21. Physica A: Statistical Mechanics and its Applications
Volume 385, Issue 1, 1 November 2007, Pages 124 - 136

Quantum damped harmonic oscillator on non - commuting plane

Ο κβαντικός αποσβεννυμένος αρμονικός ταλαντωτής στο μη μεταθετό επίπεδο

Α. Στρέκλας

Πανεπιστήμιο Πατρών, Τμήμα Μαθηματικών.

Περίληψη

Μελετούμε τον αποσβεννυμένο αρμονικό ταλαντωτή παρουσία τριβής. Χρησιμοποιούμε την ακόλουθη Χαμιλτονιανή.

$$\mathcal{H}(\hat{p}_1, \hat{q}_1, t) = e^{-2\gamma t}\,\frac{1}{2m}\,\hat{p}_1^2 + e^{2\gamma t}\,\frac{m\omega^2}{2}\,\hat{q}_1^2$$

Η απόσβεση προέρχεται από την αλληλεπίδραση μεταξύ του συστήματος που παρατηρούμε και ενός άλλου συστήματος που συχνά ονομάζεται αποθήκη ή λουτρό, προς το οποίο η ενέργεια ρέει με έναν τρόπο μη αντιστρεπτό. Μία μέθοδος που χρησιμοποιήθηκε πρώτα από τον *H. Bateman* για να εφαρμόσουμε την συνηθισμένη μέθοδο της κβάντωσης, βασίζεται σε μια διαδικασία κατά την οποίαν διπλασιάζουμε τους βαθμούς ελευθερίας έτσι ώστε τώρα να χειριζόμαστε ένα ουσιαστικά απομονωμένο σύστημα.

Στην εργασία αυτή χρησιμοποιούμε την ακόλουθη Χαμιλτονιανή ($m = 1$):

$$\mathcal{H}(\hat{p}_1, \hat{q}_1, t) - \mathcal{H}(\hat{p}_2, \hat{q}_2, -t) = \frac{1}{2}e^{2\gamma t}\left(\hat{p}_1^2 - \omega_2^2\hat{q}_2^2\right) - \frac{1}{2}\,e^{-2\gamma t}\left(\hat{p}_2^2 - \omega_1^2\hat{q}_1^2\right)$$

που είναι ουσιαστικά ένας αποσβεννημένος αρμονικός ταλαντωτής συζευγμένος με το χρονικά συμπληρωματικό του είδωλο. Οι δύο Χαμιλτονιανές δεν εναλλάσσονται και οι βασικοί τελεστές ικανοποιούν τις ακόλουθες σχέσεις αντιμεταθέσεως της μη μεταθετής γεωμετρίας.

$$[\hat{p}_1, \hat{p}_2] = i\lambda \qquad [\hat{q}_1, \hat{q}_2] = i\theta \qquad [\hat{q}_1, \hat{p}_1] = i\hbar \qquad [\hat{q}_2, \hat{q}_2] = i\hbar$$

όπου τα λ, θ είναι πραγματικές παράμετροι.

Υπολογίζουμε τον τελεστή χρονικής εξέλιξης και βρίσκουμε αναλυτικά τον διαδοτή του συστήματος.

Ο διαδοτής που προκύπτει εξαρτάται από την παράμετρο παραμόρφωσης μ και είναι μία δισδιάστατη συνάρτηση κατανομής τύπου Γκάους των εναλλασσομένων παρατηρησίμων μεγεθών $\tau_1 = q_1$ και $\tau_2 = q_2 - (\theta/\hbar)p_1$. Οι όροι που ταλαντούται εξαρτώνται από τις συχνότητες Ω_1 και Ω_2.

$$\hat{\omega}_{1,2} = \frac{1}{2}\sqrt{(\omega_1+\omega_2)^2 - (\lambda+\omega_1\omega_2\theta)^2/\hbar^2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(\omega_1-\omega_2)^2 - (\lambda-\omega_1\omega_2\theta)^2/\hbar^2}$$

$$\Omega_1 = \sqrt{\hat{\omega}_1^2 - \gamma^2}, \quad \Omega_2 = \sqrt{\hat{\omega}_2^2 - \gamma^2} \qquad \mu = 1 - \frac{\lambda\theta}{\hbar^2} = \frac{\hat{\omega}_1}{\omega_1}\frac{\hat{\omega}_2}{\omega_2}$$

Ερευνούμε τις θερμοδυναμικές ιδιότητες του συστήματος χρησιμοποιώντας την βασική κανονική μήτρα πυκνότητας. Βρίσκουμε την στατιστική συνάρτηση κατανομής και την συνάρτηση διαμερισμού.

Υπολογίζουμε την ειδική θερμότητα για την οριακή περίπτωση της κρίσιμης απόσβεσης, όπου οι συχνότητες του συστήματος μηδενίζονται $\Omega_1 = 0$, $\Omega_2 = 0$, που επιτυγχάνεται αν $\omega_1 = \pm\omega_2 = \gamma/\sqrt{\mu} = \sqrt{\lambda/\theta}$.

Η ειδική θερμότητα c του συστήματος αυτού παρουσιάζει κάποιες ανωμαλίες (Σχ. 1) οι οποίες εξαφανίζονται στο κλασσικό όριο $\hbar \to 0$ (Σχ. 2). Η τιμές της θερμοκρασίας T όπου ο παρονομαστής της συνάρτησης διαμερισμού μηδενίζεται βρίσκουμε ότι είναι:

$$T_n \cong \frac{\hbar\gamma}{2k}\frac{1}{1.16556 + n\pi}, \quad n = 0,1,2,\cdots \qquad T_n = \frac{\hbar\gamma}{2k}\frac{1}{n\pi}, \quad n = 1,2,\cdots$$

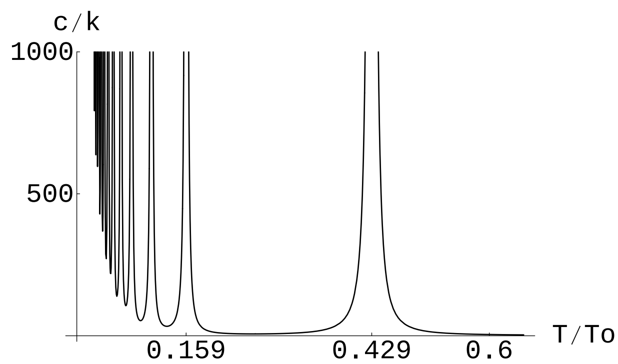
όπου k είναι η σταθερά του Μπόλτσμαν και $T_0 = \frac{\hbar}{k}\gamma = \frac{\hbar}{k}\sqrt{\frac{\lambda\mu}{\theta}}$.

Τελικά μελετούμε την περίπτωση που η παράμετρος της παραμόρφωσης μ μηδενίζεται. Ο διαδοτής είναι πάλι μια κατανομή τύπου Γκάους αλλά τώρα είναι μια συνάρτηση των τριών εναλλασσομένων παρατηρησίμων μεγεθών $\tau_1 = q_1$, $\tau_2 = q_2 - (\theta/\hbar)p_1$ και $\pi_2 = p_2 + (\lambda/\hbar)q_1$.

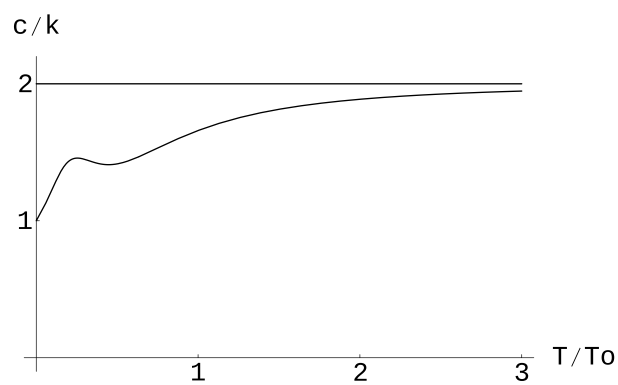
Ο διαδοτής εξαρτάται από τις ακόλουθες παραμέτρους και συχνότητες.

$$\hbar = \sqrt{\lambda\theta}, \quad \sigma = \sqrt{\frac{\lambda}{\theta}}, \quad \hat{\omega} = \frac{1}{\sigma}\sqrt{(\sigma^2 - \omega_2^2)(\omega_1^2 - \sigma^2)}, \quad \Omega = \sqrt{\hat{\omega}^2 - \gamma^2}$$

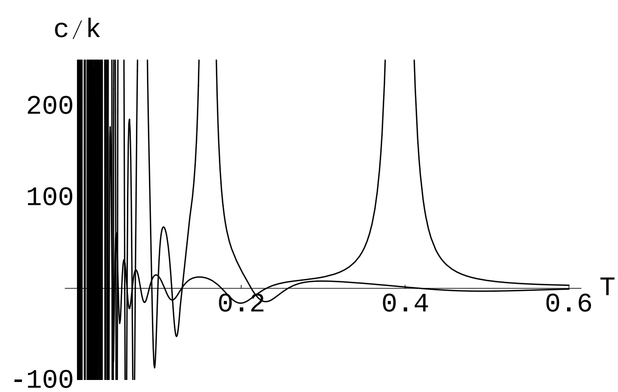
Η ειδική θερμότητα έχει κάποιες ανωμαλίες και επίσης μηδενίζεται σε κάποια σημεία για τις διάφορες τιμές των παραμέτρων. (Σχ. 3) και (Σχ. 4).



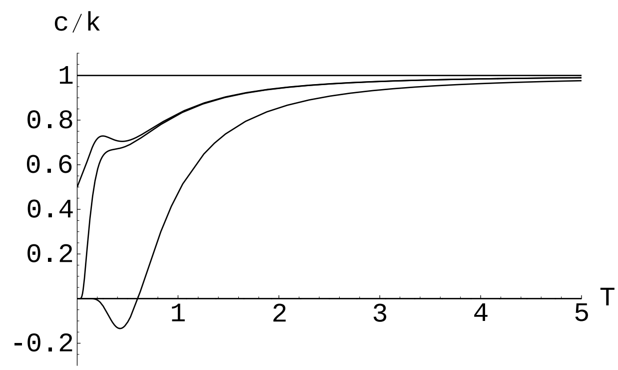
Σχήμα 1: Κρίσιμη απόσβεση. Η ειδική θερμότητα για $T_0 = 1$.



Σχήμα 2: Κρίσιμη απόσβεση. Η ειδική θερμότητα για $T_0 = i$.



Σχήμα 3: Η περίπτωση όπου $\mu = 0$. Η ειδική θερμότητα για $\gamma = 1$ και $\Omega = 2\,i$, $\Omega = 0.8\,i$.



Σχήμα 4: Η περίπτωση όπου $\mu = 0$. Η ειδική θερμότητα για $\gamma = i$ και $\Omega = 0$, $\Omega = 0.2$, $\Omega = 2$.