρεις συνιστώσες ως προς το τρισορθογώνιο σύστημα αναφοράς και από το σημείο του χρόνου που συμβαίνει αυτό και καθορίζεται από το ρολόι του συστήματος. Τα συμβάντα παριστάνονται από σημεία που ονομάζονται κοσμικά σημεία. Οι συντεταγμένες ενός κοσμικού σημείου είναι τέσσερις. Τρεις χωρικές συντεταγμένες και μια χρονική. Ο χώρος είναι τεσσάρων διαστάσεων.

$$\vec{r} = (x, y, z, t)$$

Ένα υλικό σημείο διαγράφει στον χώρο αυτό μια τροχιά που ονομάζεται κοσμική γραμμή. Η κοσμική γραμμή δίνει την θέση του υλικού σημείου σε κάθε χρονική στιγμή. Αν το υλικό σημείο είναι ακίνητο ή κινείται με σταθερή ταχύτητα η κοσμική γραμμή είναι μια ευθεία γραμμή.

Θεωρούμε δύο συστήματα αναφοράς S και S' που κινούνται με σχετική ταχύτητα v το ένα ως προς το άλλο. Ο σκοπός μας είναι να βρούμε ένα μετασχηματισμό ανάλογο με τον μετασχηματισμό του Γαλιλαίου που να συνδέει τις συντεταγμένες των δύο συστημάτων έτσι ώστε να ισχύουν τα οι παραδοχές της σχετικότητας.

Έστω ένα συμβάν στο άτονο σύστημα S στο σημείο x_1, y_1, z_1, t_1. Το συμβάν είναι η εκπομπή ενός σήματος που διαδίδεται με την ταχύτητα του φωτός. Ένα δεύτερο συμβάν που είναι η άφιξη του σήματος αυτού, συμβαίνει στο σημείο x_2, y_2, z_2, t_2. Το διάστημα που διέτρεξε το σήμα είναι

$$s = c(t_2 - t_1)$$

Το διάστημα αυτό όμως από την αναλυτική γεωμετρία είναι

$$s = \left[(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2\right]^{1/2}$$

Επομένως έχουμε την σχέση

$$\begin{aligned} &(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 = c^2(t_2 - t_1)^2 \qquad \Longrightarrow \\ &(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 - c^2(t_2 - t_1)^2 = 0 \end{aligned}$$

Την διάδοση του σήματος την παρατηρούμε και στο κινούμενο σύστημα S'. Επειδή και στο τονούμενο σύστημα το σήμα κινείται πάλι με την ταχύτητα του φωτός έχουμε επίσης

$$(x'_2 - x'_1)^2 + (y'_2 - y'_1)^2 + (z'_2 - z'_1)^2 - c^2(t'_2 - t'_1)^2 = 0$$

Διάστημα μεταξύ δύο συμβάντων ορίζουμε το μέγεθος

$$S_{12} = (x'_2 - x'_1)^2 + (y'_2 - y'_1)^2 + (z'_2 - z'_1)^2 - c^2(t'_2 - t'_1)^2$$

Παρατηρούμε ότι το παραπάνω διάστημα έχει την ίδια τιμή και στα δύο συστήματα.

Θεωρούμε τώρα ότι το ένα σημείο είναι η αρχή του συστήματος αναφοράς και ότι το δεύτερο σημείο είναι το (x, y, z, t) τότε

$$s^2 = x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2$$

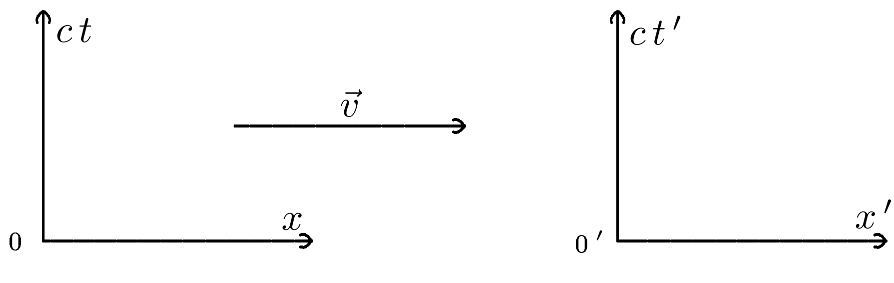
Αν θέσουμε $\tau = ict$ τότε $\tau^2 = -c^2t^2$ και επομένως

$$s^2 = \tau^2 + x^2 + y^2 + z^2$$

Ο χώρος των τεσσάρων διαστάσεων με συνιστώσες

$$(x, y, z, \tau) = (x, y, z, ict)$$

ονομάζεται χώρος του Μινκόφσκι. Στον χώρο αυτό η απόσταση S_{12} είναι η απόσταση μεταξύ των σημείων (x_2, y_2, z_2, ict_2) και (x_1, y_1, z_1, ict_1) που δίνεται από τον γνωστό τύπο του Πυθαγόρειου θεωρήματος.



Σχήμα 7.1
Η κίνηση των δύο συστημάτων

Για να απλοποιήσουμε τις εκφράσεις θα υποθέσουμε ότι τα δύο συστήματα κινούνται με σχετική ταχύτητα v παράλληλη προς τον x άξονα. Δεν υπάρχει κίνηση κατά την διεύθυνση των αξόνων y και z και οι συνιστώσες ως προς αυτούς τους άξονες δεν μεταβάλλονται

$$y = y' \qquad\qquad z = z'$$

Κατά την χρονική στιγμή $t = 0$ οι αρχές O και O$'$ των δύο συστημάτων συμπίπτουν.

Θα βρούμε τώρα τους μετασχηματισμούς εκείνους που μεταφέρουν τις συντεταγμένες του συστήματος S στο σύστημα S' έτσι ώστε το διάστημα s να παραμένει αναλλοίωτο. Τα δύο συστήματα είναι αδρανιακά και επομένως ο μετασχηματισμός πρέπει να είναι γραμμικός. Ένας τέτοιος μετασχηματισμός είναι μια περιστροφή στον χώρο (x, τ). Αν η γωνία της περιστροφής είναι θ, γράφουμε

$$x = x'\,\text{συν}\,\theta + \tau'\,\text{ημ}\,\theta \qquad\qquad \tau = -x'\,\text{ημ}\,\theta + \tau'\,\text{συν}\,\theta$$

Πράγματι ο μετασχηματισμός αυτός είναι τέτοιος ώστε το μήκος των διανυσμάτων να παραμένει σταθερό. Έχουμε

$$x^2 + \tau^2 = x'^{\,2} + \tau'^{\,2} \qquad \Longrightarrow \qquad x^2 - c^2t^2 = x'^{\,2} - c^2t'^{\,2}$$

Δηλαδή η απόσταση των δύο συμβάντων είναι η ίδια και στα δύο αδρανιακά συστήματα.

Θα υπολογίζουμε ακολούθως την γωνία περιστροφής θ που θα εξαρτάται προφανώς από την σχετική ταχύτητα v. Αν κάποια χρονική στιγμή τα δύο συστήματα συμπέσουν τότε $x' = 0$ και $x/t = v$. Ενώ αν $x = 0$ τότε $x'/t' = -v$. Οι μετασχηματισμοί δίνουν τις σχέσεις

$$x = \tau'\,\text{ημ}\,\theta \qquad\qquad \tau = \tau'\,\text{συν}\,\theta$$

Αν διαιρέσουμε τις παραπάνω σχέσεις θα βρούμε την εφαπτομένη της γωνίας θ. Έχουμε

$$\text{εφ}\,\theta = \frac{x}{\tau} = \frac{x}{ict} = -i\frac{x}{ct} = -i\frac{v}{c} = -i\beta$$

όπου έχουμε συμβολίσει με β τον λόγο v/c.

Μπορούμε να απαλλαγούμε από την παρουσία του i στις παραπάνω σχέσεις αν χρησιμοποιήσουμε τις υπερβολικές συναρτήσεις. Έχουμε

$$\tanh i\theta = i\,\text{εφ}\,\theta = i(-i\beta) = \beta \qquad \Longrightarrow \qquad v = c\tanh\zeta$$

Μπορούμε τώρα να υπολογίσουμε το ημίτονο και το συνημίτονο της γωνίας θ. Από γνωστούς τύπους της τριγωνομετρίας βρίσκουμε

$$\begin{aligned}
\text{ημ}\,\theta &= \frac{\text{εφ}\,\theta}{\sqrt{1 + \text{εφ}^2\,\theta}} = \frac{-i\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}\\
\text{συν}\,\theta &= \frac{1}{\sqrt{1 + \text{εφ}^2\,\theta}} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}
\end{aligned}$$

Οι μετασχηματισμοί γίνονται

$$x = x'\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} + \tau'\frac{-i\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} \qquad \tau = x'\frac{i\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} + \tau'\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

Στις σχέσεις αυτές αντικαθιστούμε το τ με το ict και βρίσκουμε τελικά

$$x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \qquad t = \frac{t' + \frac{v}{c^2}x'}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

Σε μορφή μητρών οι μετασχηματισμοί γράφονται

$$\begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \begin{pmatrix} 1 & v \\ v/c^2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ t' \end{pmatrix}$$

Οι μετασχηματισμοί αυτοί ονομάζονται μετασχηματισμοί Λόρεντς και συνδέουν τις συντεταγμένες δύο αδρανιακών συστημάτων.

Για μικρές ταχύτητες $v \ll c$ οι σχετικιστικές εξισώσεις μετατρέπονται στις αντίστοιχες εξισώσεις την κλασσικής μηχανικής. Αυτό επιτυγχάνεται παίρνοντας το όριο $c \to \infty$ στους σχετικιστικούς τύπους. Βρίσκουμε

$$\begin{aligned} x =& \frac{x' + vt'}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \quad \xrightarrow[c \to \infty]{} \quad x = x' + vt' \\ t =& \frac{t' + \frac{v}{c^2}x'}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \quad \xrightarrow[c \to \infty]{} \quad t = t' \end{aligned}$$

Δηλαδή τους μετασχηματισμούς Γαλιλαίου της κλασσικής μηχανικής.

Με την βοήθεια των υπερβολικών τριγωνομετρικών αριθμών οι μετασχηματισμοί Λόρεντς γίνονται

$$x' = x\cosh\zeta - ct\sinh\zeta \qquad ct' = ct\cosh\zeta - x\sinh\zeta$$

Σε μορφή μητρών έχουμε

$$\begin{pmatrix} x' \\ ct' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh\zeta & -\sinh\zeta \\ -\sinh\zeta & \cosh\zeta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ ct \end{pmatrix}$$

Από τις σχέσεις αυτές ο μετασχηματισμός Λόρεντς ονομάζεται υπερβολική περιστροφή μέτρου ζ στο $x-ct$ επίπεδο. Επειδή η ταχύτητα v παίρνει τιμές στο διάστημα $-c<v<c$ η παράμετρος ζ παίρνει όλες τις πραγματικές τιμές δηλαδή

$$-\infty<\zeta<\infty$$

Αν τα συστήματα S και S' συνδέονται μεταξύ τους με την φανταστική περιστροφή μέτρου ζ και τα συστήματα S' και S'' με την φανταστική περιστροφή μέτρου ζ', τότε τα συστήματα S και S'' συνδέονται με την φανταστική περιστροφή μέτρου ζ'' όπου

$$\zeta''=\zeta+\zeta'$$

Η απόδειξη της προτάσεως αυτής είναι ταυτόσημη με την απόδειξη της ανάλογης προτάσεως για την πραγματική περιστροφή.

Η σχέση αυτή μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να βρούμε πως προστίθενται οι σχετικές ταχύτητες. Υποθέτουμε ότι το σύστημα S' κινείται ως προς το ακίνητο S με ταχύτητα v επομένως

$$v=c\tanh\zeta$$

Υποθέτουμε επίσης ότι το S'' κινείται ως προς το S' με ταχύτητα v' και επομένως

$$v'=c\tanh\zeta'$$

Τότε το S'' κινείται ως προς το S με ταχύτητα v'' που βρίσκεται ως εξής

$$v''=c\tanh\zeta''=c\tanh(\zeta+\zeta')=c\frac{\tanh\zeta+\tanh\zeta'}{1+\tanh\zeta\tanh\zeta'}=\frac{v+v'}{1+vv'/c^2}$$

Παρατήρηση: Παρατηρούμε ότι αν μια από τις ταχύτητες v ή v' ή ακόμα και οι δυο είναι ίση με c, $v=c$ ή $v'=c$ τότε και η ταχύτητα $v''=c$. Σε καμία περίπτωση οι ταχύτητες δεν υπερβαίνουν την ταχύτητα του φωτός στο κενό. Παρατηρούμε επίσης ότι στο όριο $c\to\infty$ η σχέση καταλήγει στην γνωστή κλασσική σχέση

$$v''=v+v'$$

7.4 Η διαστολή του χρόνου

Θεωρούμε δύο συμβάντα που γίνονται στο ίδιο σημείο x', y', z' του κινουμένου συστήματος. Ο χρόνος μεταξύ των δύο τούτων συμβάντων είναι

$$\Delta t' = t'_2 - t'_1$$

Ο αντίστοιχος χρόνος στο ακίνητο σύστημα είναι $\Delta t = t_2 - t_1$. Ο χρόνος αυτός δίνεται από την σχέση

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \frac{t'_2 + \frac{v}{c^2}x'}{\sqrt{1-\beta^2}} - \frac{t'_1 + \frac{v}{c^2}x'}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{t'_2 - t'_1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

οπότε έχουμε

$$\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1-\beta^2}} \qquad \text{ή} \qquad \Delta t' = \Delta t\sqrt{1-\beta^2} \leq \Delta t$$

Παρατηρούμε ότι ο χρόνος που μετρήθηκε από το ρολόι που κινείται είναι μικρότερος από τον χρόνο που μετρήθηκε στο ακίνητο σύστημα. Δηλαδή τα ρολόγια που κινούνται προχωράνε πιο αργά από τα ακίνητα ρολόγια. Το φαινόμενο ονομάζεται διαστολή του χρόνου. Ο χρόνος που μετράτε από ένα ρολόι που κινείται μαζί με κάποιο αντικείμενο ονομάζεται ιδιοχρόνος του αντικειμένου αυτού.

Το φαινόμενο φαίνεται να είναι παράδοξο αντίθετο δηλαδή προς την κοινή λογική μας. Το φαινόμενο διατυπώθηκε σαν παράδοξο των διδύμων. Σύμφωνα με αυτό ο ένας από δυο δίδυμους ανθρώπους ανεβαίνει σε ένα σύστημα αναφοράς που τρέχει με κάποια ταχύτητα ως προς το ακίνητο σύστημα αναφοράς που βρίσκεται ο άλλος δίδυμος. Σύμφωνα με την σχετικότητα στον κινούμενο δίδυμο ο χρόνος τρέχει πιο αργά και επομένως όταν κάποτε ξανασυναντηθούν θα είναι νεότερος από τον αδελφό του. ΄Ομως δεν υπάρχει τρόπος να αποφασίσουμε ποιος κινείται και ποιος είναι ακίνητος δεδομένου ότι ο καθένας θεωρεί τον εαυτών του ακίνητο και τον άλλο κινούμενο. Επομένως και οι δυο θα περιμένουν να δουν το αδελφό τους νεότερο. Φυσικά και οι δύο θα διαψευστούν γιατί οι δίδυμοι θα διαπιστώσουν ότι έχουν την ίδια ακριβώς ηλικία. Η απάντηση είναι ότι πράγματι στον κινούμενο δίδυμο ο χρόνος ρέει αργότερα αλλά αν προσπαθήσουν να διαπιστώσουν το γεγονός αυτό με το να ξανασυναντηθούν η αντίφαση αίρεται δεδομένου ότι ό ένας θα πρέπει να αλλάξει σύστημα αναφοράς για να γυρίσει πίσω.

Το φαινόμενο της διαστολής του χρόνου έχει αποδειχτεί πειραματικά. Ένα από αυτά τα πειράματα είναι η μέτρηση του χρόνου ζωής ραδιενεργών στοιχείων. Μετά από κάποιο χρόνο τα μισά ραδιενεργά στοιχεία μεταπίπτουν σε κάποιο άλλο στοιχείο με ταυτόχρονη εκπομπή ραδιενέργειας. Ο χρόνος αυτός που ονομάζεται χρόνος υποδιπλασιασμού μπορεί να μετρηθεί μετρώντας τα άτομα που επιζούν. Έχει διαπιστωθεί ότι ο χρόνος αυτός είναι μικρότερος όταν τα στοιχεία ηρεμούν και μεγαλύτερος όταν κινούνται με ταχύτητες που πλησιάζουν την ταχύτητα c. Το πείραμα έχει γίνει στο εργαστήριο με ραδιενεργά μ-μεσόνια που μεταπίπτουν σε ηλεκτρόνια ή ποζιτρόνια.

Ένα φυσικό φαινόμενο που δείχνει την διαστολή του χρόνου είναι το εξής. ´ Έχει διαπιστωθεί ότι η γη βομβαρδίζεται από μ-μεσόνια. Στην επιφάνεια της γης ο αριθμός των μ-μεσονίων είναι περισσότερος των αναμενομένων. Αυτό συμβαίνει διότι ο χρόνος ζωής του σωματίου είναι μεγαλύτερος για τα κινούμενα σωμάτια, λόγω της διαστολής του χρόνου.

7.5 Η Συστολή του μήκους

Έστω τώρα μια ράβδος που βρίσκεται στο κινούμενο σύστημα κατά την διεύθυνση του $x-$άξονα. Το μήκος της ράβδου στο κινούμενο σύστημα είναι

$$\Delta x = x'_2 - x'_1$$

Η ράβδος αυτή στο ακίνητο σύστημα έχει μήκος Δx που δίνεται από την σχέση

$$\Delta x = x_2 - x_1 = \frac{x'_2 + v\,t'}{\sqrt{1-\beta^2}} - \frac{x'_1 + v\,t'}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{x'_2 - x'_1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

οπότε έχουμε

$$\Delta x = \frac{\Delta x'}{\sqrt{1-\beta^2}} \qquad \text{ή} \qquad \Delta x' = \Delta x\sqrt{1-\beta^2} \leq \Delta x$$

Δηλαδή η ράβδος που κινείται μαζί με το κινούμενο σύστημα αναφοράς έχει μικρότερο μήκος από την ακίνητη. Αν η κίνηση της ράβδου είναι κάθετη προς το μήκος της τότε το μήκος της ράβδου δεν μεταβάλλεται.

Το φαινόμενο δεν συνεπάγεται βέβαια ότι η ράβδος υπέστη αλλαγές. Η συστολή του μήκους της ράβδου οφείλεται στην διαδικασία στης μετρήσεως. Αν προσπαθήσουμε να μετρήσουμε αυτή την συστολή με μια φωτογραφική μηχανή για παράδειγμα η φωτεινή ακτίνα που έρχεται από την αρχή της ράβδου και η φωτεινή ακτίνα που έρχεται από το τέλος της ράβδου φθάνουν στην φωτογραφική πλάκα με κάποια διαφορά χρόνου. Η διαφορά αυτή αντισταθμίζει την συστολή του μήκους ώστε η ράβδος να αποτυπώνεται στο κανονικό της μήκος.

Είναι γνωστό ότι οι γαλαξίες απομακρύνονται μεταξύ τους με μεγάλες ταχύτητες. Το σχήμα τους όμως φαίνεται από την γη όπως πραγματικά είναι χωρίς να παρατηρείται καμία συστολή του μήκους τους λόγω των μετασχηματισμών Λόρεντς.

7.6 Ο κώνος του φωτός

Θεωρούμε το επίπεδο x, ct. Ο άξονας του χρόνου είναι ct, έτσι ώστε οι δυο άξονες να έχουν διαστάσεις μήκους. Οι άλλες δύο συντεταγμένες y και z δεν εμφανίζονται στο σχήμα διότι δεν μεταβάλλονται από τους μετασχηματισμούς Λόρεντς. Ένα σημείο στο χωροχρονικό αυτό επίπεδο παριστάνει ένα συμβάν. Το συμβάν καθώς περνάει ο χρόνος διαγράφει μια γραμμή που ονομάζεται κοσμική γραμμή. Τα σημεία με $t > 0$ παριστάνουν το μέλλον και τα σημεία με $t < 0$ το παρελθόν για τον παρατηρητή του συστήματος.

Πάνω στο σύστημα αυτό θα σχεδιάσουμε τους άξονες για ένα κινούμενο σύστημα που κινείται με ταχύτητα v ως προς το ακίνητο. Υποθέτουμε ότι την χρονική στιγμή $t = 0$ τα δύο συστήματα ταυτίζονται. Η κοσμική γραμμή του σημείου Ο είναι η ευθεία με εξίσωση

$$x = vt = (v/c)ct$$

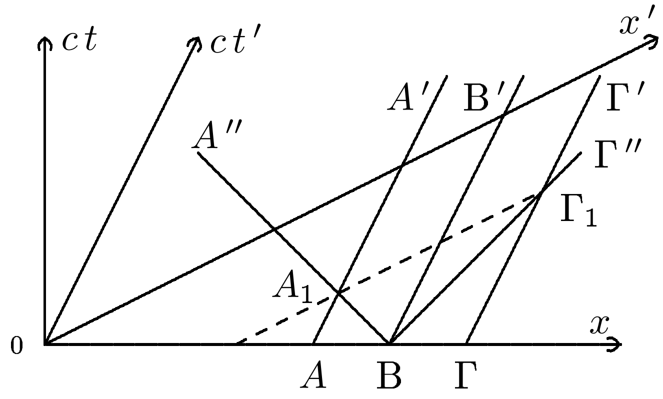
Η ευθεία αυτή είναι και ο άξονας ct' του κινούμενου συστήματος. Η γωνία φ έχει εφαπτομένη που δίνεται από την σχέση

$$\text{εφ}\,\varphi = \frac{x}{ct} = \frac{v}{c} \leq 1$$

Η γωνία φ για μεγάλες ταχύτητες v πλησιάζει την διχοτόμο της γωνίας χωρίς να την ξεπερνάει.

$$\varphi \leq 45^o$$

Παρατηρούμε ότι όλα τα σημεία του άξονα των x είναι ταυτόχρονα συμβάντα για το ακίνητο σύστημα αναφοράς. Τα ταυτόχρονα συμβάντα βρίσκονται σε ευθείες παράλληλες προς τον x άξονα. Από την παρατήρηση αυτή θα σχεδιάσουμε τον άξονα x' του κινούμενου παρατηρητή.



Σχήμα 7.2
Τα συμβάντα A_1 *και* Γ_1 *είναι ταυτόχρονα στο* (x', ct')

Θεωρούμε τρία ταυτόχρονα συμβάντα Α, Β και Γ στο ακίνητο σύστημα. Υποθέτουμε ότι τα τρία αυτά σημεία βρίσκονται στο κινούμενο σύστημα και συνεπώς κινούνται με ταχύτητα v. Οι κοσμικές ακτίνες των τριών αυτών σημείων είναι οι ευθείες AA', BB' και $\Gamma\Gamma'$ με εξισώσεις

$$x = x_A + v\,t \qquad\qquad x = x_B + v\,t \qquad\qquad x = x_\Gamma + v\,t$$

Από το σημείο Β εκπέμπονται δύο φωτεινά σήματα προς τα σημεία Α και Γ. Οι κοσμικές ακτίνες των σημάτων αυτών είναι οι ευθείες $\mathrm{B}\mathrm{A}''$, $\mathrm{B}\Gamma''$ με εξισώσεις

$$x = x_B - c\,t \qquad\qquad x = x_B + c\,t$$

Οι φωτεινές ακτίνες που εκπέμπονται από το σημείο Β τέμνουν τις κοσμικές ακτίνες των σημείων Α και Γ στα σημεία A_1 και Γ_1. Επειδή το σήμα τρέχει με την ταχύτητα c τα σημεία A_1 και Γ_1 είναι ταυτόχρονα για τον κινούμενο παρατηρητή. Επομένως ο άξονας x' πρέπει να είναι παράλληλος προς την ευθεία $\mathrm{A}_1\Gamma_1$. Σχεδιάζουμε τον άξονα x' ώστε να περνάει από το σημείο Ο.

Θα αποδείξουμε ότι η γωνία των αξόνων Ox και Ox' είναι ίση με την γωνία φ. Τα συμβάντα A_1 και Γ_1 δεν είναι ταυτόχρονα για τον ακίνητο παρατηρητή μεσολαβεί ένας χρόνος dt. Από τους μετασχηματισμούς Λόρεντς το διάστημα dt' δίνεται από την σχέση

$$dt' = \frac{dt - (v/c^2)\,dx}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

Επειδή τα σημεία του άξονα Ox' είναι ταυτόχρονα συμβάντα για το κινούμενο σύστημα έχουμε $dt' = 0$ άρα

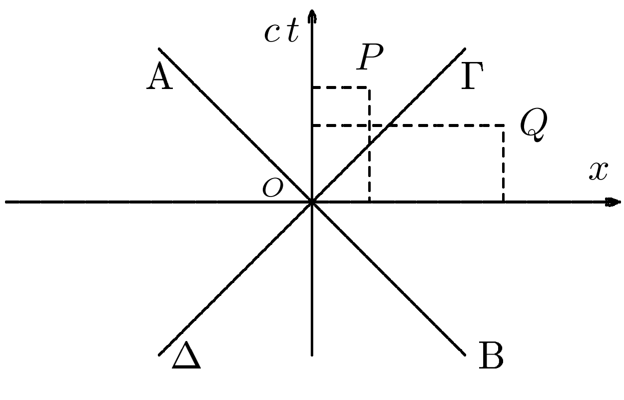
$$dt = \frac{v}{c^2}dx \quad \Longrightarrow \quad dx = \frac{c}{v}d(ct) \quad \Longrightarrow \quad x = \frac{c}{v}(ct)$$

Επομένως η γωνία φ έχει εφαπτομένη που δίνεται από την σχέση

$$\text{εφ}\,\varphi = \frac{ct}{x} = \frac{v}{c}$$

Οι κλίσεις των ευθειών ΒΑ$''$ και ΒΓ$''$ ως προς τον άξονα Ox δεν αλλάζουν διότι τα φωτεινά σήματα τρέχουν με την ταχύτητα c σε όλα τα αδρανιακά συστήματα. Αντιθέτως η κλίση των κοσμικών ακτίνων ΑΑ$'$, ΒΒ$'$ και ΓΓ$'$ μεταβάλλονται ανάλογα με την ταχύτητα v του κινούμενου συστήματος. Οι κλίσεις αυτές κυμαίνονται από 90^o έως 45^o.

Παρατηρούμε ότι όλα τα σημεία του άξονα Ox' είναι συμβάντα ταυτόχρονα για το κινούμενο σύστημα αναφοράς ενώ δεν είναι ταυτόχρονα για τον ακίνητο παρατηρητή. Η έννοια των ταυτοχρόνων γεγονότων εξαρτάται από το σύστημα αναφοράς. Το συμπέρασμα αυτό δεν ισχύει στην κλασσική φυσική.



Σχήμα 7.3
Το συμβάν P είναι πάντα μελλοντικό του 0

Η κίνηση ενός φωτεινού σήματος που εκπέμπεται από την αρχή Ο παριστάνεται από τις ευθείες με εξισώσεις

$$x = \pm ct$$

που είναι οι διχοτόμοι των γωνιών του σχήματος.

Ένα σωμάτιο που κινείται με σταθερή ταχύτητα v και την χρονική στιγμή $t = 0$ περνάει από το σημείο Ο παριστάνεται από μια ευθεία γραμμή που βρίσκεται μέσα στην γωνία ΑΟΓ. Αντιστρόφως όλες οι γραμμές που βρίσκονται μέσα στην γωνία παριστάνουν μια κοσμική γραμμή ενός σωματίου.

Τα σημεία που βρίσκονται στην γωνία ΔΟΒ είναι σημεία που ανήκουν στο παρελθόν του σημείου Ο ενώ τα σημεία που βρίσκονται στην γωνία ΑΟΓ είναι μελλοντικά σημεία. Αντιθέτως τα σημεία που βρίσκονται μέσα στις γωνίες ΓΟΒ ή ΑΟΔ ανήκουν άλλοτε στο παρελθόν και άλλοτε στο μέλλον του σημείου Ο ανάλογα με το σύστημα αναφοράς. Υπάρχει επίσης ένα σύστημα αναφοράς ως προς το οποίο το συμβάν που βρίσκεται στις περιοχές αυτές είναι ταυτόχρονο με το συμβάν που περιγράφεται από το σημείο Ο.

Θεωρούμε δύο συμβάντα x_1, t_1 και x_2, t_2. Το διάστημα μεταξύ των δύο αυτών συμβάντων δίνεται από την σχέση

$$s_{12}^2 = c^2(t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2$$

Θα ονομάζουμε το διάστημα αυτό χρονικού είδους αν ισχύει η σχέση

$$s_{12}^2 = c^2(t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 > 0$$

Θα ονομάζουμε το διάστημα αυτό χωρικού είδους αν ισχύει η σχέση

$$s_{12}^2 = c^2(t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 < 0$$

Έστω ένα σημείο P που βρίσκεται μέσα σε κάποια από τις γωνίες ΑΟΓ και ΔΟΒ με συντεταγμένες $x,\ ct$. Το σημείο βρίσκεται πάνω από την διχοτόμο της γωνίας και επομένως ισχύει προφανώς η σχέση

$$c^2t^2 - x^2 > 0$$

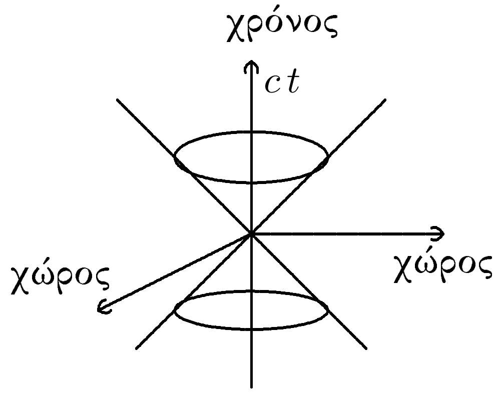
Άρα το διάστημα του σημείου αυτού με το σημείο Ο είναι χρονικού είδους. Τα διαστήματα όλων των σημείων που βρίσκονται μέσα στην γωνία αυτή είναι χρονικού είδους. Στην περιοχή $t > 0$ όλα τα γεγονότα συμβαίνουν μετά το Ο. Δεν υπάρχει σύστημα αναφοράς ως προς το οποίο το συμβάν P να συμβεί ταυτόχρονα ή πριν από το Ο. Αντιθέτως όλα τα σημεία στην περιοχή $t < 0$ προηγούνται σε όλα τα συστήματα αναφοράς του Ο.

Η πρόταση είναι γενικότερη. Δύο συμβάντα που χωρίζονται με διάστημα χρονικού τύπου το ένα προηγείται του άλλου και δεν υπάρχει σύστημα αναφοράς ώστε τα δύο αυτά συμβάντα να συμβούν ταυτόχρονα. Ονομάζουμε την περιοχή της γωνίας ΑΟΓ απόλυτο μέλλον του σημείου Ο και την περιοχή της γωνίας ΒΟΔ απόλυτο παρελθόν.

Θεωρούμε τώρα τις περιοχές των γωνιών ΑΟΔ και ΓΟΒ. Έστω ένα συμβάν Q στις περιοχές αυτές με συντεταγμένες x', ct'. Το σημείο βρίσκεται κάτω από την διχοτόμο της γωνίας και προφανώς ισχύει ή σχέση

$$c^2t^2 - x^2 < 0$$

Άρα το διάστημα του σημείου αυτού με το σημείο Ο είναι χωρικού είδους. Τα διαστήματα όλων των σημείων που βρίσκονται μέσα στις γωνίες αυτές είναι χωρικού είδους. Για τα συμβάντα στις περιοχές αυτές δεν μπορούμε να πούμε ότι προηγούνται ή έπονται ή είναι ταυτόχρονα του συμβάντος του σημείου Ο. Οι έννοιες αυτές είναι ανάλογες με το σύστημα αναφοράς.



Σχήμα 7.4
Ο κώνος του φωτός

Αν σχεδιάσουμε και τους υπόλοιπους άξονες y και z το σχήμα θα είναι ένας διπλός κώνος που ονομάζεται κώνος φωτός. Ο άξονας του κώνου είναι ο χρονικός άξονας.

Δύο συμβάντα που χωρίζονται με διάστημα χωρικού τύπου συμβαίνουν σε διαφορετικά σημεία σε κάθε σύστημα αναφοράς. Επί πλέον υπάρχουν συστήματα αναφοράς που το ένα προηγείται χρονικά του άλλου, συστήματα που το ένα έπεται του άλλου και ένα σύστημα αναφοράς που τα δύο συμβάντα γίνονται ταυτόχρονα. Επειδή καμία αλληλεπίδραση δεν διαδίδεται με ταχύτητα μεγαλύτερη από την ταχύτητα c τα συμβάντα αυτά δεν μπορούν να συνδέονται με καμιά αιτιατή σχέση, δηλαδή το ένα να προκαλεί το άλλο.

Αντιθέτως τα συμβάντα που χωρίζονται με διάστημα χρονικού είδους είναι δυνατόν το ένα να προκαλεί το άλλο και κατά συνέπεια το ένα να είναι το αίτιο και το άλλο το αποτέλεσμα. Οι μετασχηματισμοί Λόρεντς δεν μπορούν να μεταβάλλουν τα διαστήματα χρονικού είδους σε διαστήματα χωρικού είδους ή αντιστρόφως.

7.7 Η ομάδα Λόρεντς

Θα θεωρήσουμε τώρα ότι το κινούμενο σύστημα S' κινείται με ταχύτητα τυχούσα ως προς το ακίνητο σύστημα S. Για να απλοποιήσουμε τις εκφράσεις θα συμβολίσουμε τις χωρικές συντεταγμένες με x_1, x_2, x_3 αντί των x, y, z. Το σύστημα S' κινείται ομαλώς κατά την διεύθυνση του διανύσματος $\vec{\zeta} = (\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3)$ και οι μετασχηματισμοί Λόρεντς είναι μια υπερβολική περιστροφή υπό γωνία $\zeta = \|\vec{\zeta}\|$. Τα δύο αδρανιακά συστήματα ταυτίζονται στον χρόνο $t = 0$ του ακίνητου συστήματος. Οι μετασχηματισμοί Λόρεντς είναι

$$\begin{aligned} x'_j =& \left(\delta_{jk} + \zeta_j \zeta_k \frac{\cosh\zeta - 1}{\zeta^2}\right) x_k - c\,t \zeta_j \frac{\sinh\zeta}{\zeta} \\ c\,t' =& c\,t\cosh\zeta - x_j \zeta_j \frac{\sinh\zeta}{\zeta} \end{aligned}$$

Οι μετασχηματισμός αφήνει αναλλοίωτο το μήκος των διανυσμάτων που στην περίπτωση αυτή σημαίνει ότι

$$x'_j x'_j - c^2 t'^2 = x_j x_j - c^2 t^2$$

Μπορούμε να συνδυάσουμε τώρα δύο περιστροφές με διαφορετικές γωνίες ζ και ζ' γύρω από την ίδια διεύθυνση $\vec{\zeta}$ για να πάρουμε ένα τρίτο μετασχηματισμό γύρω από τον ίδιο άξονα με γωνία που δίνεται από το άθροισμα των ζ και ζ'. Το σύνολο όλων των μετασχηματισμών γύρω από τον άξονα $\vec{\zeta}$ με διάφορους γωνίες ζ σχηματίζουν μία ομάδα. Η ομάδα έχει μία παράμετρο. Αν όμως προσπαθήσουμε να συνδυάσουμε δύο μετασχηματισμούς Λόρεντς με διαφορετικές διευθύνσεις ζ_1 και ζ_2 το αποτέλεσμα δεν θα είναι ένας μετασχηματισμός Λόρεντς. Το αποτέλεσμα θα περιέχει και μια περιστροφή στον τριδιάστατο χώρο. Για να αντιμετωπίσουμε το πρόβλημα αυτό πρέπει να ορίσουμε έναν πιο γενικό μετασχηματισμό Λόρεντς

Θεωρούμε δύο συστήματα S και S'. Ο πιο γενικός μετασχηματισμός Λόρεντς που συνδέει τα δύο αυτά συστήματα κατασκευάζεται ως εξής. Πρώτα περιστρέφουμε το σύστημα S γύρο από την διεύθυνση $\vec{\alpha}$ και πηγαίνουμε στο σύστημα S_1. Θα συμβολίσουμε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων στο σύστημα αυτό με $x_j^{(1)}$. Το σύστημα S_1 είναι τέτοιο ώστε να έχει τους χωρικούς άξονες παράλληλους με τους αντίστοιχους άξονες του S'. Ο χρόνος παραμένει αμετάβλητος.

Κατόπιν εφαρμόζουμε στο σύστημα S_1 μια κατάλληλη "φανταστική" περιστροφή Λόρεντς γύρο από την διεύθυνση $\vec{\zeta}$ ώστε να καταλήξουμε στο σύστημα S'. Θα περιγράψουμε τους δύο αυτούς διαδοχικούς μετασχηματισμούς με $(\vec{\zeta}, \vec{\alpha})$. Γράφουμε

$$\begin{aligned} S_1 = \alpha S : \qquad & x_j^{(1)} = A_{jk}(\vec{\alpha}) x_k, \qquad\qquad t^{(1)} = t \\ S' = \zeta S_1 = (\vec{\zeta}, \vec{\alpha}) S : \quad & x'_l = \left(\delta_{lj} + \zeta_l \zeta_j \frac{\cosh \zeta - 1}{\zeta^2} \right) x_j - c t \zeta_l \frac{\sinh \zeta}{\zeta} \\ & c t' = c t \cosh \zeta - x_l \zeta_l \frac{\sinh \zeta}{\zeta} \end{aligned}$$

Θα γράψουμε τώρα τον μετασχηματισμό αυτό Λόρεντς σε μια πιο βολική μορφή χρησιμοποιώντας διανύσματα τεσσάρων διαστάσεων. Συμβολίζουμε με x ένα τετραδιάνυσμα με συνιστώσες x^μ. Ο πάνω δείκτης μ παίρνει τις τιμές $0, 1, 2, 3$.

Ορίζουμε την χρονική συνιστώσα από την σχέση

$$x^0 = c t$$

ενώ οι συνιστώσες x^j είναι οι τρεις χωρικές συνιστώσες του διανύσματος

$$x^j = x_j$$

Θα λέμε ότι το διάνυσμα x έχει συναλλοίωτες συνιστώσες τα x^μ ενώ τα x_μ ονομάζονται αδιαλλοίωτες συνιστώσες του διανύσματος. Εισάγουμε τέλος και τον συμμετρικό τανυστή $g_{\mu\nu}$ που τα μόνα μη μηδενικά στοιχεία του είναι τα εξής

$$g_{00} = -1, \qquad g_{11} = 1 \qquad g_{22} = 1 \qquad g_{33} = 1$$

Ο τανυστής $g^{\mu\nu}$ είναι αντίστροφος του τανυστή $g_{\mu\nu}$ δηλαδή

$$g^{\mu\lambda} g_{\lambda\nu} = \delta^\mu_\nu$$

Ο τανυστής $g^{\mu\nu}$ είναι μηδέν εκτός από τα στοιχεία

$$g^{00} = -1, g^{11} = g^{22} = g^{33} = 1$$

Με την βοήθεια του τανυστή αυτού μπορούμε να ανεβάσουμε ή να κατεβάσουμε τους δείκτες του διανύσματος. Γράφουμε

$$x_\mu = g_{\mu\nu}x^\nu, \quad x^\mu = g^{\mu\nu}x_\nu \qquad \text{δηλαδή} \qquad x_0 = -x^0, \quad x_j = x^j$$

Ο γενικός μετασχηματισμός Λόρεντς με τον παραπάνω συμβολισμό είναι

$$x'^{\,\mu} = \Lambda^\mu_\nu x^\nu$$

όπου η μήτρα Λ^μ_ν δίνεται από τις σχέσεις

$$\begin{aligned}
\Lambda^j_k(\vec{\zeta},\vec{\alpha}) =& A_{jk}(\vec{\alpha}) + \zeta_j\zeta_m A_{mk}(\vec{\alpha})\frac{\cosh\zeta - 1}{\zeta^2}\\
\Lambda^j_0(\vec{\zeta},\vec{\alpha}) =& -\zeta_j\frac{\sinh\zeta}{\zeta}\\
\Lambda^0_k(\vec{\zeta},\vec{\alpha}) =& -\zeta_m \mathrm{A}_{mk}(\vec{\alpha})\frac{\sinh\zeta}{\zeta}\\
\Lambda^0_0(\vec{\zeta},\vec{\alpha}) =& \cosh\zeta
\end{aligned}$$

Ο μετασχηματισμός αυτός αφήνει αναλλοίωτη την έκφραση $x_j^2 - c^2t^2$. Με τον παραπάνω συμβολισμό γράφουμε

$$x'^{\,\mu}x'_\mu = x^\mu x_\mu$$

Η μήτρα Λ του μετασχηματισμού είναι μια μήτρα 4×4 και ικανοποιεί την σχέση

$$g_{\mu\mu'}\Lambda^\mu_\nu\Lambda^{\mu'}_{\nu'} = g_{\nu\nu'}$$

Το σύνολο των μετασχηματισμών $S' = (\vec{\zeta},\vec{\alpha})S$ σχηματίζουν ομάδα που ονομάζεται ομογενής ομάδα Λόρεντς. Η ομάδα έχει έξι παραμέτρους όλα τα πιθανά διανύσματα $\vec{\zeta}$ και $\vec{\alpha}$.

Για να ορίσουμε τον νόμο της ομάδας θεωρούμε τρία αδρανιακά συστήματα S, S' και S''. Τα S, S' και τα S', S'', συνδέονται με τους μετασχηματισμούς Λ και Λ' αντιστοίχως. Τα συστήματα S και S'' συνδέονται μεταξύ τους με τον μετασχηματισμό $\Lambda'\Lambda$ που είναι το γινόμενο των δύο πινάκων. Πράγματι έχουμε

$$S'' = \Lambda'\Lambda S: \qquad x''^{\mu} = \Lambda'^{\mu}_{\nu} x'^{\nu} = \Lambda'^{\mu}_{\nu}\Lambda^{\nu}_{\lambda}x^{\lambda} = (\Lambda'\Lambda)^{\mu}_{\lambda}\, x^{\lambda}$$

Ο αντίστροφος πίνακας του Λ βρίσκεται από την σχέση (5) και είναι

$$\left(\Lambda^{-1}\right)^{\mu}_{\nu} = g^{\mu\mu'} g_{\nu\nu'} \Lambda^{\nu'}_{\mu'} = \Lambda^{\mu}_{\nu} \qquad \text{ή} \qquad (\zeta_j, \alpha_j)^{-1} = (-A_{kj}(\vec{\alpha})\zeta_k, -\alpha_j)$$

Η μη ομογενής ομάδα Λόρεντς προκύπτει από την ομογενή αν προσθέσουμε και μία μεταφορά των συντεταγμένων του χώρου και του χρόνου. Εισάγουμε το τετραδιάνυσμα α^{μ} όπου

$$\alpha^{j} = \alpha_j$$

είναι ο χωρικές συνιστώσες και

$$\beta = \alpha^0 = -\alpha_0$$

είναι η χρονική συνιστώσα του διανύσματος. Ο μετασχηματισμός αυτός περιγράφεται από τις εξισώσεις.

$$S' = (\Lambda, \alpha^{\mu})\, S \qquad x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu}x^{\nu} + \alpha^{\nu}$$

Ο νόμος συνθέσεως της ομάδας δίνεται από την σχέση

$$(\Lambda', \alpha'^{\mu})\,(\Lambda, \alpha^{\mu}) = (\Lambda'\Lambda, \alpha'^{\mu} + \Lambda'^{\mu}_{\nu}\alpha^{\nu})$$

και το αντίστροφο στοιχείο του (Λ, α^{μ}) είναι

$$(\Lambda, \alpha^{\mu})^{-1} = \left(\Lambda^{-1}, -(\Lambda^{-1})^{\mu}_{\nu}\alpha^{\nu}\right)$$

Η ομάδα ονομάζεται συνήθως και ομάδα Πουανκαρέ. Είναι μια ομάδα με δέκα παραμέτρους, η αντίστοιχη της ομάδας Γαλιλαίου της κλασσικής μηχανικής.

7.8 Η κινηματική

Στην παράγραφο αυτή θα βρούμε τους μετασχηματισμούς Λόρεντς για τις ταχύτητες και τις επιταχύνσεις.

Θεωρούμε πάλι δύο αδρανιακά συστήματα αναφοράς S και S' που κινούνται με σχετική ταχύτητα v. Έστω ένα σήμα με ταχύτητες

$$\vec{u} = \frac{d\vec{r}}{dt} \qquad \vec{u}' = \frac{d\vec{r}'}{dt'}$$

στα συστήματα S και S' αντιστοίχως. Οι συντεταγμένες των δύο συστημάτων συνδέονται με τους μετασχηματισμούς Λόρεντς. Επομένως έχουμε

$$dx = \gamma\left(dx' + v dt'\right), \qquad dy = dy' \qquad dz = dz' \qquad dt = \gamma\left(dt' + \frac{v}{c^2}dx'\right)$$

όπου έχουμε θέσει $\gamma = (1-\beta^2)^{-1/2}$

Οι ζητούμενες ταχύτητες βρίσκονται αν διαιρέσουμε κατάλληλα τις παραπάνω σχέσεις. Έχουμε

$$\begin{aligned}
u_x &= \frac{dx}{dt} = \frac{dx' + v dt'}{dt' + \frac{v}{c^2}dx'} = \frac{dx'/dt' + v}{1 + \frac{v}{c^2}\frac{dx'}{dt'}} = \frac{u'_x + v}{1 + \frac{v}{c^2}u'_x} \\
u_y &= \frac{dy}{dt} = \frac{dy'}{\gamma\left(dt' + \frac{v}{c^2}dx'\right)} = \frac{dy'/dt'}{\gamma\left(1 + \frac{v}{c^2}\frac{dx'}{dt'}\right)} = \frac{u'_y\sqrt{1-\beta^2}}{1 + \frac{v}{c^2}u'_x} \\
u_z &= \frac{dz}{dt} = \frac{dz'}{\gamma\left(dt' + \frac{v}{c^2}dx'\right)} = \frac{dz'/dt'}{\gamma\left(1 + \frac{v}{c^2}\frac{dx'}{dt'}\right)} = \frac{u'_z\sqrt{1-\beta^2}}{1 + \frac{v}{c^2}u'_x}
\end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι αν και η σχετική ταχύτητα v των δύο συστημάτων είναι παράλληλη προς τον άξονα x το διάνυσμα της ταχύτητας επηρεάζεται και στις τρεις διευθύνσεις. Όταν η ταχύτητα v είναι μικρή σχετικά με την ταχύτητα c ή ισοδύναμα στο όριο $c \to \infty$ τότε οι παραπάνω εξισώσεις γίνονται

$$u_x = u'_x + v \qquad u_y = u'_y \qquad u_z = u'_z$$

που είναι οι γνωστές εξισώσεις της κλασσικής μηχανικής.

Αν η ταχύτητα του σήματος είναι παράλληλη προς το x' άξονα και έχει τιμή ίση με c τότε οι μετασχηματισμοί Λόρεντς για τις ταχύτητες δίνουν

$$u_x = \frac{u'_x + v}{1 + \frac{v}{c^2}u'_x} = \frac{c + v}{1 + \frac{v}{c^2}c} = c$$

Δηλαδή το φως κινείται με την ταχύτητα c και ως προς το κινούμενο και ως προς το ακίνητο σύστημα αναφοράς.

Προσεγγιστηκές εκφράσεις για τις ταχύτητες μπορούμε να βρούμε αν αναλύσουμε τις σχέσεις μέχρι όρους πρώτης τάξεως ως προς v. Υποθέτουμε δηλαδή ότι η σχετική ταχύτητα v των δύο συστημάτων είναι μικρή και επομένως όροι με v^2 και ανώτεροι παραλείπονται. Έχουμε

$$u_x = u'_x + v\left(1 - u'^2_x/c^2\right) \qquad u_y = u'_y - u'_y u'_x v/c^2 \qquad u_z = u'_z - u'_z u'_x v/c^2$$

Μπορούμε να γράψουμε τις παραπάνω σχέσεις στην ακόλουθη διανυσματική μορφή

$$\vec{u} = \vec{u}\,' + \vec{v} - \frac{1}{c^2}\left(\vec{v}\cdot\vec{u}\,'\right)\vec{u}\,' \qquad \text{όπου} \qquad \vec{v} = (v,0,0)$$

Οι μετασχηματισμοί Λόρεντς για την επιτάχυνση ενός υλικού σημείου βρίσκεται αν παραγωγίσουμε ως προς τον χρόνο της ταχύτητες.

$$\begin{aligned}
\gamma_x = \frac{du_x}{dt} &= \frac{dt'}{dt}\frac{du_x}{dt'} = \frac{dt'}{dt}\frac{d}{dt'}\frac{u'_x + v}{1 + \frac{v}{c^2}u'_x} = \\
&= \frac{dt'}{dt}\left[\frac{\left(1 + \frac{v}{c^2}u'_x\right)\frac{d}{dt'}\left(u'_x + v\right) - \left(u'_x + v\right)\frac{d}{dt'}\left(1 + \frac{v}{c^2}u'_x\right)}{\left(1 + \frac{v}{c^2}u'_x\right)^2}\right] = \\
&= \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{1 + \frac{v}{c}u_x}\left[\frac{\left(1 + \frac{v}{c^2}u'_x\right)\gamma'_x - \left(u'_x + v\right)\frac{v}{c^2}\gamma'_x}{\left(1 + \frac{v}{c^2}u'_x\right)^2}\right] = \frac{\gamma'_x}{\gamma^3\left(1 + \frac{v}{c^2}u'_x\right)^3}
\end{aligned}$$

Ανάλογες εκφράσεις με τον ίδιο τρόπο βρίσκουμε και για τις υπόλοιπες συνιστώσες της επιταχύνσεως.

$$\begin{aligned}
\gamma_y &= \frac{\gamma'_y}{\gamma^2\left(1 + \frac{v}{c^2}u'_x\right)^2} - \frac{\frac{vu'_y}{c^2}\gamma'_x}{\gamma^2\left(1 + \frac{v}{c^2}u'_x\right)^3} \\
\gamma_z &= \frac{\gamma'_z}{\gamma^2\left(1 + \frac{v}{c^2}u'_x\right)^2} - \frac{\frac{vu'_z}{c^2}\gamma'_x}{\gamma^2\left(1 + \frac{v}{c^2}u'_x\right)^3}
\end{aligned}$$

Παρατηρούμε και πάλι ότι στο κλασσικό όριο $c \to \infty$ καταλήγουμε πάλι στις κλασσικές εκφράσεις

$$\gamma_x = \gamma'_x,\ \gamma_y = \gamma'_y,\ \gamma_z = \gamma'_z$$

Αν για κάποια χρονική στιγμή το κινούμενο σύστημα ηρεμεί δηλαδή $u'_x = u'_y = u'_z = 0$ τότε οι μετασχηματισμοί Λόρεντς για τις επιταχύνσεις δίνουν τους ακόλουθους μετασχηματισμούς.

$$\gamma_x = \frac{1}{\gamma^3}\gamma'_x \qquad \gamma_y = \frac{1}{\gamma^2}\gamma'_y \qquad \gamma_z = \frac{1}{\gamma^2}\gamma'_z$$

7.9 Η σχετικιστική δυναμική

Θα μελετήσουμε στην παράγραφο αυτή την κίνηση του ελεύθερου σωματίου. Θα χρησιμοποιήσουμε την αρχή της ελάχιστης δράσεως.

Το ολοκλήρωμα δράσεως για ένα ελεύθερο σωμάτιο εξαρτάται από το διάστημα ds που είναι αναλλοίωτο από τους μετασχηματισμούς του Λόρεντς και δεν εξαρτάται από το σύστημα αναφοράς. Το ολοκλήρωμα αυτό πρέπει να είναι

$$S = -k\int_a^b ds$$

όπου k είναι μια θετική σταθερά που θα προσδιοριστεί αργότερα. Το αρνητικό σημείο μπαίνει έτσι ώστε το ολοκλήρωμα να έχει ελάχιστο. Το ολοκλήρωμα γίνεται κατά μήκος μιας γραμμής που συνδέει τα σημεία a και b που παριστάνουν την αρχική και τελική θέση του σωματιδίου στους χρόνους t_1 και t_2 αντιστοίχως. Αλλά για το αδρανειακό σύστημα που κινείται μαζί με το σωμάτιο έχουμε $ds = c\sqrt{1 - v^2/c^2}$. Επομένως βρίσκουμε

$$S = -kc\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

Είναι όμως γνωστό ότι το ολοκλήρωμα της δράσεως είναι $S = \int L dt$ όπου L είναι η συνάρτηση Λαγκράνζ του συστήματος. Επομένως έχουμε

$$L = -kc\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

Η συνάρτηση αυτή πρέπει να καταλήγει στην κλασσική, μη σχετικιστική έκφραση $L = mv^2/2$ στο όριο $c \to \infty$. Από το γεγονός αυτό Θα υπολογίσουμε τώρα την σταθερά k. Αναλύουμε την συνάρτηση Λαγκράνζ κατά Τέυλορ σε δυνάμεις του $v/c << 1$. Βρίσκουμε

$$L = -kc\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2} = -kc\left(1 - \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2} + \cdots\right) = -kc + \frac{kv^2}{2c} - \cdots$$

Ο σταθερός όρος $-kc$ δεν επηρεάζει τις εξισώσεις κινήσεως και μπορεί να παραληφθεί. Συγκρίνουμε την παραπάνω έκφραση με την αντίστοιχη κλασσική και βρίσκουμε $k = mc$. Άρα η σχετικιστική συνάρτηση του Λαγκράνζ για το ελεύθερο σωμάτιο είναι τελικά

$$L = -mc^2\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

7.10 Η ορμή και η ενέργεια

Είναι γνωστό από το προηγούμενο κεφάλαιο ότι οι ορμές p_i ορίζονται από την παράγωγους της L ως προς τις ταχύτητες $\dot{q}_i$. Δηλαδή ισχύουν οι σχέσεις

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \qquad \text{ή συμβολικά} \quad \vec{p} = \frac{\partial L}{\partial \vec{v}}$$

Παραγωγίζουμε την συνάρτηση Λαγκράνζ και βρίσκουμε την σχετικιστική ορμή

$$\vec{p} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

Η σχέση αυτή για μικρές τιμές για την ταχύτητα $\vec{v}$ καταλήγει στην κλασσική έκφραση της ορμής. Πράγματι παίρνουμε το όριο της παραπάνω εκφράσεως της σχετικιστικής ορμής για $c \to \infty$ και βρίσκουμε την γνωστή κλασσική εξίσωση

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

Μπορούμε επίσης να γράψουμε την σχετικιστική ορμή με την κλασσική έκφραση $\vec{p} = m(v)\vec{v}$ όπου προφανώς η μάζα $m(v)$ δίνεται από την σχέση

$$m(v) = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

Η μάζα ενός σώματος αυξάνει με την ταχύτητα. Το φωτόνιο με ταχύτητα ίση με την ταχύτητα c έχει μάζα ηρεμίας μηδέν $m_0 = 0$ έτσι ώστε η παραπάνω έκφραση για το φωτόνιο όπου $v = c$ να δίνει την αόριστη έκφραση $0/0$. Όλα τα σωμάτια με μηδενική μάζα ηρεμίας κινούνται με την ταχύτητα του φωτός. Εκτός από το φωτόνιο και το νετρίνο είναι ένα σωμάτιο που κινείται με την ταχύτητα του φωτός και έχει μάζα ηρεμίας μηδέν.

Θα βρούμε τώρα την σχετικιστική ενέργεια ενός υλικού σημείου. Θα χρησιμοποιήσουμε την πρόταση της κλασσικής μηχανικής που λέει ότι η μεταβολή της κινητικής ενέργειας ισούται με το έργο της δυνάμεως. Στην σχετικιστική μηχανική επειδή η μάζα μεταβάλλεται με την ταχύτητα είμαστε υποχρεωμένοι να τροποποιήσουμε τον νόμο του Νεύτωνα. Ο δυναμικός νόμος που ισχύει εδώ είναι

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt}\frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

Το σύστημα αναφοράς είναι το ακίνητο σύστημα του εργαστηρίου.

Παρατήρηση: Η κατάλληλη σχετικιστική συνάρτηση Λαγκράνζ για να βγει η εξίσωση αυτή είναι

$$L = -mc^2\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} - V$$

πράγματι βρίσκουμε

$$\frac{\partial L}{\partial \vec{v}} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

και άρα οι εξισώσεις του Λαγκράνζ είναι

$$\frac{d}{dt}\frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = -\frac{\partial V}{\partial \vec{r}} = \vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

Υποθέτουμε για να απλοποιήσουμε τις σχέσεις, ότι η δύναμη έχει την διεύθυνση του $x-$άξονα. Το έργο W της δυνάμεως δίνεται από την σχέση

$$W = \int F dx = \int \frac{d}{dt}\frac{mv}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} dx = \int \frac{d}{dt}\left[mv\left(1 - v^2/c^2\right)^{-1/2}\right]\frac{dx}{dt}dt =$$

$$= \int \left[m\left(1 - v^2/c^2\right)^{-1/2} + mv^2/c^2\left(1 - v^2/c^2\right)^{-3/2}\right]\frac{dv}{dt}v dt =$$

$$= \int \left[m\left(1 - v^2/c^2\right)^{-3/2}\right]\frac{dv}{dt}v dt = \int \frac{d}{dt}\left[mc^2\left(1 - v^2/c^2\right)^{-1/2}\right]dt$$

Μπορούμε τώρα να εκτελέσουμε εύκολα την ολοκλήρωση και να βρούμε το έργο.

$$W = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

Το έργο είναι ίσο με την διαφορά των κινητικών ενεργειών. Έχουμε

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

Θα βρούμε τώρα το όριο της σχέσεως αυτής για μικρές ταχύτητες. Αναλύουμε την παραπάνω σχέση ως προς την ταχύτητα διατηρώντας μόνο τους τετραγωνικούς όρους. Για μικρές τιμές του λόγου v/c εχουμε

$$E = mc^2 \left(1 + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2} + \cdots\right) = mc^2 + \frac{1}{2}mv^2$$

Ο πρώτος όρος είναι μία σταθερά και ο δεύτερος είναι η κλασσική έκφραση της κινητικής ενέργειας. Παρατηρούμε ότι και γι αυτόν τον τύπο για μικρές τιμές της ταχύτητας παίρνουμε την αντίστοιχη κλασσική σχέση.

Αν η ταχύτητα του υλικού σωματίου είναι μηδέν τότε η σχέση της σχετικιστικής ενέργειας γράφεται

$$E = mc^2$$

Είναι η περίφημη σχέση ισοδυναμίας ενεργείας και μάζας.

Την ίδια σχέση για την ενέργεια μπορούμε να βρούμε από την σχέση της αναλυτικής μηχανικής της προηγούμενης παραγράφου

$$E = \sum_i p_i \dot{q}_i - L = \vec{p} \cdot \vec{v} - L$$

Αντικαθιστούμε την σχέση αυτή την ορμή $\vec{p}$ και την συνάρτηση Λαγκράνζ από τις γνωστές ήδη σχέσεις και βρίσκουμε

$$E = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \cdot \vec{v} + mc^2\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{mv^2 + mc^2\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

Μια άλλη έκφραση που συνδέει τα παραπάνω μεγέθη δίνεται από την σχέση

$$\vec{p} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \frac{\vec{v}}{c^2} \qquad \Longrightarrow \qquad \vec{p} = \frac{E}{c^2}\vec{v}$$

Από την σχέση αυτή μπορούμε να βρούμε την σχέση ενεργείας ορμής για τα υλικά σωμάτια που τρέχουν με την ταχύτητα του φωτός. Θέτουμε $v = c$ και βρίσκουμε για την ενέργεια των φωτονίων την σχέση

$$E = pc$$

Θα βρούμε τέλος την ενέργεια σαν συνάρτηση της ορμής. Για να βρούμε την σχέση αυτή θα απαλείψουμε την ταχύτητα από τις προηγούμενες σχέσεις. Έχουμε

$$\vec{p} \cdot \vec{p} = \frac{m^2}{1 - v^2/c^2} v^2 = p^2 \quad \Longrightarrow \quad v^2 = \frac{p^2}{m^2 + p^2/c^2}$$

Την τιμή αυτή της ταχύτητας θα αντικαταστήσουμε στην έκφραση της σχετικιστικής ενέργειας. Έχουμε

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{p^2}{p^2 + m^2c^2}}} = \frac{mc^2}{\sqrt{\frac{m^2c^2}{p^2 + m^2c^2}}} = \sqrt{p^2c^2 + m^2c^4}$$

Η συνάρτηση του Χάμιλτον βρίσκεται εύκολα από την σχέση αυτή. Βρίσκουμε

$$H = \sqrt{p^2c^2 + m^2c^4} + V$$

Είναι δηλαδή η συνολική ενέργεια που παραμένει σταθερή. Γενικότερα η Χαμιλτονιανή ενός σωματίου με φορτίο e μέσα σε ηλεκτρομαγνητικό πεδίο που προσδιορίζεται από το διανυσματικό δυναμικό $\vec{A}(\vec{r}, t)$ και από το βαθμωτό δυναμικό $\varphi(\vec{r}, t)$ είναι

$$H = \sqrt{\left(p - \frac{e}{c}\vec{A}(\vec{r}, t)\right)^2 c^2 + m^2c^4} + e\varphi(\vec{r}, t)$$

Αν συμβολίσουμε με $E_0 = mc^2$ την ενέργεια του υλικού σωματίου με ταχύτητα μηδέν $(p = 0)$ τότε έχουμε

$$E = \sqrt{m^2c^4 + p^2c^2} = \sqrt{E_0^2 + p^2c^2} \quad \Longrightarrow \quad E^2 - (cp)^2 = m^2c^4 = E_0^2$$

Το μέγεθος $E^2 - (cp)^2$ είναι ίσο με μία σταθερά και επομένως είναι αναλλοίωτο από τον μετασχηματισμό του Λόρεντς. Δηλαδή αν στο σύστημα αναφοράς S η ορμή και η ενέργεια είναι p και E και στο σύστημα αναφοράς S' η ορμή και η ενέργεια είναι p' και E' τότε ισχύει η σχέση

$$E_0^2 = m^2c^4 = E^2 - (cp)^2 = E'^{\,2} - (cp')^2$$

Η σχέση ισχύει διότι η ενέργεια και η ορμή μεταβάλλονται γραμμικά από τους μετασχηματισμούς του Λόρεντς. Η πρόταση αποδεικνύεται στις ασκήσεις.

Ασκήσεις

Άσκηση 7.1

Να βρεθεί πως μετασχηματίζεται η ενέργεια και η ορμή ενός υλικού σημείου με τους μετασχηματισμούς Λόρεντς.

Λύση: Οι σχέσεις που δίνουν την ορμή και την ενέργεια στην ειδική θεωρίας της σχετικότητας είναι

$$E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \qquad \vec{p} = \frac{m_0 \vec{u}}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}$$

Οι μετασχηματισμοί για τις ταχύτητες έχουν βρεθεί και επομένως έχουμε

$$1 - \frac{u^2}{c^2} = 1 - \frac{1}{c^2}\left(u_x^2 + u_y^2 + u_z^2\right) = 1 - \frac{1}{c^2}\left(\frac{u'_x + v}{1 + (v/c^2)u'_x}\right)^2 -$$

$$-\frac{1}{c^2}\left(\frac{u'_y\sqrt{1-(v/c)^2}}{1 + (v/c^2)u'_x}\right)^2 - \frac{1}{c^2}\left(\frac{u'_z\sqrt{1-(v/c)^2}}{1 + (v/c^2)u'_x}\right)^2 =$$

$$\frac{c^2\left(1 + (v/c^2)u'_x\right)^2 - (u'_x + v)^2}{c^2\left(1 + (v/c^2)u'_x\right)^2} - \frac{u'^2_y(1-(v/c)^2)}{c^2(1 + (v/c^2)u'_x)^2} - \frac{u'^2_z(1-(v/c)^2)}{c^2(1 + (v/c^2)u'_x)^2} =$$

$$\frac{c^2 + (v/c)^2 u'^2_x - u'^2_x - v^2 - u'^2_y(1-(v/c)^2) - u'^2_z(1-(v/c)^2)}{c^2\left(1 + (v/c^2)u'_x\right)^2} =$$

$$\frac{1-(v/c)^2}{c^2\left(1 + (v/c^2)u'_x\right)^2}\left(c^2 - u'^2_x - u'^2_y - u'^2_y\right) = \frac{\left(1-(v/c)^2\right)\left(1-(u'/c)^2\right)}{\left(1 + (v/c^2)u'_x\right)^2}$$

Μπορούμε τώρα να γράφουμε τον μετασχηματισμό για την ενέργεια και την ορμή. Έχουμε για την ενέργεια

$$E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} = \frac{m_0 c^2\left(1 + (v/c^2)u'_x\right)}{\sqrt{(1-(v/c)^2)}\sqrt{(1-(u'/c)^2)}} = \frac{1}{\sqrt{(1-(v/c)^2)}}$$

$$\left(\frac{m_0 c^2}{\sqrt{(1-(u'/c)^2)}} + v \frac{m_0 u'_x}{\sqrt{(1-(u'/c)^2)}} \right) = \frac{E' + v p'_x}{\sqrt{(1-(v/c)^2)}}$$

Για τον μετασχηματισμό της ορμής έχουμε

$$p_x = \frac{m_0 u_x}{\sqrt{1-u^2/c^2}} = \frac{m_0 \frac{u'_x + v}{1+\frac{v}{c^2}u'_x}\left(1+(v/c^2)u'_x\right)}{\sqrt{(1-(v/c)^2)}\sqrt{(1-(u'/c)^2)}} = \frac{1}{\sqrt{(1-(v/c)^2)}}$$

$$\left(\frac{m_0 u'_x}{\sqrt{(1-(u'/c)^2)}} + \frac{v}{c^2} \frac{m_0 c^2}{\sqrt{(1-(u'/c)^2)}} \right) = \frac{p'_x + (v/c^2)E'}{\sqrt{(1-(v/c)^2)}}$$

Οι υπόλοιπες συνιστώσες της ορμής παραμένουν αναλλοίωτες. Θα αποδείξουμε την πρόταση αυτή μόνο για την $y-$συνιστώσα της ορμής. Έχουμε

$$p_y = \frac{m_0 u_y}{\sqrt{1-u^2/c^2}} = \frac{m_0 \frac{u'_y\sqrt{1-\beta^2}}{1+\frac{v}{c^2}u'_x}\left(1+(v/c^2)u'_x\right)}{\sqrt{(1-(v/c)^2)}\sqrt{(1-(u'/c)^2)}} = \frac{m_0 u'_y}{\sqrt{1-u'^2/c^2}} = p'_y$$

Όμοια είναι και η απόδειξη για την τρίτη συνιστώσα της ορμής. Γράφουμε τελικά όλους του μετασχηματισμούς

$$E = \frac{E' + v p'_x}{\sqrt{(1-(v/c)^2)}} \qquad p_x = \frac{p'_x + (v/c^2)E'}{\sqrt{(1-(v/c)^2)}}$$

$$p_y = p'_y \qquad p_z = p'_z$$

Παρατηρούμε ότι οι μετασχηματισμοί είναι γραμμικοί όπως και οι μετασχηματισμοί θέσεως και χρόνου. Εδώ το μέγεθος που διατηρείται κατά τον μετασχηματισμό Λόρεντς είναι το $E^2 - (cp_x)^2 - (cp_y)^2 - (cp_z)^2$. Δηλαδή ισχύει η σχέση

$$E^2 - (cp_x)^2 - (cp_y)^2 - (cp_z)^2 = E'^2 - (cp'_x)^2 - (cp'_y)^2 - (cp'_z)^2 = E_0^2$$

Άσκηση 7.2

Να βρεθεί η τροχιά ενός υλικού σημείου μέσα σε ομογενές δυναμικό πεδίο

Λύση: Ομογενές δυναμικό πεδίο είναι το πεδίο εκείνο που σε κάθε σημείο του επενεργεί μια σταθερή δύναμη $\vec{f} = \vec{f_0}$. ΄Ενα τέτοιο πεδίο είναι το ηλεκτρικό πεδίο. Η δύναμη που επιδρά σε φορτισμένο σωμάτιο μέσα σε ηλεκτρικό πεδίο είναι

$$\vec{f} = e\vec{E}$$

όπου διάνυσμα $\vec{\mathrm{E}}$ είναι η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου.

Η εξίσωση της κινήσεως είναι

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{f_0}$$

ολοκληρώνουμε την σχέση αυτή και βρίσκουμε

$$\vec{p} = \vec{f_0}t + \vec{p_0}$$

όπου $\vec{p_0}$ είναι η ορμή του σωματίου για $t = 0$. Θα υποθέσουμε ότι η ορμή αυτή είναι μηδέν δηλαδή το υλικό σωμάτιο βρίσκεται αρχικά σε ηρεμία.

Η ταχύτητα του υλικού σημείου είναι

$$\vec{u} = \frac{c^2\vec{p}}{E} = \frac{c^2\vec{p}}{\sqrt{c^2p^2 + E_0^2}} = \frac{c^2\vec{f_0}t}{\sqrt{c^2(\vec{f_0}t)^2 + E_0^2}} = \frac{c\left(\vec{f_0}t\right)}{\sqrt{f_0^2t^2 + E_0^2/c^2}}$$

Παρατηρούμε ότι για $t \to \infty$ η ταχύτητα του υλικού σημείου γίνεται ίση με την ταχύτητα c. Η διεύθυνση της ταχύτητας έχει την διεύθυνση της δυνάμεως.

Η θέση του υλικού σημείου βρίσκεται με μία ακόμα ολοκλήρωση της παραπάνω σχέσεως. Θέτουμε

$$\vec{\gamma}_0 = \frac{\vec{f_0}}{E_0/c^2} = \frac{\vec{f_0}}{m_0}$$

και βρίσκουμε

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{\vec{\gamma}_0 t}{\sqrt{1 + \gamma_0^2t^2/c^2}} \quad \Longrightarrow \quad \vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{\gamma}_0\frac{c^2}{\gamma_0^2}\left(\sqrt{1 + \frac{\gamma_0^2t^2}{c^2}} - 1\right)$$

όπου $\vec{r}_0 = \vec{r}(0)$ είναι η αρχική θέση του συστήματος.

Η επιτάχυνση του υλικού σημείου βρίσκεται αν παραγωγίσουμε δύο φορές την παραπάνω σχέση. ῞Εχουμε

$$\vec{\gamma} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{\vec{\gamma}_0}{\left(1+\frac{\gamma_0^2 t^2}{c^2}\right)^{3/2}} \tag{1}$$

Αν και η δύναμη είναι σταθερή όμως η επιτάχυνση δεν είναι σταθερή, εξαρτάται από τον χρόνο. Η επιτάχυνση μικραίνει και τελικά μηδενίζεται για μεγάλους χρόνους. Αν η επιτάχυνση ήταν σταθερή τότε η ταχύτητα θα μεγάλωνε για μεγάλους χρόνους χωρίς όριο μέχρι το άπειρο πράγμα αντίθετο προς το πείραμα και τις αρχές της σχετικότητας.

Αν απλοποιήσουμε το πρόβλημα και θεωρήσουμε ότι η δύναμη είναι στην $x-$διεύθυνση $\vec{f}_0 = f_x$ και το υλικό σημείο βρίσκεται αρχικά στο σημείο μηδέν $\vec{r}_0 = 0$ η παραπάνω εξίσωση δίνει

$$\left(\frac{\gamma_0 x}{c^2}+1\right)^2 - \left(\frac{\gamma_0 t}{c}\right)^2 = 1 \qquad \text{όπου} \qquad \gamma_0 = f_x/m_0$$

Η κοσμική γραμμή της λύσεως είναι μια υπερβολή.

Αν πάρουμε το όριο της σχέσεως (1) για $c \to \infty$ θα βρούμε την κλασσική λύση του προβλήματος. Αναλύουμε το ριζικό κατά Τέηλορ και βρίσκουμε

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{\gamma}_0 \frac{c^2}{\gamma_0^2}\left(1+\frac{1}{2}\frac{\gamma_0^2 t^2}{c^2}+\cdots-1\right) \xrightarrow[c\to\infty]{} \vec{r}_0 + \vec{\gamma}_0\frac{t^2}{2}$$

δηλαδή την θέση του κλασσικού σωματιδίου με μηδενική αρχική ταχύτητα.

Άσκηση 7.3

Στην άσκηση αυτή θα βρούμε την σχέση που δίνει την μεταβολή της μάζας σαν συνάρτηση της ταχύτητας με την βοήθεια του πειράματος της ελαστικής κρούσεως δύο σωμάτων. Η απόδειξη αυτή δόθηκε από τον Μπορν.

Λύση: Θεωρούμε δύο υλικά σημεία με μάζα m_1 και m_2 που κινούνται με ταχύτητες u_1 και u_2 ως προς ένα σύστημα αναφοράς S. Τα υλικά σημεία συγκρούεται ελαστικά. Θεωρούμε ένα σύστημα αναφοράς S' με αρχή το κέντρο μάζας του συστήματος που κινείται με ταχύτητα v ως προς το ακίνητο σύστημα. Ως προς αυτό το σύστημα η μάζα m_1 κινείται με ταχύτητα $+u$ και η μάζα m_2 με ταχύτητα $-u$ ενώ μετά την σύγκρουση, επειδή η κρούση είναι ελαστική οι αντίστοιχες ταχύτητες είναι $-u$ και $+u$. Επιλέγουμε τον $x'-$ άξονα του συστήματος ώστε να είναι παράλληλος προς τις ταχύτητες.

Θα λύσουμε το πρόβλημα πρώτα κλασσικά. Σύμφωνα με την αρχή διατηρήσεως της ορμής στο ακίνητο σύστημα γράφουμε

$$m_1 u_1 + m_2 u_2 = (m_1 + m_2) v$$

Για να μεταφερθούμε στο κινούμενο σύστημα χρησιμοποιούμε τις κλασσικές σχέσεις του Γαλιλαίου, δηλαδή

$$u_1 = u' + v \qquad\qquad u_2 = -u' + v$$

και η σχέση δίνει

$$m_1 u_1 + m_2 u_2 = m_1(u' + v) + m_2(-u' + v) = (m_1 - m_2)u' + (m_1 + m_2)v =$$

$$= (m_1 + m_2)v \quad \Longrightarrow \quad (m_1 - m_2)u' = 0 \quad \Longrightarrow \quad m_1 = m_2$$

Θα εξετάσουμε τώρα το πρόβλημα στην σχετικιστική μηχανική. Εδώ δεν έχει έννοια το κέντρο μάζας αφού οι μάζες μεταβάλλονται. Αν μεταφερθούμε τώρα στο κινούμενο σύστημα με τους σχετικιστικούς μετασχηματισμούς του Λόρεντς.

$$u_1 = \frac{u' + v}{1 + u'v/c^2} \qquad\qquad u_2 = \frac{-u' + v}{1 - u'v/c^2}$$

θα βρούμε

$$m_1 u_1 + m_2 u_2 = m_1 \frac{u' + v}{1 + u'v/c^2} + m_2 \frac{-u' + v}{1 - u'v/c^2} = (m_1 + m_1)v \quad \Longrightarrow$$

$$m_1 \left(\frac{u' + v}{1 + u'v/c^2} - v \right) = m_2 \left(v - \frac{-u' + v}{1 - u'v/c^2} \right) \quad \Longrightarrow \frac{m1}{m_2} = \frac{1 + u'v/c^2}{1 - u'v/c^2}$$

Όμως ισχύουν οι σχέσεις

$$1 - \frac{u_1^2}{c^2} = 1 - \frac{1}{c^2} \left(\frac{u' + v}{1 + u'v/c^2} \right)^2 = \frac{c^2 + u'^2 v^2/c^2 - u'^2 - v^2}{c^2 \left(1 - u'v/c^2\right)^2}$$

$$1-\frac{u_2^2}{c^2}=1-\frac{1}{c^2}\left(\frac{-u'+v}{1-u'v/c^2}\right)^2=\frac{c^2+u'^2v^2/c^2-u'^2-v^2}{c^2\left(1+u'v/c^2\right)^2}$$

και έχουμε

$$\frac{\sqrt{1-u_2^2/c^2}}{\sqrt{1-u_1^2/c^2}}=\frac{1+u'v/c^2}{1-u'v/c^2}$$

Επομένως ο λόγος των μαζών γίνεται

$$\frac{m_1}{m_2}=\frac{\sqrt{1-u_2^2/c^2}}{\sqrt{1-u_1^2/c^2}}$$

Παρατηρούμαι ότι ενώ στην κλασσική μηχανική οι δύο μάζες πρέπει να είναι ίσες εδώ ο λόγος των μαζών ισούται με μια παράσταση που εξαρτάται από τις ταχύτητες των μαζών αυτών. Ο λόγος αυτών των μαζών γίνεται μονάδα, δηλαδή $m_1=m_2$, στο κλασσικό όριο για $c\to\infty$.

Υποθέτουμε ότι $u_2=0$ και $u_1=u$. Θέτουμε $m_2=m_0$ που ονομάζεται μάζα ηρεμίας. Η παραπάνω σχέση δίνει την μάζα m που ονομάζεται μάζα ορμής.

$$m(u)=\frac{m_0}{\sqrt{1-u^2/c^2}}$$

Η μάζα ενός σώματος αυξάνει με την ταχύτητα και γίνεται θεωρητικά άπειρη για ταχύτητες ίσες με την ταχύτητα του φωτός. Σημειώστε ότι τα φωτόνια που τρέχουν με την ταχύτητα του φωτός έχουν μάζα ηρεμίας m_0 ίση με μηδέν.

Ασκήσεις

Ασκήσεις Κεφαλαίου 1

Άσκηση 1

Να αποδειχτεί η ταυτότητα $\vec{b}\times(\vec{c}\times\vec{d}) = (\vec{b}\cdot\vec{d})\vec{c} - (\vec{b}\cdot\vec{c})\vec{d}$. Με την βοήθεια της ταυτότητας αυτής να αποδειχτεί η σχέση $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot(\vec{c}\times\vec{d}) = (\vec{a}\cdot\vec{c})(\vec{b}\cdot\vec{d}) - (\vec{a}\cdot\vec{d})(\vec{b}\cdot\vec{c})$ και η ταυτότητα Τζακόμπι $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})+\vec{b}\times(\vec{c}\times\vec{a})+\vec{c}\times(\vec{a}\times\vec{b}) = 0$.

Άσκηση 2

Να αποδειχτεί ότι αν η διανυσματική συνάρτηση $\vec{r}(t)$ είναι κάθετη στην παράγωγο της τότε έχει σταθερό μέτρο και αντιστρόφως. Επίσης να αποδειχτεί ότι η συνάρτηση $\vec{r}(t)$ έχει σταθερή διεύθυνση εάν και μόνο εάν είναι παράλληλη προς την παράγωγο της.

Άσκηση 3

Υποθέτουμε ότι συντεταγμένες u_1, u_2, u_3 είναι ορθογώνιες δηλαδή ισχύουν οι σχέσεις $\vec{r}_{u_1}\cdot\vec{r}_{u_2} = \vec{r}_{u_2}\cdot\vec{r}_{u_3} = \vec{r}_{u_3}\cdot\vec{r}_{u_1} = 0$. Να αποδειχτεί ότι ο τελεστής του Λαπλάς δίνεται από την σχέση $\vec{\nabla}^2 g =$

$$\frac{1}{U_1U_2U_3}\left[\frac{\partial}{\partial u_1}\left(\frac{U_2U_3}{U_1}\frac{\partial}{\partial u_1}g\right) + \frac{\partial}{\partial u_2}\left(\frac{U_3U_1}{U_2}\frac{\partial}{\partial u_2}g\right) + \frac{\partial}{\partial u_3}\left(\frac{U_1U_2}{U_3}\frac{\partial}{\partial u_3}g\right)\right]$$

όπου $U_i = \|\vec{r}_{u_i}\| = \left((\partial x/\partial u_i)^2 + (\partial y/\partial u_i)^2 + (\partial z/\partial u_i)^2\right)^{1/2}$. Να εφαρμόσετε τον τύπο για τις κυλινδρικές και τις σφαιρικές συντεταγμένες.

Απάντηση $\vec{\nabla}^2 g = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho g_\rho) + \frac{1}{\rho^2} g_{\varphi\varphi} + g_{zz}$

$$\vec{\nabla}^2 g = \frac{1}{r^2\,\text{ημ}\,\theta}\left[\text{ημ}\,\theta\frac{\partial}{\partial r}(r^2 g_r) + \frac{\partial}{\partial \theta}(\text{ημ}\,\theta g_\theta) + \frac{1}{\text{ημ}\,\theta} g_{\varphi\varphi}\right]$$

Άσκηση 4

Αν οι βαθμωτές συναρτήσεις φ και ψ έχουν συνεχείς παραγώγους πρώτης και δεύτερης τάξης, να αποδειχτούν οι ακόλουθες ταυτότητες του Γκρήν. $\iiint \vec{\nabla}\varphi \cdot \vec{\nabla}\psi dV + \iiint \varphi\vec{\nabla}^2\psi dV = \oiint \varphi(d\psi/dn)dS$ και $\iiint(\varphi\vec{\nabla}^2\psi - \psi\vec{\nabla}^2\varphi)dV = \oiint(\varphi(d\psi/dn) - \psi(d\varphi/dn))dS$. (Υπόδειξη: Εφαρμόστε το θεώρημα της απόκλισης για το διάνυσμα $\vec{f} = \varphi\vec{\nabla}\psi$).

Άσκηση 5

Αν $\vec{\mathrm{T}}$, $\vec{\mathrm{N}}$, $\vec{\mathrm{B}}$ είναι το εφαπτόμενο διάνυσμα, η πρώτη κάθετος και η δεύτερη κάθετος μιας καμπύλης να αποδείξετε ότι τα διανύσματα αυτά ικανοποιούν τις ακόλουθες σχέσεις

$$\frac{d\vec{\mathrm{T}}}{ds} = \kappa\vec{\mathrm{N}}, \quad \frac{d\vec{\mathrm{B}}}{ds} = -\tau\vec{\mathrm{N}}, \quad \frac{d\vec{\mathrm{N}}}{ds} = \tau\vec{\mathrm{B}} - \kappa\vec{\mathrm{T}}$$

Το κ ονομάζεται καμπυλότητα και το τ στρέψη της καμπύλης ενώ τα αντίστροφα τους $R = 1/\kappa$ και $\sigma = 1/\tau$ ονομάζονται ακτίνα καμπυλότητας και ακτίνα στρέψεως αντιστοίχως.

Άσκηση 6

Θεωρούμε ένα ηλεκτρικό φορτίο q τοποθετημένο στην αρχή ενός συστήματος συντεταγμένων. Το φορτίο παράγει ένα ηλεκτρικό φορτίο που δίνεται από την σχέση $\vec{E} = (q/4\pi\varepsilon)\vec{r}_0/r^2$. Να αποδείξετε ότι το επιφανειακό ολοκλήρωμα $\iint_S \vec{E}\cdot d\vec{S}$ στην κλειστή επιφάνεια S είναι ίσο με q/ε αν η επιφάνεια περικλείει το φορτίο και μηδέν αν δεν την περικλείει.

Αν το φορτίο δίνεται με την βοήθεια μιας πυκνότητας φορτίου ρ από την σχέση $q = \int_V \rho dV$ να αποδείξετε ότι $\cdot\vec{\nabla}\vec{E} = \rho/\varepsilon$

Ασκήσεις Κεφαλαίου 2

Άσκηση 7

Ένα σπειροειδές ελατήριο έχει την μορφή κυκλικής έλικας με παραμετρική εξίσωση $\vec{r}(t) = (a\,\text{συν}\,t, a\,\text{ημ}\,t, ct)$. Εάν η πυκνότητα του είναι $f(\vec{r}) = x^2 + y^2 + z^2$, Να βρείτε την μάζα του και τις συντεταγμένες του κέντρου μάζας του.

Απάντηση $M = 2\pi\sqrt{a^2+c^2}(a^2+4c^2\pi^2/3)$, $\quad \vec{R} = (2\pi a c^2, -2\pi a c^2, c\pi(a^2 + 2\pi^2c^2))/(a^2+4c^2\pi^2/3)$

Άσκηση 8

Σε ένα υλικό σημείο που ηρεμεί στην αρχή των αξόνων την χρονική στιγμή $t = 0$ ασκείται δύναμη $\vec{F}(t) = \alpha\,\text{συν}\,\omega t\vec{i} + \beta\,\text{ημ}\,\omega t\vec{j}$. Να δείξετε ότι την χρονική στιγμή t το υλικό σημείο έχει θέση $\vec{r}(t) = \frac{\alpha}{m\omega^2}(1 - \text{συν}\,\omega t)\vec{i} + \frac{\beta}{m\omega^2}(\omega t - \text{ημ}\,\omega t)\vec{j}$ και ταχύτητα $\vec{v}(t) = \frac{\alpha}{m\omega}\,\text{ημ}\,\omega t)\vec{i} + \frac{\beta}{m\omega}(1 - \text{συν}\,\omega t)\vec{j}$.

Άσκηση 9

Να δείξετε ότι το πεδίο των δυνάμεων $\vec{F} = -kr^3\vec{r}$ είναι συντηρητικό. Γράψτε την δυναμική ενέργεια και την ολική σταθερή κινητική ενέργεια.

Απάντηση $\mathrm{E} = \frac{1}{2}m(dr/dt)^2 + \frac{1}{5}kr^5$

Άσκηση 10

Να βρείτε τις σταθερές a, b, c ώστε το πεδίο των δυνάμεων

$$\vec{F} = (x + 2y + az)\vec{i} + (bx - 3y - z)\vec{j} + (4x + vy + 2z)\vec{k}$$

να είναι συντηρητικό. Να βρείτε το δυναμικό που παράγει αυτό το δυναμικό πεδίο.

Απάντηση $a = 4, \quad b = 2, \quad c = -1, \quad V = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}y^2 - z^2 - 2xy - 4xz + yz$

Άσκηση 11

Να δείξετε ότι το πεδίο των δυνάμεων $\vec{F} = -kr^3\vec{r}$ είναι συντηρητικό. Γράψτε την δυναμική ενέργεια και την ολική σταθερή κινητική ενέργεια.

Απάντηση $\mathrm{E} = \frac{1}{2}m\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \frac{1}{5}kr^5$

Άσκηση 12

Ένα σωμάτιο κινείται υπό την επίδραση της δυνάμεως $\vec{F} = \varphi(r)\vec{r}$ Δείξτε ότι η στροφορμή του ως προς την αρχή είναι σταθερή.

Άσκηση 13

Ένα σώμα εκτοξεύεται από το έδαφος. Να βρεθεί η ταχύτητα που χρειάζεται το σώμα για να τεθεί σε τροχιά γύρο από την γη, να γίνει δηλαδή δορυφόρος της γης. Να βρεθεί επίσης και η ταχύτητα διαφυγής από την γη.

Απάντηση $\upsilon_1 = \sqrt{gR} = 8\,Km/sec, \quad \upsilon_2 = \upsilon_1\sqrt{2} = \sqrt{2gR} = 11\,Km/sec$

Άσκηση 14

Ένα υλικό σημείο έχει διάνυσμα θέσεως

$$\vec{r}(t) = \rho\,\text{συν}\,\omega\,t\vec{i} + \rho\,\text{ημ}\,\omega\,t\vec{j} + v\,t\vec{k}$$

Να βρεθούν η ταχύτητα και η επιτάχυνση του.

Απάντηση $\vec{v}(t) = -\omega\rho\,\text{ημ}\,\omega\,t\vec{i} + \omega\rho\,\text{συν}\,\omega\,t\vec{j} + v\vec{k}, \quad \vec{\gamma}(t) = -\omega^2\rho\,\text{συν}\,\omega\,t\vec{i} - \omega^2\rho\,\text{ημ}\,\omega\,t\vec{j}$

Άσκηση 15

Η επιτάχυνση ενός υλικού σημείου που κινείται σε μία διάσταση είναι

$$\gamma = -kv^2$$

Να βρεθεί η ταχύτητα και η θέση του σημείου την χρονική στιγμή t. Οι αρχικές συνθήκες του προβλήματος είναι $v(0) = v_0$ και $x(0) = 0$. Να βρεθεί η εξίσωση της τροχιάς του στον χώρο των φάσεων.

Απάντηση $v(t) = \frac{v_0}{1+kv_0 t}$ $\quad x(t) = \frac{1}{k}\, ln(1 + kv_0 t)$ $\qquad v = v_0 e^{-kx}$

Άσκηση 16

Ένα βλήμα εκτοξεύεται με αρχική ταχύτητα v_0 που σχηματίζει γωνία φ με το οριζόντιο επίπεδο από την άκρη ενός κεκλιμένου επιπέδου. Η γωνίας κλίσεως του επιπέδου ως προς το οριζόντιο επίπεδο είναι θ. Να βρεθεί το βεληνεκές του βλήματος. Να βρεθεί η τιμή της γωνίας που το βεληνεκές γίνεται μέγιστο.

Απάντηση $R = \frac{2v_0^2\, \text{ημ}\,(\varphi-\theta)\,\text{συν}\,\varphi}{g\,\text{συν}^2\,\theta}$ $\qquad \varphi = \frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}$

Άσκηση 17

Ένα σωματίδιο με μάζα m κινείται υπό την επίδραση μιας δυνάμεως f μέσα σε ένα ρευστό. Η τριβή είναι ανάλογη του τετραγώνου της ταχύτητας

$$T = -kv^2$$

Να βρεθεί η εξίσωση της τροχιάς του όταν στη θέση $x = 0$ η ταχύτητα του είναι $v = v_0$.

Απάντηση $v_0^2 = \frac{f}{k} - \left(\frac{f}{k} - v_0^2\right) e^{-2kx/m}$

Ασκήσεις Κεφαλαίου 3

Άσκηση 18

Ένα υλικό σημείο με μάζα ίση με m είναι δεμένο σταθερά σε σημείο O από νήμα μήκους l και έτσι μπορεί να κινηθεί στην επιφάνεια μιας σφαίρας.

Να βρεθούν οι εξισώσεις του Λαγκράνζ για το πρόβλημα αυτό που ονομάζεται σφαιρικό εκκρεμές. Να λυθεί το ίδιο πρόβλημα για το διπλό σφαιρικό εκκρεμές.

Άσκηση 19

Να λυθεί το πρόβλημα του αρμονικού ταλαντωτή σε τρεις διαστάσεις.

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m}{2}\left(\omega_1^2 x^2 + \omega_2^2 y^2 + \omega_3^2 z^2\right)$$

Να διερευνηθεί η ισότροπος περίπτωση $\omega_1 = \omega_2 = \omega_3$.

Άσκηση 20

Να λυθεί το πρόβλημα του εξαναγκασμένου αρμονικού ταλαντωτή σε μια διάσταση με αρχικές συνθήκες $x(0) = \dot{x}(0) = 0$ όπου η εξωτερική δύναμη είναι α) $F(t) = F_0$ β) $F(t) = \alpha t$ γ) $F(t) = F_0 e^{-\alpha t}$ δ) $F(t) = F_0 e^{-\alpha t}$ συν βt Να μελετηθούν τα παραπάνω προβλήματα όταν υπάρχει και μια δύναμη τριβής ανάλογη της ταχύτητας.

Απάντηση α) $x = [1 - \text{συν}\,\omega t]F_0/m\omega^2$, β) $[\omega t - \text{ημ}\,\omega t]\alpha/m\omega^3$, γ) $[e^{-\alpha t} - \text{συν}\,\omega t + (\alpha/\omega)\,\text{ημ}\,\omega t]F_0/m(\omega^2+\alpha^2)$, δ) $(\mathrm{A}+\mathrm{B}e^{-\alpha t})\,\text{συν}\,\omega t + (\Gamma+\Delta e^{-\alpha t})\,\text{ημ}\,\omega t$

Άσκηση 21

Οι εξισώσεις του Μάξγουελ στον ηλεκτρομαγνητισμό για την περίπτωση του κενού είναι

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \qquad \vec{\nabla} \times \vec{B} = -\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \qquad \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 \qquad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

Να δείξετε ότι οι εντάσεις $\vec{E}$ και $\vec{\mathrm{B}}$ του ηλεκτρικού και μαγνητικού πεδίου ικανοποιούν την κυματική εξίσωση

$$\nabla^2 E = \frac{\partial^2}{\partial t^2} E \qquad \nabla^2 H = \frac{\partial^2}{\partial t^2} H$$

Άσκηση 22

Να λυθεί η διαφορική εξίσωση του κύματος σε μια διάσταση

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) u(x,t) = 0$$

στις ακόλουθες δύο περιπτώσεις:

α) Με αρχικές συνθήκες

$$u(x,0) = f(x) \qquad \dot{u}(x,0) = g(x)$$

β) Με αρχικές και οριακές συνθήκες

$$u(x,0) = f(x) \qquad \dot{u}(x,0) = g(x) \qquad u(0,t) = u(L,t) = 0$$

Ασκήσεις Κεφαλαίου 4

Άσκηση 23

Να μελετηθεί η κίνηση ενός υλικού σημείου σε ένα πεδίο με κεντρική δύναμη που δίνεται από την σχέση $f = -k/r^2 + c/r^3$. Να δειχτεί ότι η εξίσωση της τροχιάς μπορεί να πάρει την μορφή $r = \alpha(1-\varepsilon^2)/(1+\varepsilon\,\text{συν}\,a\theta)$

Άσκηση 24

Ένα υλικό σημείο εκτελεί κυκλική τροχιά υπό την επίδραση μιας κεντρικής δυνάμεως που βρίσκεται σε ένα σημείο της περιφέρειας του κύκλου. Να αποδειχτεί ότι η δύναμη είναι αντιστρόφως ανάλογη της πέμπτης δυνάμεως της αποστάσεως.

Άσκηση 25

Ένας κούφιος κυλινδρικός σωλήνας (ΟΑ) σχηματίζει γωνία θ με τον κατακόρυφο άξονα. Στο εσωτερικό του σωλήνα κινείται ένα σωμάτιο χωρίς τριβές. Ο σωλήνας περιστρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα ω γύρω από τον κατακόρυφο άξονα. Να βρεθεί η απόσταση r του υλικού σημείου από το σημείο Ο. Το σωμάτιο ηρεμεί αρχικά σε απόσταση α από το Ο.

Απάντηση $r(t) = \alpha \cosh(\omega t \,\text{ημ}\,\theta) - (g \,\text{συν}\,\theta)\, t^2$

Άσκηση 26

Να βρεθεί η ταχύτητα και η επιτάχυνση ενός κινητού σε σφαιρικές συντεταγμένες $x = r \,\text{ημ}\,\theta \,\text{συν}\,\varphi$, $y = r \,\text{ημ}\,\theta \,\text{ημ}\,\varphi$, $z = r \,\text{συν}\,\theta$

Απάντηση $\vec{\upsilon} = \dot{r}\vec{r}_0 + r\dot{\theta}\vec{\theta}_0 + r\dot{\varphi}\,\text{ημ}\,\theta\vec{\varphi}_0$, $\quad \vec{\gamma} = \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\varphi}^2\,\text{ημ}^2\,\theta\right)\vec{r}_0 + \left(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} - r\dot{\varphi}^2\,\text{ημ}\,\theta\,\text{συν}\,\theta\right)\vec{\theta}_0 + \left(2r\dot{\theta}\dot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi}\,\text{ημ}\,\theta + r\ddot{\varphi}\,\text{ημ}\,\theta\right)\vec{\varphi}_0$

Άσκηση 27

Να βρεθεί η στροφορμή ενός σωματίου και το μήκος της σε κυλινδρικές συντεταγμένες r, θ, z, και σε σφαιρικές συντεταγμένες.

Απάντηση $M_x = m(r\dot{z} - z\dot{r})\,\text{ημ}\,\theta - mrz\dot{\theta}\,\text{συν}\,\theta$, $\quad M_y = -m(r\dot{z} - z\dot{r})\,\text{συν}\,\theta - mrz\dot{\theta}\,\text{ημ}\,\theta$, $\quad M_z = mr^2\dot{\theta}$, $\quad M^2 = m^2r^2\dot{\theta}(r^2 + z^2) + m^2(r\dot{z} - z\dot{r})^2$, $\quad M_x = -mr^2(\dot{\theta}\,\text{ημ}\,\varphi + \dot{\varphi}\,\text{ημ}\,\theta\,\text{συν}\,\theta\,\text{συν}\,\varphi)$, $\quad M_y = mr^2(\dot{\theta}\,\text{συν}\,\varphi - \dot{\varphi}\,\text{ημ}\,\theta\,\text{συν}\,\theta\,\text{ημ}\,\varphi)$, $M_z = mr^2\dot{\varphi}\,\text{ημ}^2\,\theta$, $\quad M^2 = m^2r^4(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2\,\text{ημ}^2\,\theta)$

Άσκηση 28

Το διάνυσμα θέσεως ενός σωματίου με μάζα m που κινείται στο επίπεδο είναι xy. $\vec{r} = a \,\text{συν}\,\omega t\vec{i} + b \,\text{συν}\,\omega t\vec{j}$ Να δείξτε ότι η τροχιά είναι έλλειψη και ότι η δύναμη που ασκείται στο σωμάτιο κατευθύνεται πάντοτε προς την αρχή των αξόνων. Να δείξτε επίσης ότι το έργο της δυνάμεως κατά την κίνηση μια φορά γύρο από την έλλειψη είναι μηδέν. Βρείτε τέλος την ροπή της δυνάμεως και την στροφορμή ως προς την αρχή.

Απάντηση $\left(\vec{F} = -m\omega^2\vec{r}\right), \quad \vec{M} = \vec{0}, \quad \vec{L} = 2mab\omega\vec{k}$

Άσκηση 29

Η δύναμη έλξεως μεταξύ νετρονίου πρωτονίου προέρχεται από το ακόλουθο δυναμικό $V(r) = \frac{ke^{-ar}}{r}$ όπου $k < 0$. Να αποδειχτεί ότι η δύναμη δίνεται από την σχέση

$$\vec{F}(\vec{r}) = \frac{ke^{-ar}(ar+1)}{r^2}\frac{\vec{r}}{r}$$

Ασκήσεις Κεφαλαίου 5

Άσκηση 30

Δίνεται μια Λη άλγεβρα με τρία βασικά στοιχεία e_1, e_2 και e_3 το ουδέτερο στοιχείο. Οι βασικοί μεταθέτες είναι

$$[e_1, e_2] = e_3 \qquad [e_2, e_3] = 0 \qquad [e_3, e_1] = 0$$

Να βρείτε τον νόμο της ομάδας εργαζόμενοι ως εξής. Να θεωρήσετε δύο τυχόντα στοιχεία της ομάδας $exp(u)$ και $exp(v)$ όπου

$$u = \sum_{j=1}^{3} u^j e_j \qquad v = \sum_{j=1}^{3} v^j e_j$$

και να βρείτε το w από την σχέση

$$exp(u)exp(v) = exp(w) \quad \text{Απάντηση} \quad w = u + v + \frac{1}{2}\left(u^1v^2 - u^2v^1\right)e_3$$

Αν θεωρήσουμε ότι οι Λη παρενθέσεις είναι οι αγκύλες Πουασόν και ότι $e_1 = q$, $e_2 = p$ και $e_3 = 1$ τότε η άλγεβρα αυτή ονομάζεται άλγεβρα του Χάιζενμπεργκ.

Άσκηση 31

Να αποδειχτεί ότι αν $\vec{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ όπου σ_j είναι οι μήτρες του Πάουλι τότε ισχύει

$$\vec{\sigma} \times \vec{\sigma} = 2i\vec{\sigma}$$

Να αποδειχτούν επίσης οι σχέσεις

$$\exp\left(i\theta\vec{n}\cdot\vec{\sigma}\right) = \text{συν}\,\theta + i\vec{n}\cdot\vec{\sigma}\ \text{ημ}\,\theta \qquad \exp\left(i\vec{\alpha}\cdot\vec{S}\right) = \text{συν}\,(\frac{\alpha}{2}) + i\vec{\alpha}\cdot\vec{S}\ \text{ημ}\,(\frac{\alpha}{2})$$

όπου το διάνυσμα $\vec{n}$ είναι μοναδιαίο. Να αποδειχτεί τέλος ότι

$$\frac{d^2}{d\theta^2}\exp\left(i\theta\vec{n}\cdot\vec{\sigma}\right) = -\exp\left(i\theta\vec{n}\cdot\vec{\sigma}\right)$$

Άσκηση 32

Η παράγωγος ενός τελεστή $\mathrm{A}(\xi)$ που εξαρτάται από την πραγματική μεταβλητή ξ δίνεται από την σχέση

$$\frac{d\mathrm{A}}{d\xi} = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\mathrm{A}(\xi+\varepsilon) - \mathrm{A}(\xi)}{\varepsilon}$$

Να αποδείξετε ότι

$$\frac{d}{d\xi}(AB) = \frac{dA}{d\xi}B + A\frac{dB}{d\xi} \qquad \frac{d}{d\xi}A^2 = \frac{dA}{d\xi}A + A\frac{dA}{d\xi}$$

$$\frac{d}{d\xi}\left(e^{iA\xi}\right) = iAe^{iA\xi}$$

Να αποδειχτεί η ανάπτυξη

$$e^{tA}Be^{-tA} = B + t[A,B] + \frac{t^2}{2!}[A,[A,B]] + \cdots + \frac{t^n}{n!}\overbrace{[A,[A,\cdots[A,[A}^{n-\text{παρενθέσεις}},B]]\cdots]]$$

Αν συμβολίσουμε με L_{A} τον τελεστή που ορίζεται από τις σχέσεις

$$L_A^0 = B \qquad L_A B \stackrel{\text{ορσ}}{=\!=} [A, B] \qquad L_A^2 B = [A, [A, B]] \qquad \cdots$$

τότε η παραπάνω ταυτότητα γράφεται

$$e^{tA} B e^{-tA} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} L_A^n B$$

Τέλος αν A(ξ) είναι ένας τελεστής που εξαρτάται από την πραγματική μεταβλητή ξ και $dA/d\xi$ η παράγωγος ως προς ξ να αποδειχτεί η ταυτότητα

$$\frac{d}{d\xi} e^{tA} = t e^{tA} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-t)^n}{(n+1)!} L_A^n \frac{dA}{d\xi}$$

Άσκηση 33

Να υπολογιστεί ο μεταθέτης $[T_1, T_2]$ των τελεστών

$$T_1 = x \quad \text{και} \quad T_2 = \frac{d^2}{dx^2} \qquad\qquad T_1 = g(x) \quad \text{και} \quad T_2 = \frac{d}{dx}$$

$$T_1 = \nabla^2 \quad \text{και} \quad T_2 = \vec{r} \cdot \nabla \qquad\qquad T_1 = \vec{c} \times \nabla \quad \text{και} \quad T_2 = \vec{r}$$

Άσκηση 34

Δίνεται ο τελεστής μεταθέσεως

$$T = e^{\alpha \frac{d}{dx}} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha^n}{n!} \left(\frac{d}{dx} \right)^n$$

Να αποδειχτεί ότι $Tf(x) = f(x + \alpha)$.
Να βρεθούν οι ιδιοσυναρτήσεις και οι ιδιοτιμές του τελεστή αυτού.

Ασκήσεις Κεφαλαίου 6

Άσκηση 35

Να γραφεί η συνάρτηση Λαγκράνζ του ελευθέρου σωματίου α) σε κυλινδρικές συντεταγμένες ρ, φ και z όπου $x = \rho\,\text{συν}\,\varphi$, $y = \rho\,\text{ημ}\,\varphi$ και $z = z$ β) σε παραβολικές συντεταγμένες ξ, η και φ που συνδέονται με τις κυλινδρικές με τις σχέσεις $z = \frac{1}{2}(\xi - \eta)$ και $\rho = \sqrt{\xi\eta}$ και τέλος γ) σε ελλειπτικές συντεταγμένες ξ, η και φ που συνδέονται με τις κυλινδρικές με τις σχέσεις $\rho = \sigma\sqrt{(\xi^2-1)(1-\eta^2)}$ και $z = \sigma\xi\eta$.

Απάντηση α) $L = \frac{1}{2}m\left(\dot\rho^2 + \rho^2\dot\varphi^2 + \dot z^2\right)$, β) $L = \frac{1}{8}m(\xi+\eta)\left(\frac{\dot\xi^2}{\xi} + \frac{\dot\eta^2}{\eta}\right) + \frac{1}{2}m\xi\eta\dot\varphi^2$, γ) $\frac{1}{2}m\sigma^2(\xi^2-\eta^2)\left(\frac{\dot\xi^2}{\xi^2-1} + \frac{\dot\eta^2}{1-\eta^2}\right) + \frac{1}{2}m\sigma^2(\xi^2-1)(1-\eta^2)\dot\varphi^2$

Άσκηση 36

Δίνονται οι ακόλουθοι δύο κανονικοί μετασχηματισμοί σε έναν φασικό χώρο $2k$ διαστάσεων

$$q_k, p_k \longrightarrow q'_k, p'_k \qquad\qquad q'_k, p'_k \longrightarrow q''_k, p''_k$$

Να αποδειχτεί ότι ο μετασχηματισμός $q_k, p_k \longrightarrow q''_k, p''_k$ είναι επίσης κανονικός. Να αποδειχτεί ότι το σύνολο αυτό γίνεται ομάδα δηλαδή να αποδείξετε ότι ο νόμος ικανοποιεί την προσεταιριστική ιδιότητα και ότι ο ταυτοτικός μετασχηματισμός καθώς επίσης και ο αντίστροφος μετασχηματισμός $q'_k, p'_k \longrightarrow q_k, p_k$ είναι κανονικοί.

Να αποδείξετε τέλος ότι οι κανονικοί μετασχηματισμοί που ικανοποιούν την σχέση

$$\sum_{m=1}^{k} p_k dq_k = \sum_{m=1}^{k} p'_k dq'_k$$

είναι μια υποομάδα της κανονικής ομάδας. Οι μετασχηματισμοί αυτοί ονομάζονται κανονικοί μετασχηματισμοί επαφής.

Άσκηση 37

Να αποδειχτεί ότι ο παρακάτω μετασχηματισμός είναι κανονικός $Q = \ln(\text{ημ}\, p) - \ln(q)$, $P = q\,\text{σφ}\, p$. Να αποδειχτεί ότι και ο μετασχηματισμός $Q = \text{λογ}(1 + q^{1/2}\,\text{συν}\, p)$, $P = 2(1 + q^{1/2}\,\text{συν}\, p)q^{1/2}\,\text{ημ}\, p$ είναι επίσης κανονικός με γεννήτρια συνάρτηση την $F = -(e^Q - 1)^2\,\text{εφ}\, p$. Τέλος να βρεθούν οι τιμές των α και β ώστε οι μετασχηματισμοί $Q = q^\alpha\,\text{συν}\, \beta p$, $P = q^\alpha\,\text{ημ}\, \beta p$ να είναι κανονικοί.

Άσκηση 38

Δίνεται ένα σύστημα που αποτελείται από n αρμονικούς ταλαντωτές

$$H(q,p) = \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{n}\left(p_m^2 + \omega_m^2 q_m^2 + 2\gamma_m q_m\right)$$

Να γραφούν και να λυθούν οι εξισώσεις της κινήσεως. Να χρησιμοποιήσετε τον μετασχηματισμό $Q_m = q_m + \gamma_m/\omega_m^2$, $P_m = p_m$. είναι ο μετασχηματισμός αυτός κανονικός. Να εξετάσετε την περίπτωση που οι ταλαντωτές είναι (αριθμήσιμα) άπειροι δηλαδή $n \to \infty$.

Άσκηση 39

Δίνεται ένα πεδίο με πυκνότητα Λαγκράνζ

$$\ell = \frac{1}{2}\rho_0 \dot{\vec{\xi}}^2 + S_0 \vec{\nabla}\cdot\vec{\xi} - S_0\frac{\gamma}{2}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{\xi}\right)^2$$

όπου $\vec{\xi}(\vec{r},t)$ είναι το πλάτος ταλαντώσεως ενός ηχητικού κύματος μέσα σε ένα ιδανικό αέριο. Να αποδειχτεί ότι η εξίσωση κινήσεως είναι

$$\rho_0\ddot{\vec{\xi}}(\vec{r},t) - \gamma S_0\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{\xi}(\vec{r},t))^2 = 0$$

Να αποδειχτεί ότι η πυκνότητα του Χάμιλτον του πεδίου είναι

$$h = \frac{1}{2\rho_0}\vec{\pi}^2(\vec{r},t) + \frac{\gamma}{2}S_0(\vec{\nabla}\cdot\vec{\xi}(\vec{r},t))^2 \quad \text{όπου} \quad \vec{\pi}(\vec{r},t) = \rho_0\dot{\vec{\xi}}(\vec{r},t)$$

είναι η κανονική ορμή του πεδίου. Να βρεθούν οι εξισώσεις κινήσεως του Χάμιλτον.

Άσκηση 40

Μα μελετήσετε το πρόβλημα ενός πεδίου με την παρακάτω πυκνότητα του Λαγκράνζ.

$$\ell = \frac{1}{2}\left(\dot{\varphi}^2 - (\vec{\nabla}\varphi)^2 - m^2\varphi^2\right) - \frac{g}{4!}\varphi^4$$

Ο τελευταίος όρος παριστάνει ένα πεδίο που αλληλεπιδρά με τον εαυτό του, όπου g η σταθερά αλληλεπιδράσεως. Το πρόβλημα αυτό είναι ακόμα ανοικτό. Να εξετάσετε το πρόβλημα όπου το δυναμικό αλληλεπιδράσεως είναι γενικά της μορφής $V(\varphi)$. Για παράδειγμα αποδείξτε ότι για το πεδίο $\varphi(x,t)$ με πυκνότητα

$$\ell = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 - V(\varphi) \quad V(\varphi) = \frac{1}{\beta^2}(1 - \text{συν}\,(\beta\varphi)$$

η εξίσωση κινήσεως είναι

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{1}{\beta^2}\,\text{ημ}\,(\beta\varphi) = 0$$

Να αναζητήσετε λύσεις της μορφής $\varphi(x,t) = f(x - vt)$.

Ασκήσεις Κεφαλαίου 7

Άσκηση 41

Να αποδειχτεί ότι η μήτρες του Πάουλι ικανοποιούν τις σχέσεις $\sigma_j^2 = 1$, $\sigma_i\sigma_j + \sigma_j\sigma_i = 2\delta_{ij}$. Αν $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ να δειχτεί ότι $(\vec{\sigma}\cdot\vec{\alpha})(\vec{\sigma}\cdot\beta) = \vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} + i\vec{\sigma}\cdot\vec{\alpha}\times\vec{\beta}$, όπου $\vec{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$.

Άσκηση 42

Να αποδειχτεί ότι η συνάρτηση του Χάμιλτον για ένα φορτίο e μέσα σε ηλεκτρομαγνητικό πεδίο με διανυσματικό δυναμικό $\vec{A}$ και βαθμωτό δυναμικό φ δίνεται από την σχέση

$$H = \sqrt{c^2 \left(\vec{p} - \frac{e}{c}\vec{A}\right)^2 + m^2c^4} + e\varphi$$

Να δειχτεί ότι η παραπάνω σχέση μπορεί να γραφεί με την μορφή

$$H = c\vec{a} \cdot \left(\vec{p} - \frac{e}{c}\vec{A}\right) + bmc^2 + e\varphi$$

Να βρεθούν οι μήτρες $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ και η μήτρα b.

Άσκηση 43

Να βρείτε σύμφωνα με της ειδική θεωρία της σχετικότητας πόσο τοις εκατό αυξάνεται η μάζα α) ενός αεροπλάνου που κινείται με ταχύτητα ίση με 2000 Km/h β) ενός πλανήτη που κινείται με 40.000 Km/h και γ) ενός σωματιδίου που κινείται με ταχύτητα ίση με το μισό της ταχύτητας του φωτός. Να βρείτε ποια πρέπει να είναι η ταχύτητα ενός σώματος για να διπλασιαστεί η μάζα του.

Άσκηση 44

Δίνεται η ακόλουθη πυκνότητα του Λαγκράνζ

$$\ell = \frac{i}{2}\left[\bar{\psi}\gamma^{\mu}(\partial_{\mu}\psi) - (\partial_{\mu}\bar{\psi})\gamma^{\mu}\psi\right) - m\bar{\psi}\psi$$

Θεωρούμε τα πεδία ψ και $\bar{\psi} = \psi^{+}\gamma^{0}$ ανεξάρτητα. Τα γ^{μ} είναι οι ακόλουθες μήτρες

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \gamma^m = \begin{pmatrix} 0 & -\sigma^m \\ \sigma^m & 0 \end{pmatrix}$$

όπου σ^m είναι οι μήτρες του Πάουλι.

Να αποδειχτεί ότι η εξίσωση κινήσεως του πεδίου είναι η ακόλουθη εξίσωση του Ντιράκ

$$(i\gamma^{\mu}\partial_{\mu} - m)\,\psi = 0$$

Να αποδειχτεί ότι η εξίσωση αυτή είναι αναλλοίωτος από τους μετασχηματισμούς του Λόρεντς.

Άσκηση 45

Δίνεται η ακόλουθη πυκνότητα του Λαγκράνζ

$$\ell = \frac{1}{2}\left(\dot{\varphi}^2 - (\vec{\nabla}\varphi)^2 - m^2\varphi^2\right)$$

Να αποδειχτεί ότι η εξίσωση κινήσεως του πεδίου είναι η ακόλουθη εξίσωση Κλάιν - Γκόρντον

$$\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}\frac{\partial}{\partial x_{\mu}}\varphi - m^2\varphi = 0$$

Να αποδειχτεί ότι η εξίσωση αυτή είναι αναλλοίωτος από τους μετασχηματισμούς του Λόρεντς. Δηλαδή αν $\varphi(x^{\mu})$ είναι μια λύση της εξισώσεως αυτής τότε και η $\varphi'(x'^{\mu})$ είναι επίσης λύση όπου

$$\varphi'(x'^{\mu}) = \varphi(x^{\mu}) \qquad\qquad x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu}(\vec{\zeta},\vec{0})x^{\nu}$$

$\Lambda(\vec{\zeta},\vec{\alpha})$ είναι ο πίνακας του μετασχηματισμός του Λόρεντς. Η Χαμιλτονιανή πυκνότητα του πεδίου είναι

$$h = \frac{1}{2}\left(\pi^2 + (\vec{\nabla}\varphi)^2 + m^2\varphi^2\right)$$

Βιβλιογραφια

1) Classical Dynamics A Modern Perspective, **E. Sudarshan** and **N. Mukunda**, John Willey Sons 1974
2) Κλασσική Μηχανική, **H. Goldstein**, Μετάφραση Γ. Τζιβανίδη, Εκδόσεις Πουρνάρα 1980
3) Classical Mechanics, **L. Landau** and **E. Lifshitz**, Pergamon press, 1971
4) The Classical Theory of Fields, **L. Landau** and **E. Lifshitz**, Pergamon press, 1958
5) Σύγχρονος Φυσική Τόμος Α (Μηχανική - Σχετικότης), **Α. Γιαννούσης**, Πανεπιστήμιο Πατρών 1996
6) Εισαγωγή στην Κβαντομηχανική, **Α. Στρέκλας**, Πανεπιστήμιο Πατρών 1999
7) Φυσική Ι Μηχανική, **Γ. Κλήρος**, Εκδόσεις Αρνος 1996
8) Μαθήματα Μηχανικής Τόμοι Α και Β, **Κ. Γούδας**, Τεχνικό Επιμελητήριο της Ελλάδος
9) Μαθήματα Ειδικής Θεωρίας της Σχετικότητος, **Κ. Γούδας**, Τεχνικό Επιμελητήριο της Ελλάδος
10) Μαθήματα Μηχανικής ΙΙ, **Μ. Λευτάκη**, Πανεπιστήμιο Πατρών 1996
11) Διανυσματική Ανάλυση, **Δ. Σουρλάς**, Πανεπιστήμιο Πατρών 1997
12) Θεωρία Τελεστών και θεωρία Ομάδων, **Δ. Σουρλάς**, Πανεπιστήμιο Πατρών 1997
13) Συνήθεις Διαφορικές Εξισώσεις, **Γ. Δάσιος**, Πανεπιστήμιο Πατρών 1997
14) Mathematical and Theoretical Physics V.I, V.II, **E. Hylleraas**, Wyley - Interscience 1970
15) Θεωρητική Μηχανική, **M. Spiegel**, Schaum's outline series McGraw-Hill
16) Μηχανική Μαθήματα Φυσικής του Πανεπιστημίου του Berkeley, Τεχνικό Επιμελητήριο της Ελλάδος 1977
17) Lagrangian Dynamics, **D. Wells**, Schaum's outline series McGraw-Hill
18) Classical Mechanics, **H. Corben** and **P. Stehle**, Dover Publications, inc

19) Mathematical methods for physicists, **G. Arfken**, Academic press 1971
20) Methods of theoretical physics part I, part II, **P. Morse** and **H. Feshbach**, Mc Graw Hill P.C. 1953
21) Mathematical Methods of Physics, **J. Mathews** and **R. Walker**, W. Benjamin inc 1970
22) Variationsrechnung und Partielle Differentialgleichungen Erster Ordnung, **Caratheodory Constantin**, Leibzig: B. Teubner 1935. (Ann. Arbor: J. Edwards, 1945)
23) Quantum Field Theory, **L. Ryder**, Cambridge University press 1996