19. Int. J. of Mod. Phys. B

Harmonic Oscillator in non commuting two dimensional space

Αρμονικός Ταλαντωτής σε έναν μη μεταθετό
χώρο δύο διαστάσεων

Α. Στρέκλας

Πανεπιστήμιο Πατρών. Τμήμα Μαθηματικών.

Περίληψη

Στην εργασία αυτή μελετούμε τον δισδιάστατο αρμονικό ταλαντωτή σε σταθερό μαγνητικό πεδίο σε ένα χώρο μη μεταθετό. Χρησιμοποιούμε την ακόλουθη Χαμιλτονιανή.

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2m}\left(\hat{p}_1^2 + \hat{p}_2^2\right) + \frac{1}{2}m\omega_1^2\hat{q}_1^2 + \frac{1}{2}m\omega_2^2\hat{q}_2^2$$

Οι βασικοί τελεστές ικανοποιούν τις ακόλουθες σχέσεις μεταθέσεως

$$[\hat{q}_1, \hat{q}_2] = i\theta, \qquad [\hat{p}_1, \hat{p}_2] = i\lambda, \qquad [\hat{q}_1, \hat{p}_1] = i\hbar, \qquad [\hat{q}_2, \hat{p}_2] = i\hbar$$

όπου λ, θ είναι πραγματικές θετικές παράμετροι. Η παράμετρος λ εκφράζει την παρουσία ενός μαγνητικού πεδίου. Το σύστημα δεν μπορεί να εντοπιστεί μέσα σε ένα εμβαδόν μικρότερο από το θ λόγω της νέας σχέσης αβεβαιότητας $\Delta q_1 \Delta q_2 \sim \theta$ που συνεπάγεται από την μη αντιμεταθετικότητα των συντεταγμένων q_1 και q_2 του χώρου.

Αποδεικνύουμε πρώτα ότι το σύστημα είναι ισοδύναμο με ένα δισδιάστατο σύστημα όπου οι τελεστές της ορμής και της θέσης της δεύτερης διάστασης ικανοποιούν μια παραμορφωμένη σχέση μεταθέσεως. Αν συμβολίσουμε με κεφαλαία γράμματα τους νέους αυτούς τελεστές βρίσκουμε

$$[\hat{Q}_1, \hat{Q}_2] = 0, \qquad [\hat{P}_1, \hat{P}_2] = 0, \qquad [\hat{Q}_1, \hat{P}_1] = i\hbar, \qquad [\hat{Q}_2, \hat{P}_2] = i\hbar\mu$$

Η παράμετρος παραμόρφωσης $\mu = 1 - \lambda\theta/\hbar^2$ είναι ανεξάρτητη από την Χαμιλτονιανή. Τα δύο εναλλασσόμενα παρατηρήσιμα μεγέθη του συστήματος είναι $\tau_1 = q_1$ και $\tau_2 = q_2 - (\theta/\hbar)p_1$.

Γράφουμε μετά τον τελεστή της χρονικής εξελίξεως σε μια κατάλληλα διατεταγμένη μορφή ώστε μπορούμε να υπολογίζουμε τον ακριβή διαδοτή με έναν ευθύ τρόπο. Αποδεικνύουμε ότι οι άγνωστες συναρτήσεις μπορούν να βρεθούν με την βοήθεια των λύσεων του ισοδύναμου κλασσικού συστήματος. Βρίσκουμε επίσης την χρονική εξέλιξη των τελεστών των συντεταγμένων και των ορμών. Η μέθοδος μπορεί να εφαρμοσθεί εύκολα και για την περίπτωση που οι συχνότητες ω_1, ω_2 ή η μάζα m εξαρτώνται αναλυτικά από τον χρόνο.

Ερευνούμε τις θερμοδυναμικές ιδιότητες του συστήματος στην στατιστική του Μπόλτσμανν. Βρίσκουμε την στατιστική μήτρα πυκνότητας και την συνάρτηση διαμερισμού. Το σύστημα είναι ισοδύναμο με έναν δισδιάστατο αρμονικό ταλαντωτή με τις εξής δύο παραμορφωμένες συχνότητες $\hat{\omega}_1$ και $\hat{\omega}_2$.

$$\hat{\omega}_{1,2} = \frac{1}{2}\sqrt{(\omega_1+\omega_2)^2 + (-\omega_1\omega_2\theta+\lambda)^2} \;\pm\; \frac{1}{2}\sqrt{(\omega_1-\omega_2)^2 + (\omega_1\omega_2\theta+\lambda)^2}$$

Τελικά σπουδάζουμε την περίπτωση που ο φασικός χώρος της δεύτερης διάστασης γίνεται κλασσικός, δηλαδή $[\hat{Q}_2, \hat{P}_2] = 0$. Αυτό συμβαίνει όταν $\mu = 0$. Στην περίπτωση αυτή έχουμε ένα επιπλέον εναλλασσόμενο παρατηρήσιμο μέγεθος το $\pi_2 = p_2 + (\lambda/\hbar)q_1$. Το τελικό αποτέλεσμα εξαρτάται τώρα από τις ακόλουθες συχνότητες

$$\hat{\omega}_1 = \frac{1}{\lambda}\sqrt{(\lambda^2+\omega_2^2)(\lambda^2+\omega_1^2)} \qquad \kappa\alpha\iota \qquad \hat{\omega}_2 = 0$$

Στην περίπτωση ενός ελευθέρου συστήματος βρίσκουμε $\hat{\omega}_1 = \lambda$.