

Ασκήσεις στην Εισαγωγή στην Αλγεβρα και Θεωρία Συνόλων Φύλλο 4

25 Ιανουαρίου 2011

Ασκηση 1: Εστω ότι G είναι μια πεπερασμένη ομάδα με άρτιο πλήθος στοιχείων. Δείξτε ότι περιέχει ένα στοιχείο x , διαφορετικό από το ουδέτερο στοιχείο της ομάδας, τέτοιο ώστε $x^{-1} = x$.

(Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε το γεγονός ότι σε μια ομάδα $(x^{-1})^{-1} = x$)

Ασκηση 2: Δίνεται το παρακάτω υποσύνολο των μιγαδικών αριθμών:

$$\mathbb{Q}(i) = \{x + yi \in \mathbb{C} \mid x, y \in \mathbb{Q}\}$$

Δείξτε ότι αποτελεί σώμα.

Ασκηση 3: Δείξτε ότι σε μια πεπερασμένη ομάδα G με ουδέτερο στοιχείο e , για κάθε στοιχείο $x \in G$, μπορούμε να βρούμε κάποιο $n \in \mathbb{N}$ ώστε $x^n = e$.

(Υπόδειξη: Πόσα διαφορετικά στοιχεία μπορούν να υπάρχουν μεταξύ των $x, x^2 = x.x, x^3, \dots, x^n, \dots$;))

Ασκηση 4: Δείξτε ότι αν ο p είναι πρώτος αριθμός, τότε διαιρεί τον $\binom{p}{k}$, όπου $1 \leq k \leq p-1$. Χρησιμοποιώντας αυτό δείξτε ότι

$$(x + y)^p \equiv x^p + y^p \pmod{p}$$

Ασκηση 5: Θεωρούμε τη συνάρτηση $f: \mathbb{Z}_{mn} \rightarrow \mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n$ που στέλνει την κλάση $[x]_{mn}$ του x , modulo mn , στο ζευγάρι $([x]_m, [x]_n)$ των κλάσεων του x , modulo m και modulo n , αντίστοιχα.

Δείξτε ότι η συνάρτηση αυτή είναι ένα - προς - ένα, όταν οι αριθμοί, m, n έχουν μ.κ.δ το 1.