Ευστάθεια και αστάθεια των ακραίων μελανών οπών

κατά τον Στέφανο Αρετάκη
(Cambridge/Princeton)

Πάτρα, 19 Μαΐου 2012

1. **Σύντομη περίληψη της γενικής σχετικότητας**
2. **Ειδικές λύσεις: Minkowski, Schwarzschild, Kerr**
3. **Γραμμική ευστάθεια των μη ακραίων μελανών οπών Kerr**
4. **Ιδιότητες της Kerr**
5. **Η ακραία περίπτωση και μια εκπληκτική ανακάλυψη**

Σύντομη περίληψη της γενικής σχετικότητας

Στη γενική σχετικότητα, μελετάμε 4-διάστατες πολλαπλότητες Lorentz $(\mathcal{M}, g)$ που ικανοποιούν τις **εξισώσεις Einstein**:

$$\mathrm{Ric}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = 8\pi T_{\mu\nu}. \tag{1}$$

Εδώ

- οι $g_{\mu\nu}$ $(\mu, \nu = 0, \ldots, 3)$ συμβολίζουν τις συνιστώσες της μετρικής g,
- οι $\mathrm{Ric}_{\mu\nu}$ συμβολίζουν τις συνιστώσες της **καμπυλότητας Ricci** της g,
- ο βαθμωτός R το ίχνος του τανυστή Ric,
- και οι $T_{\mu\nu}$ οι συνιστώσες του λεγόμενου **τανυστή ενέργειας-ορμής** της ύλης.

Στην περίπτωση του κενού $T_{\mu\nu} = 0$, οι (1) απλοποιούνται στις **εξισώσεις Einstein στο κενό**

$$\mathrm{Ric} = 0. \tag{2}$$

Η συναλλοίωτη μορφή των εξισώσεων

$$\mathrm{Ric} = 0 \tag{3}$$

κρύβει τις αναλυτικές τους ιδιότητες, και μάλιστα, δημιούργησε σύγχυση ως προς κάποια πολύ βασικά φαινόμενα της θεωρίας, π.χ. ύπαρξη βαρυτικής ακτινοβολίας.

Οι εξισώσεις είναι στην ουσία **υπερβολικές**, και ο πιό απλός τρόπος να το δεί κανείς αυτό είναι να επιλέξει **αρμονικές συντεταγμένες**:

$$\sum_{\mu,\nu} g^{\mu\nu}\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} = 0.$$

Μ΄ αυτήν την επιλογή οι (3) ανάγονται σ΄ ένα σύστημα **οιωνεί γραμμικών κυματοεξισώσεων** για τις συνιστώσες της αντίστροφης μετρικής $g^{\alpha\beta}$:

$$\Box_g g^{\alpha\beta} \doteq \sum_{\mu,\nu} g^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu g^{\alpha\beta} = N^{\alpha\beta}(g, \nabla g).$$

με καλώς ορισμένο πρόβλημα Cauchy (Choquet-Bruhat, 1952).

Ειδικές λύσεις: Minkowski, Schwarzschild, Kerr

Ειδικές λύσεις Ι: Χώρος Minkowski

Πριν ακόμα τη θεμελίωση της γενικής σχετικότητας, ο Minkowski (1908) επαναδιατύπωσε την προηγούμενη «ειδική σχετικότητα» του Einstein ως την αρχή ότι οι εξισώσεις της φυσικής πρέπει να έχουν γεωμετρική περιγραφή στον τετραταδιάστατο $\mathbb{R}^4$ με τη μετρική

$$g = -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2.^{\alpha}$$

Έτσι γεννήθηκε και η έννοια του χωρόχρονου.

Ονομάζουμε τον παραπάνω χωρόχρονο $(\mathbb{R}^4, g)$ **χώρο Minkowski**. Είναι το πιο απλό παράδειγμα μετρικής Lorentz και προφανώς είναι και η απλούστερη λύση των εξισώσεων $\mathrm{Ric} = 0$.

[α] σε συνιστώσες: $g_{00} = -1$, $g_{ii} = 1$, $i = 1, \dots 3$, $g_{ij} = 0$, $i \neq j$ (όπου $x^0 = t$, $x^1 = x$, $x^2 = y$, $x^3 = z$)

Ειδικές λύσεις II: Schwarzschild

Οι **λύσεις Schwarzschild** απαρτίζουν μια οικογένεια $(\mathcal{M}, g_M)$ (που εξαρτάται από την παράμετρο M) **σφαιρικά συμμετρικών, στατικών** λύσεων των $\mathrm{Ric} = 0$.

Ανακαλύφθηκαν το 1916. Σε τοπικές συντεταγμένες, η μετρική μπορεί να γραφεί

$$g_M = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\sigma_{\mathbb{S}^2}.$$

Αρχικά, φαινόταν ότι η παραπάνω μετρική είναι ιδιόμορφη εκεί που ο $r = 2M$.

Όπως πρωτοανακάλυψε ο Lemaitre (1932) όμως, μπορεί να επεκταθεί (χρησιμοποιώντας μια μη προφανή διαφορίσιμη δομή), σε μια περιοχή $0 < r \leq 2M$. Πολύ αργότερα, αυτή η περιοχή $0 < r \leq 2M$ ονομάστηκε (από τον Wheeler) **μαύρη τρύπα**, διότι δεν «επικοινωνεί» με παρατηρητές έξω απ αυτήν.

Η επιφάνεια $r = 2M$ στην επέκταση αυτή ονομάζεται **ορίζοντας γεγονότων**.

Ειδικές λύσεις III: Kerr

Οι μετρικές **Kerr** απαρτίζουν μια οικογένεια δύο παραμέτρων **στάσιμων, αξισυμμετρικών** μετρικών που ικανοποιούν τις εξισώσεις $\mathrm{Ric} = 0$. Ανακαλύφθηκαν το 1963.

Οι παράμετροι ονομάζονται **μάζα** M και **ειδική στροφορμή** a.

Σε τοπικές συντεταγμένες, η μετρική παίρνει την εξής μορφή:

$$g_{M,a} = -\frac{\Delta}{\rho^2}\left(dt - a\sin^2\theta d\phi\right)^2 + \frac{\rho^2}{\Delta}dr^2 + \rho^2 d\theta^2 + \frac{\sin^2\theta}{\rho^2}\left(a\,dt - (r^2+a^2)d\phi\right)^2$$

$\rho^2 = r^2 + a^2\cos^2\theta, \qquad \Delta = r^2 - 2Mr + a^2 = (r - r_-)(r - r_+),$

$|a| < M$ **υποακραία** μελανή οπή,

$|a| = M$ **ακραία** μελανή οπή,

$|a| > M$ περίπτωση «γυμνής ιδιομορφίας»

Γραμμική ευστάθεια των μη ακραίων μελανών οπών Kerr

Όπως και σε κάθε θεωρία της μαθηματικής φυσικής, έτσι και στη γενική σχετικότητα, οι ειδικές λύσεις των εξισώσεων Einstein έχουν φυσική σημασία *μόνο στην περίπτωση που είναι ευσταθείς ως λύσεις του προβλήματος Cauchy.*

Το πρόβλημα της ευστάθειας των λύσεων Kerr είναι ένα από τα μεγάλα άλυτα προβλήματα της γενικής σχετικότητας!

Ένα πιο απλό πρόβλημα είναι αυτό της *γραμμικής ευστάθειας*.

Αν θυμηθούμε τη μορφή των εξισώσεων σε αρμονικές συντεταγμένες:

$$\Box_g g^{\mu\nu} = N(g, \nabla g)$$

τότε μια απλουστευμένη γραμμικοποίηση γύρω από μια δεδομένη μετρική-λύση g είναι η μελέτη της βαθμωτής κυματοεξίσωσης:

$$\Box_g \psi = 0.$$

Το τελευταίο πρόβλημα έγινε αντικείμενο πολλής μελέτης (και έντονου συναγωνισμού!) τα τελευταία χρόνια, και στη λύση του έχουν συμβάλλει μεταξύ άλλων οι Μ.Δ.–Rodnianski, Schlag et al, Tataru et al, Andersson–Blue, Melrose et al, Zworski et al.

Το τελικό απότελεσμα αυτής της προσπάθειας συνόψιζεται στο εξής:

Θεώρημα. *(Μ.Δ.–Rodnianski 2011) Έστω $(\mathcal{M}, g)$ ο χωρόχρονος μιας* **μη ακραίας** *μετρικής Kerr με παραμέτρους $|a| < M$. Τότε οι λύσεις της κυματοξίσωσης*

$$\Box_g \psi = 0$$

μειώνονται αντιστρόφως πολυωνυμικά στο εξωτερικό της μαύρης τρύπας συμπεριλαμβανομένου και του ορίζοντα γεγονότων.

Ιδιότητες της Kerr

Η μελέτη της κυματοεξίσωσης

$$\Box_g \psi = 0$$

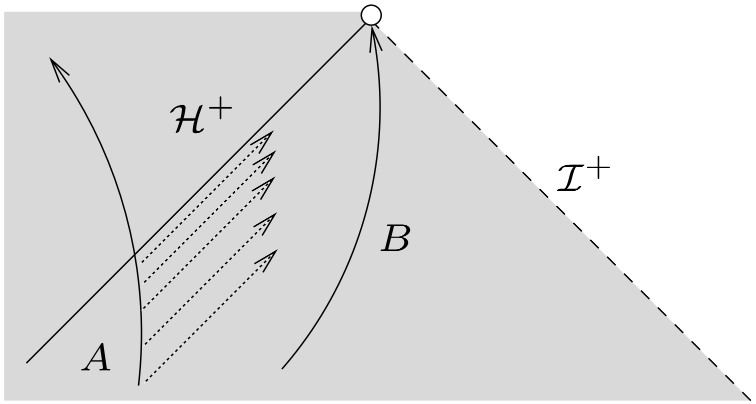
στον χωρόχρονο Kerr $(\mathcal{M}, g)$ είναι συνυφασμένη με την κατανόηση διαφόρων γεωμετρικών/φυσικών ιδιοτήτων της μετρικής g.

Οι πιο σημαντικές ιδιότητες είναι:

1. **Η μετατόπιση προς το ερυθρό.**
2. Η υπερακτινοβολία
3. Ο εγκλωβισμός των φωτοειδών γεωδαισιακών
4. Η σύζευξη των άνω τριών δυσκολιών!

Ιδιότητες της Kerr I: μετατόπιση προς το ερυθρό

Κατά την προσέγγιση της γεωμετρικής οπτικής, η **μετατόπιση προς το ερυθρό** κατανοείται με βάση το σήμα που εκπέμπει ένας παρατηρητής A (που διασχίζει τον ορίζοντα γεγονότων $\mathcal{H}^+$) σ᾽ έναν άλλον παρατηρητή B.



Πρωτοανακαλύφθηκε από τους Oppenheimer–Snyder, 1939.

Ιδιότητες της Kerr II: Υπερακτινοβολία

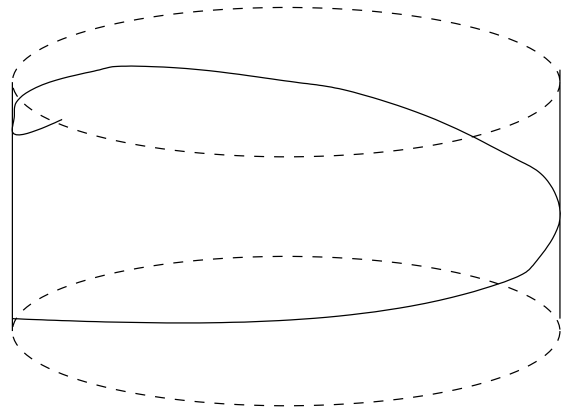
Στην περίπτωση της Schwarzschild ($a = 0$), το διάνυσμα Killing ∂_t είναι **χρονοειδές** στο εξωτερικό της μαύρης τρύπας, και **φωτοειδές** ακριβώς στον ορίζοντα. Συνεπώς, υπάρχει μια **διατηρήσιμη** *(σύμφωνα με το θεώρημα της Noether)* **θετικά ορισμένη** ενέργεια. Η μόνη δυσκολία είναι ότι η ενέργεια αυτή εκφυλίζεται ακριβώς στον ορίζοντα.

Στην οικογένεια Kerr όμως, για **κάθε** $0 \neq |a| \leq M$, το διάνυσμα ∂_t γίνεται **χωροειδές** σε μια περιοχή του ορίζοντα. Η σχετική ενέργεια διατηρείται αλλά δεν έχει πρόσημο. Στην κίνηση σωματιδίων, αυτό οδηγεί στο φαινόμενο της διαδικασίας Penrose. Για τα κύματα, οδηγεί στο φαινόμενο της *υπερακτινοβολίας* (Zeldovich).

Κατά συνέπεια, χρησιμοποιώντας μόνο τον νόμο διατήρησης του ∂_t δεν μπορούμε να αποδείξουμε ότι τα κύματα ψ παραμένουν ομοιόμορφα φραγμένα, ούτε καν μακρυά από τον ορίζοντα.

Ιδιότητες της Kerr III: εγκλωβισμός των φωτοειδών γεωδαισιακών

Στη Schwarzschild, η λεγόμενη «φωτονόσφαιρα» $r = 3M$ έχει την ιδιότητα ότι κάποιες φωτοειδείς γεωδαισιακές μένουν σ΄ αυτήν.



Συνεπώς, αυτές ούτε ξεφεύγουν στο άπειρο ούτε διασχίζουν τον ορίζοντα $\mathcal{H}^+$.

Στην Kerr, υπάρχει παρόμοια συμπεριφορά, ακόμα πιο περίπλοκη!

Συνεπώς, η ενέργεια μπορεί να συγκεντρωθεί για πολύ χρόνο κοντά σε τέτοιες γεωδαισιακές, και πρέπει να ποσοτικοποιηθεί αυτό το φαινόμενο για να αποδειχθεί ότι τελικά τα κύματα μειώνονται. (πβ. Ralston).

Ιδιότητες της Kerr IV: η (φαινομενική) σύζευξη των άνω δυσκολιών

Στη Schwarzschild, η δυσκολία της υπερακτινοβολίας δεν υφίσταται, η μετατόπιση προς το ερυθρό χρειάζεται μόνο πολύ κοντά στον ορίζοντα γεγονότων, και οι εκγλωβισμένες γεωδαισιακές βρίσκονται μακρυά απ΄ αυτήν.

Όπως αυξάνεται όμως η παράμετρος $|a|$ προς το M στην οικογένεια Kerr τότε οι τρεις δυσκολίες φαίνονται να ανακατεύονται, μιάς και συνυπάρχουν στην ίδια περιοχή του φυσικού χώρου.

Αυτό που επέτρεψε να αποδειχθεί το παραπάνω θεώρημα για όλες τις **μη ακραίες** παραμέτρους $|a| < M$ είναι ότι **οι δυσκολίες διαζευγνύονται στον χώρο των φάσεων**.

Αυτό απαιτεί μια αρκετά περίπλοκη αρμονική ανάλυση προσαρμοσμένη στη γεωμετρία των λύσεων Kerr.

Η ακραία περίπτωση και μια εκπληκτική ανακάλυψη!

Η αδυναμία του παραπάνω θεωρήματος να εξετάσει και την ακραία περίπτωση φαινόταν μάλλον τεχνική.

Γι αυτό και το εξής θεώρημα προκάλεσε φοβερή έκπληξη

Θεώρημα 1 (Στεφ. Αρετακης (2012)). *Στην* **ακραία Kerr**, *ακριβώς πάνω στον ορίζοντα γεγονότων, οι πρώτες παράγωγοι των γενικών ("generic") λύσεων της κυματοεξίσωσης*

$$\Box_g \psi = 0$$

δεν μηδενίζονται *ασυμπτωτικά προς το χρόνο, και οι δεύτερες παράγωγοι* **αυξάνονται** *πολυωνυμικά ως προς το χρόνο.*

Η «αστάθεια» του προηγούμενου θεωρήματος συμπληρώνεται από το εξής θεώρημα *ευστάθειας*:

Θεώρημα 2 (Στεφ. Αρετακησ (2011, 12)). *Στην* **ακραία Kerr**, **έξω από τον ορίζοντα γεγονότων**, *όλες οι παράγωγοι των λύσεων της κυματοεξίσωσης*

$$\Box_g \psi = 0$$

μειώνονται αντιστρόφως πολυωνυμικά ως προς τον χρόνο (αλλά με άλλο χαρακτηριστικό ρυθμό μείωσης από την μη ακραία περίπτωση).

Είχαν προηγηθεί αποτελέσματα για την **ακραία** Reissner–Nordström, ένα πιο απλό παράδειγμα ακραίας μαύρης τρύπας που δεν ικανοποιεί όμως τις εξισώσεις του κενού $\mathrm{Ric}(g) = 0$, αλλά το σύστημα Einstein–Maxwell.

Αυτά ήδη έχουν δημοσιευτεί εδώ:

- S. Aretakis *Stability and instability of extreme Reissner-Nordstrom black hole spacetimes for linear scalar perturbations I*, Comm. Math. Phys. **307** (2011), 17–63
- S. Aretakis *Stability and instability of extreme Reissner-Nordstrom black hole spacetimes for linear scalar perturbations II*, Ann. Henri Poincaré **8** (2011), 1491–1538

Γιατί είναι δύσκολη η μελέτη της κυματοεξίσωσης στην **ακραία** *περίπτωση;*

Υπενθυμίζω τις σημαντικές για μάς ιδιότητες της **μη ακραίας** περίπτωσης:

1. Η μετατόπιση προς το **ερυθρό**.
2. Η υπερακτινοβολία
3. Ο εγκλωβισμός των φωτοειδών γεωδαισιακών
4. Η (φαινομενική τουλάχιστον) σύζευξη των άνω τριών δυσκολιών

Στην ακραία περίπτωση η μετατόπιση προς το ερυθρό εκφυλίζεται, κι αυτό δυσχεραίνει τα πράγματα στον ορίζοντα. Αυτό είναι το κλειδί καί της αστάθειας, καί του διαφορετικού ρυθμού μείωσης.

Επιπλέον όμως, η τέταρτη δυσκολία, που όπως είδαμε στην μη ακραία περίπτωση ξεπερνιέται με τη διάζευξη των προβλημάτων στο χώρο των φάσεων, τώρα παραμένει. Γι αυτό και τα όποια αποτελεσμάτα ευστάθειας είναι πιο ασθενή.

Μάλιστα, το τελευταίο ανοίγει μερικά παρά πολύ ενδιαφέροντα πεδία ερεύνης στη γενική θεωρία της γεωμετρικής σκέδασης.

Συμπέρασμα

Το αποτέλεσμα αστάθειας του Αρετακη για τις λύσεις της

$$\Box_g \psi = 0$$

στην **ακραία Kerr** μάς λέει ότι οι **ακραίες** μαύρες τρύπες είναι μάλλον ασταθείς.

Παρά το γεγονός ότι οι χωρόχρονοι αυτοί μελετώνται εντατικά στη βιβλιογραφία της φυσικής υψηλών ενεργειών και της αστροφυσικής, αυτή η αστάθεια *δεν είχε παρατηρηθεί προηγουμένως, έστω και ευριστικά.*

Ενδεχομένως να πρέπει να αναθεωρηθεί ριζικά ο ρόλος αυτών των ακραίων μελανών οπών στη σημερινή κοσμοθεώρηση της θεωρητικής φυσικής.