

Εξέταση στη Μαθηματική Λογική, Τμήματα Α' και Γ'

Τμήμα Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο Πατρών

1 Ιουλίου 2009

Θέμα 1: Εξετάστε αν καθεμία από τις παρακάτω προτάσεις είναι ταυτολογία, αντιλογία ή ουδέτερη:

$$\begin{aligned} & A \rightarrow (\neg A \rightarrow A), \neg A \rightarrow (\neg A \rightarrow A), \\ & (A_1 \vee A_2) \rightarrow ((A_1 \rightarrow (A_3 \wedge \neg A_3)) \rightarrow A_2), \\ & (A_1 \rightarrow (A_2 \rightarrow (A_3 \rightarrow (\dots \rightarrow (A_n \rightarrow A_1)\dots))) \end{aligned}$$

Θέμα 2: Γράψτε μια πρόταση που να περιέχει τρεις προτασιακές μεταβλητές A, B, C και να αληθεύει όταν τουλάχιστον δύο από αυτές γίνονται αληθείς. Είναι αυτή η πρόταση ισοδύναμη με την $(A \wedge B) \vee (B \wedge C) \vee (C \wedge A)$;

Θέμα 3: Δίνεται το σύνολο προτάσεων Σ , το οποίο είναι ικανοποιήσιμο. Εστω ότι τ είναι μια τυχαία πρόταση και $\sigma \in \Sigma$. Εξετάστε αν είναι ικανοποιήσιμα τα σύνολα $\Sigma \cup \{\tau \rightarrow \sigma\}$ και $\Sigma \cup \{\sigma \rightarrow \tau\}$. Δώστε γενική απόδειξη, αν κάτι ισχύει, ή αντιπαράδειγμα διαφορετικά (δηλαδή πάρτε μια ειδική περίπτωση ως πρόταση τ).

Θέμα 4: Εστω \mathcal{L} μια γλώσσα που μιλάει για τη θεωρία των φυσικών αριθμών και περιέχει τα συναρτησιακά σύμβολα δύο θέσεων $+, \cdot$, τα σύμβολα σταθερών $0, 1$ και ένα διμελές σχεσιακό σύμβολο D . Διαβάζουμε τα $+, \cdot, 0, 1$ με το συνηθισμένο τρόπο και το $D(x, y)$ ως «ο x διαιρεί τον y ». Γράψτε στη γλώσσα αυτή εκφράσεις που να λένε ότι: «ο αριθμός x είναι πρώτος», «ο αριθμός 2 είναι πρώτος». Θεωρώντας τώρα ότι έχουμε ένα μονομελές σχεσιακό σύμβολο P ώστε το $P(x)$ να διαβάζεται ως «ο αριθμός x είναι πρώτος», γράψτε την έκφραση «αν δύο πρώτοι αριθμοί διαιρούν έναν άλλο, τότε και το γινόμενό τους διαιρεί αυτόν τον άλλο αριθμό».

Ποιές από αυτές τις εκφράσεις είναι τύποι και ποιές προτάσεις;

Θέμα 5: Αποδείξτε ότι είναι ταυτολογία της Κατηγορηματικής Λογικής ο τύπος

$$\forall x(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\exists x\varphi \rightarrow \exists x\psi).$$

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ