

## Deformed damped harmonic oscillator

Ο άτυπος αποσβεννυμένος αρμονικός ταλαντωτής

A. Στρέκλας

Πανεπιστήμιο Πατρών Τμήμα Μαθηματικών.

### Περίληψη

Στην εργασία αυτή μελετούμε τον αποσβεννυμένο αρμονικό ταλαντωτή παρουσία τριβής. Χρησιμοποιούμε την ακόλουθη Χαμιλτονιανή που εξαρτάται από τον χρόνο.

$$\mathcal{H} = e^{2\gamma t} \frac{\alpha}{2m} \left( \hat{p}_1 + \frac{\lambda}{2\hbar} \hat{q}_2 \right)^2 + e^{-2\gamma t} \frac{\beta m \omega^2}{2} \left( \hat{q}_1 - \frac{\theta}{2\hbar} \hat{p}_2 \right)^2$$

όπου  $\lambda, \theta$  είναι πραγματικές παράμετροι.

Χαμιλτονιανές αυτού του τύπου έχουν χρησιμοποιηθεί για την μελέτη της τριβής στην Κβαντική Μηχανική. Είναι η γνωστή Χαμιλτονιανή των Καλντιρόλα - Κανάου σε μία διάσταση στον χώρο των φάσεων  $\hat{P}_1 = \hat{p}_1 + \frac{\lambda}{2\hbar} \hat{q}_2$  και  $\hat{Q}_1 = \hat{q}_1 - \frac{\theta}{2\hbar} \hat{p}_2$ , όπου έχουμε εισάγει μία επί πλέον διάσταση  $\hat{q}_2, \hat{p}_2$ . Οι τελεστές ικανοποιούν τις ακόλουθες σχέσεις αντιμεταθέσεως της μη μεταθετής γεωμετρίας, δηλαδή

$$[\hat{P}_1, \hat{p}_2] = i\lambda/2 \quad [\hat{Q}_1, \hat{q}_2] = i\theta/2 \quad [\hat{q}_2, \hat{p}_2] = i\hbar \quad [\hat{Q}_1, \hat{P}_1] = i\hbar\mu$$

όπου  $\mu = 1 + \lambda\theta/(4\hbar)$  είναι η σταθερά παραμόρφωσης. Η δεύτερη σχέση αντιμεταθέσεως συνεπάγεται την νέα σχέση αβεβαιότητας του Χάιζενμπεργκ  $\Delta Q_1 \Delta q_2 \sim \theta$ .

Βρίσκουμε ακριβώς τον διαδοτή του συστήματος. Βρίσκουμε επίσης την χρονική εξέλιξη των τελεστών των συντεταγμένων και των ορμών. Από το αποτέλεσμα που βρίσκουμε γίνεται φανερό ότι το σύστημα είναι ένας νέος ταλαντωτής με συχνότητα  $\Omega = \sqrt{ab\omega^2\mu^2 - \gamma^2}$ .

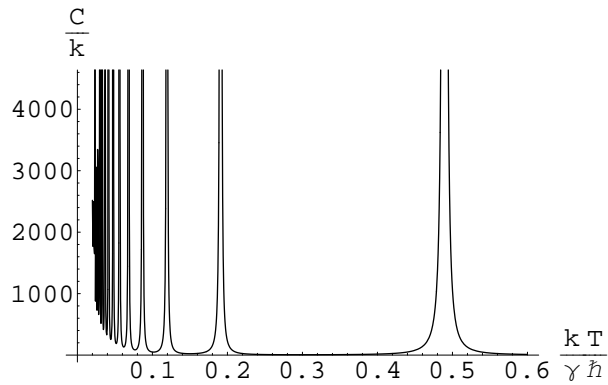
Τελικά ερευνούμε τις θερμοδυναμικές ιδιότητες του συστήματος στην στατιστική του Μπόλτσμαν. Βρίσκουμε την στατιστική μήτρα πυκνότητας και

την συνάρτηση διαμερισμού  $Z(\beta)$ .

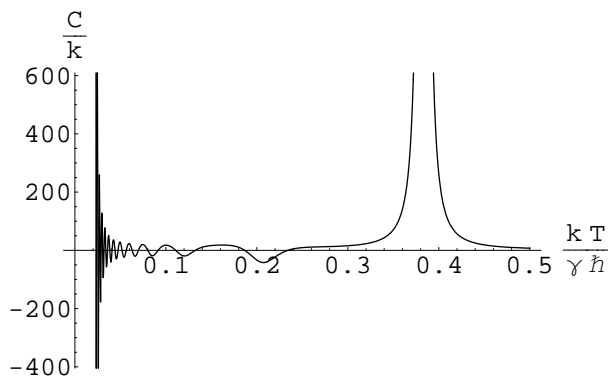
$$Z(\beta) = \frac{S}{\theta} \frac{2\mu}{\sqrt{1 - \cos(\gamma\hbar\beta) \cosh(\Omega\hbar\beta) - (\gamma/\Omega) \sin(\gamma\hbar\beta) \sinh(\Omega\hbar\beta)}}$$

όπου  $\beta = 1/kT$ . Με τον όρο  $S$  συμβολίζουμε το εμβαδόν μιας μικρής περιοχής του χώρου και ο παράγοντας  $S/\theta$  οφείλεται στην μη αντιμεταθετικότητα του χώρου.

Η ειδική θερμότητα του συστήματος εμφανίζει για ασθενείς τριβές ένα άπειρο αριθμό ανωμαλιών (Σχ. 1) και για ισχυρές τριβές εμφανίζονται επιπλέον και μερικές τιμές που μηδενίζονται. (Σχ. 2).



Σχήμα 1: Η ειδική θερμότης για μικρές τιμές της τριβής  $\gamma = \frac{1}{2}\sqrt{ab}\omega\mu$



Σχήμα 2: Η ειδική θερμότης για μεγάλες τιμές της τριβής  $\gamma = 2\sqrt{ab}\omega\mu$