

Εξέταση στη Μαθηματική Λογική

Τμήματα Α' και Β'

Τμήμα Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο Πατρών

1 Ιουλίου 2009

Θέμα 1: α) Εξετάστε αν είναι ταυτολογίες, αντιλογίες ή ουδέτερες οι παρακάτω:

$$A_1 \rightarrow (A_2 \rightarrow (A_1 \rightarrow A_2)), \quad A_1 \rightarrow ((A_2 \rightarrow A_1) \rightarrow A_2), \quad A_1 \rightarrow ((A_1 \rightarrow A_2) \rightarrow A_2)$$

β) Δείξτε ότι είναι λογικά ισοδύναμες οι προτάσεις

$$\neg(\varphi \rightarrow \neg\psi) \quad \text{και} \quad \neg(\psi \rightarrow \neg\varphi)$$

Θέμα 2: Αν Σ είναι ένα οποιοδήποτε σύνολο προτάσεων και Π το σύνολο όλων των προτάσεων, εξετάστε αν αληθεύουν οι παρακάτω ισχυρισμοί:

α) Αν $\Sigma \models \varphi \wedge \psi$, τότε $\Sigma \models \varphi$ και $\Sigma \models \psi$

β) Αν $\Sigma \models \varphi \vee \psi$, τότε $\Sigma \models \varphi$ ή $\Sigma \models \psi$

γ) $\text{Συν}(\Pi - \Sigma) \subseteq \Pi - \text{Συν}(\Sigma)$

Θέμα 3: Βρείτε τη διαζευκτική κανονική μορφή της πρότασης $\neg(A \wedge ((\neg(\neg A \vee B)) \vee \neg\Gamma))$. Εκφράστε την άρνηση και τη συνεπαγωγή με τη βοήθεια του συνδέσμου $\sigma \mid \tau = \neg(\sigma \wedge \tau)$

Θέμα 4: Εστω L μία γλώσσα της κατηγορηματικής λογικής που περιέχει το συναρτησιακό σύμβολο μίας θέσης s (το οποίο διαβάζουμε ως «ο επόμενος») και ένα σύμβολο σταθεράς 0 (που το διαβάζουμε «μηδέν»). Γράψτε προτάσεις της γλώσσας αυτής που να εκφράζουν ότι: «Αν δύο οποιαδήποτε στοιχεία έχουν ίσους επόμενους, τότε είναι ίσα» και «Κάθε στοιχείο είναι ίσο με το επόμενο κάποιου άλλου ή είναι ίσο με το μηδέν».

Επίσης πείτε ποιές είναι ελεύθερες εμφανίσεις μεταβλητών στον τύπο

$$\forall x \exists y (\forall w R(x, y, w) \rightarrow \exists z (R(x, y, z) \vee R(x, z, w)))$$

Θέμα 5: α) Δίνεται μία γλώσσα της κατηγορηματικής λογικής με ένα διμελές σχεσιακό σύμβολο R . Βρείτε ερμηνείες που να επαληθεύουν καθεμία από τις παρακάτω προτάσεις:

$$\forall x \forall y (R(x, y) \rightarrow \exists z (R(x, z) \wedge R(z, y))),$$

$$\forall x \forall y (R(x, y) \vee R(y, x))$$

β) Δείξτε ότι είναι λογικά ισοδύναμες οι προτάσεις

$$\neg(\exists x Q(x) \vee \exists x \forall y \neg R(x, y)) \quad \text{και} \quad \forall x (\neg Q(x) \wedge \exists y R(x, y))$$

Θα ίσχυε η ισοδυναμία αν οι θέσεις της σύζευξης και της διάζευξης ήταν αντεστραμμένες;

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ