2η Εβδομαδα - Τεταρτη 2 Νοεμβριου 2004

10. Κυκλώματα πράξεων - Στοιχειώδης μονάδα αριθμητικής

(α) Πρόσθεση δύο δυαδικών ψηφίων $y_1 + y_2$

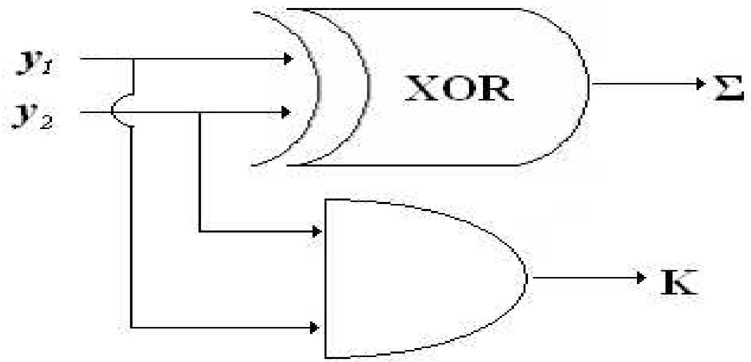
Η **βασική αριθμητική πράξη** που εκτελείται σ᾽ έναν Η.Υ. **είναι η πρόσθεση** 2 δυαδικών αριθμών, που προφανώς εδράζεται στην πρόσθεση δύο δυαδικών ψηφίων, που ευθύς αμέσως θα εξετάσουμε με λεπτομέρεια. Κατ᾽ αρχήν, όλες οι δυνατές περιπτώσεις που μπορούν να εμφανιστούν αποδίδονται από τον παρακάτω πίνακα 9 μαζί με τα αντίστοιχα εξαγόμενά τους, σε **προκύπτοντα ψηφία άθροισης** και **κρατουμένου**:

Πίνακας 9. Πίνακας άθροισης 2 δυαδικών ψηφίων

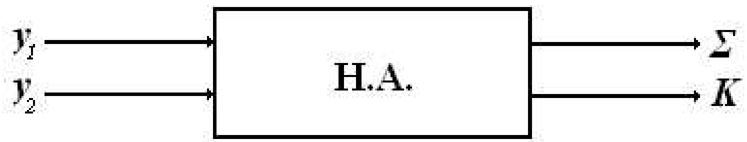
y_1	y_2	Ψηφίο αθροίσματος **Σ**	Ψηφίο κρατουμένου **K**
0	0	0	0
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	0	1

Από τον παραπάνω πίνακα καθίσταται σαφές ότι το **μεν ψηφίο άθροισης** συμπεριφέρεται ως το **εξαγόμενο του συγκριτή** (αποτέλεσμα 0 όταν τα αθροιζόμενα ψηφία είναι ίδια, αποτέλεσμα 1 όταν είναι διαφορετικά), ενώ το ψηφίο του κρατουμένου συμπεριφέρεται ως το εξαγόμενο της διάταξης AND. Κατά συνέπεια η διάταξη που υλοποιεί την άθροιση 2 δυαδικών ψηφίων, αποδίδεται από το παρακάτω σχήμα 16:

Σχήμα 16. Διάταξη Ημιαθροιστή



η δε συμβολική του παράσταση είναι:



και ονομάζεται **ημιαθροιστής** (Half-adder).

(β) **Αφαίρεση δύο δυαδικών ψηφίων** $y_1 - y_2$

Με παρόμοιο τρόπο αντιμετωπίζεται η περίπτωση της αφαίρεσης 2 δυαδικών ψηφίων. Δημιουργούμε, κατ᾽ αρχήν, τον αντίστοιχο πίνακα (αληθείας) όλων των δυνατών περιπτώσεων, του πίνακα 10:

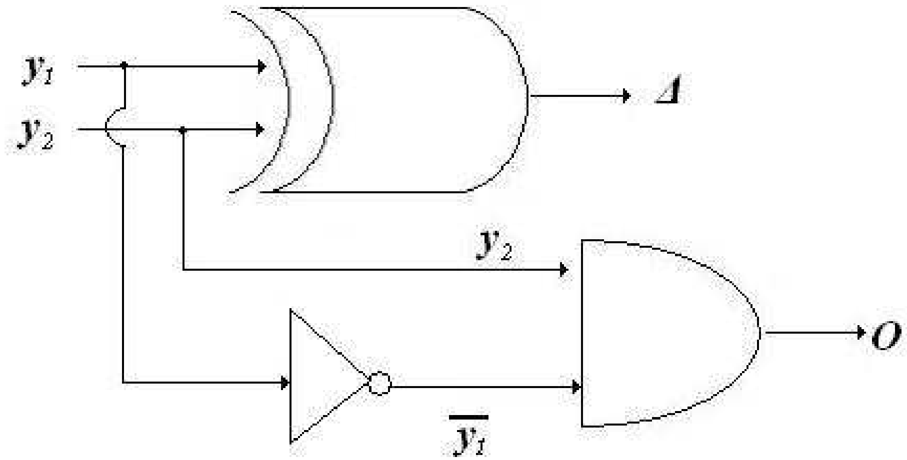
Πίνακας 10. Πίνακας αφαίρεσης 2 δυαδικών ψηφίων $y_1 - y_2$

y_1	y_2	Ψηφίο Διαφοράς **Δ**	Ψηφίο Δανεισμού-Οφειλομένου **O**
0	0	0	0
0	1	1	1
1	0	1	0
1	1	0	0

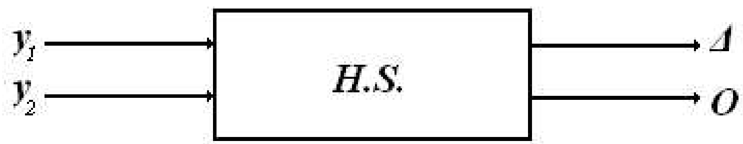
Μια ματιά στον πίνακα αφαίρεσης καθιστά προφανές ότι το ψηφίο διαφοράς έχει παρόμοια συμπεριφορά όπως και το ψηφίο του αθροίσματος (άρα θα αποτελεί την έξοδο ενός συγκριτή), ενώ το ψηφίο του Οφειλομένου αποτελεί την έξοδο της AND για **το συμπλήρωμα της εισόδου** y_1 **και το** y_2.

Έτσι, η σχηματική διάταξη της αφαίρεσης 2 δυαδικών ψηφίων, που καλείται και **ημιαφαιρετής** (Half-subtractor) είναι η ακόλουθη του σχήματος 16:

Σχήμα 16. Διάταξη Ημιαφαιρετή



με την ακόλουθη συμβολική παράσταση:



(γ) Πρόσθεση τριών δυαδικών ψηφίων y_1, y_2 και k

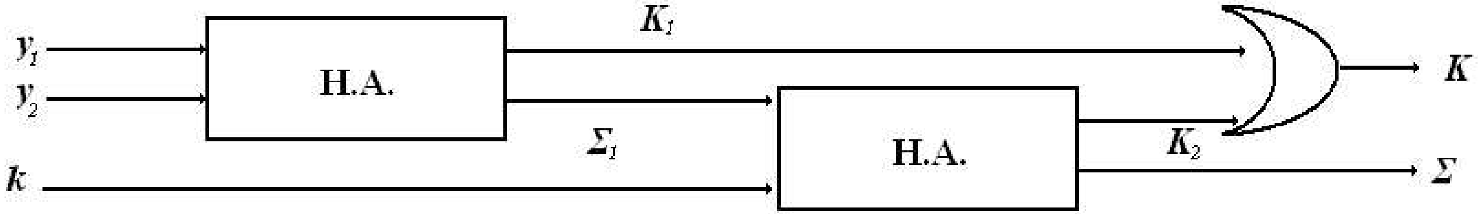
Η άθροιση δύο δυαδικών ψηφίων καλύπτει μόνο τα ψηφία των μονάδων στην περίπτωση της άθροισης 2 δυαδικών αριθμών. Για την όλη κάλυψη της διαδικασίας απαιτείται και η διάταξη της άθροισης 3 δυαδικών ψηφίων, των y_1 και y_2 (τα αντίστοιχα ψηφία των δύο προσθετέων) καθώς και του ψηφίου k (του κρατουμένου), που προέκυψε από το προηγούμενο βήμα της όλης διαδικασίας. Η μεθοδολογία παραμένει η ίδια· δηλαδή δημιουργούμε τον πίνακα όλων των δυνατών περιπτώσεων, που αποδίδεται από τον παρακάτω πίνακα 11, μαζί με τα αντίστοιχα αποτελέσματα:

Πίνακας 11. Πίνακας άθροισης 3 δυαδικών ψηφίων

y_1	y_2	k	**Σ**	**K**
0	0	0	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	1	0
0	1	1	0	1
1	0	0	1	0
1	0	1	0	1
1	1	0	0	1
1	1	1	1	1

Στη συνέχεια δημιουργούμε την παρακάτω διάταξη του σχήματος 17, που αποδίδει την διάταξη της άθροισης των 3 δυαδικών ψηφίων, που καλείται **Πλήρης Αθροιστής** (Full Adder):

Σχήμα 17. Διάταξη Πλήρη Αθροιστή



με την ακόλουθη συμβολική παράσταση:

(δ) **Αφαίρεση τριών δυαδικών ψηφίων** $y_1 - y_2 - O$

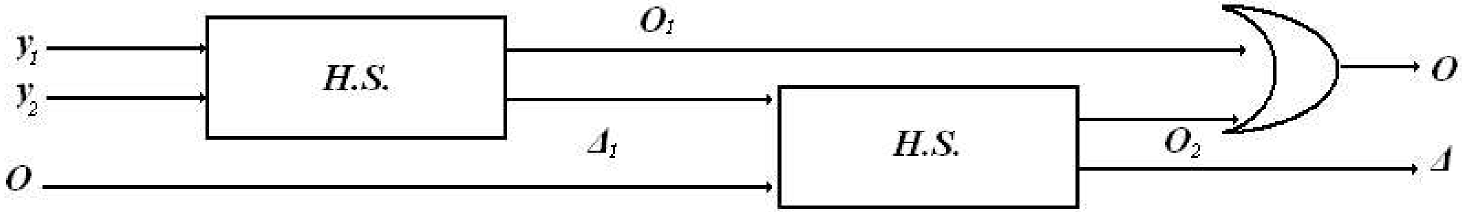
Με την ίδια λογική της άθροισης, υπάρχει ανάγκη κατά την υλοποίηση της διαδικασίας της αφαίρεσης 2 δυαδικών αριθμών, να διαθέτουμε την ίδια διαδικασία της αφαίρεσης 3 δυαδικών ψηφίων, για την κάλυψη των επόμενων ψηφίων, των μονάδων. Προς τούτο δημιουργούμε τον πίνακα 12 όλων των δυνατών περιπτώσεων (πίνακας αληθείας), που είναι:

Πίνακας 12. Πίνακας αφαίρεσης 3 δυαδικών ψηφίων $y_1 - y_2 - O$

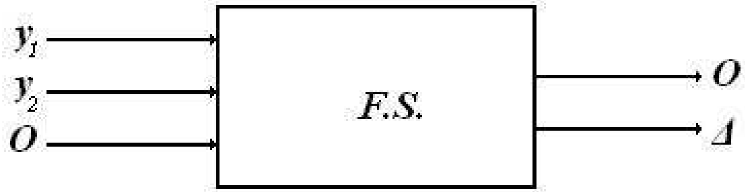
y_1	y_2	O	**Δ**	**Oφ**
0	0	0	0	0
0	0	1	1	1
0	1	0	1	1
0	1	1	0	1
1	0	0	1	0
1	0	1	0	0
1	1	0	0	0
1	1	1	1	1

και στη συνέχεια δημιουργούμε την παρακάτω διάταξη του σχήματος 18 που υλοποιεί την αφαίρεση των $y_1 - y_2 - O$, που ονομάζεται **Πλήρης Αφαιρετής** (Full Subtractor):

Σχήμα 18. Πλήρης Αφαιρετής



με την ακόλουθη συμβολική παράσταση:

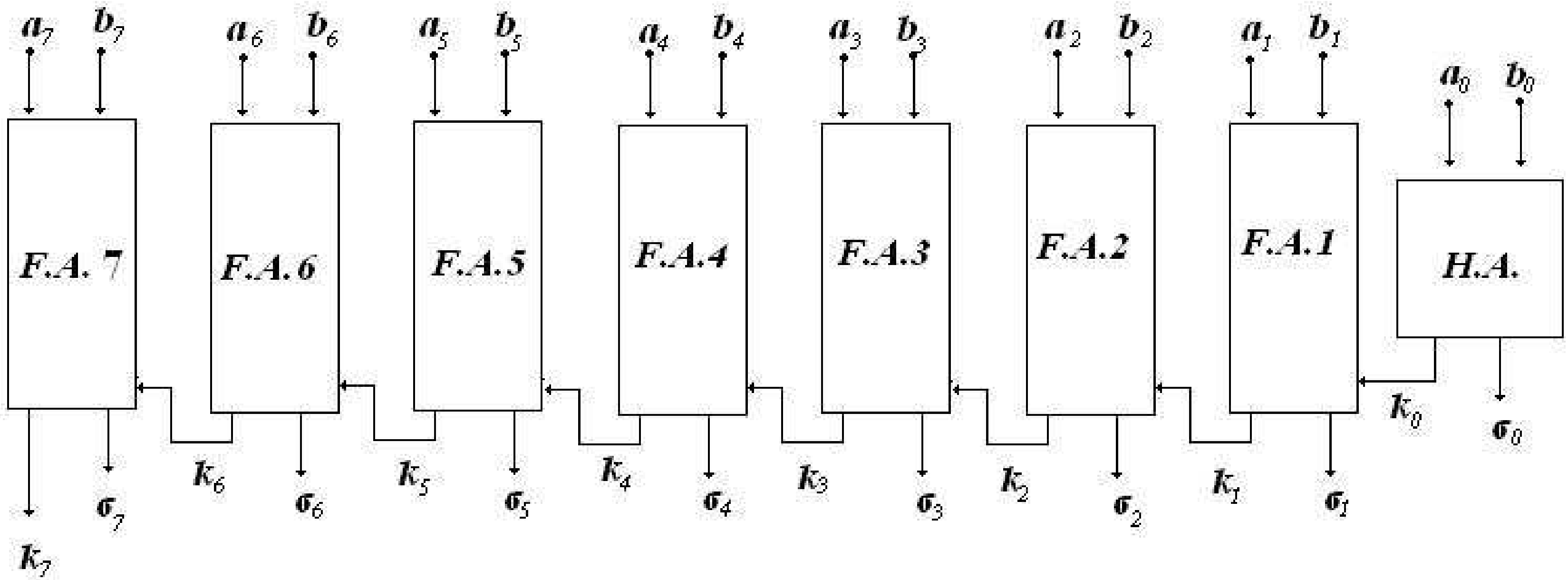


(ε) Αθροιστής δύο δυαδικών αριθμών

Με τη βοήθεια **του ημιαθροιστή** και του **πλήρη αθροιστή** είναι εύκολο πλέον να σχεδιαστεί **αθροιστής δύο δυαδικών αριθμών**, που στα επόμενα θα υποτεθεί ότι οι δυαδικοί αριθμοί έχουν το πολύ μήκος ενός byte (8 δυαδικών ψηφίων).

Κατά τα γνωστά ο **αλγόριθμος** της άθροισης συμπεριλαμβάνει ένα πρώτο βήμα με την άθροιση των **2 ψηφίων των μονάδων** (των 2 αριθμών) και στη συνέχεια διαδοχική άθροιση τριών ψηφίων, 2 των αντίστοιχων ψηφίων των 2 αριθμών και το τρίτο το ψηφίο του κρατουμένου, από το προηγούμενο βήμα, που θα είναι είτε 1, εάν όντως υπάρχει κρατούμενο, είτε 0, εάν δεν υπάρχει. Έτσι, λοιπόν ο σχεδιασμός του αθροιστή θα περιέχει, **ένα ημιαθροιστή**, για τα ψηφία των μονάδων, και ένα αριθμών πλήρων αθροιστών, για τα υπόλοιπα ψηφία (7 τον αριθμό στην προκειμένη περίπτωση), οπότε θα έχει την ακόλουθη μορφή του σχήματος 19:

Σχήμα 19. Αθροιστής 2 bytes των $a_7\ a_6\ a_5\ a_4\ a_3\ a_2\ a_1\ a_0$ και $b_7\ b_6\ b_5\ b_4\ b_3\ b_2\ b_1\ b_0$



Προφανώς το αποτέλεσμα της άθροισης των δυαδικών αριθμών $a_7\ a_6\ a_5\ a_4\ a_3\ a_2\ a_1\ a_0$ και $b_7\ b_6\ b_5\ b_4\ b_3\ b_2\ b_1\ b_0$ θα είναι, γενικά, ο εννεαψήφιος αριθμός:

$$k_7\ \sigma_7\ \sigma_6\ \sigma_5\ \sigma_4\ \sigma_3\ \sigma_2\ \sigma_1\ \sigma_0.$$

Παρατήρηση: Στο προηγούμενο σχήμα, χάριν ομοιομορφίας των δομικών υλικών του αθροιστή, θα μπορούσαμε στην θέση του ημιαθροιστή να κάνουμε χρήση ενός πλήρη αθροιστή, θέτοντας στη μία του είσοδο πάντοτε το μηδέν, οπότε τότε το όλο κύκλωμα του αθροιστή θα αποτελείται μόνο από πλήρεις αθροιστές.

(στ) Διάταξη προσθαφαίρεσης 2 δυαδικών αριθμών (Two complement Adder/Subtractor)

Για την περίπτωση της αφαίρεσης 2 δυαδικών αριθμών, αντί να έχουμε ένα άλλο κύκλωμα που θα εκτελεί την αφαίρεση δύο δυαδικών αριθμών, μπορούμε να αξιοποιήσουμε τον προηγούμενο αθροιστή για να επιτύχουμε το επιθυμητό αποτέλεσμα, επιτυγχάνοντας έτσι και την σχετική οικονομία στο κόστος του συστήματος. Προς τούτο ας δούμε τη διαδικασία της αφαίρεσης με χρήση **του συμπληρώματος ενός δυαδικού αριθμού ως προς το 2** (την βάση του δυαδικού συστήματος).

Ο κανόνας της αφαίρεσης προβλέπει τη συμπλήρωση (αντιστροφή) των ψηφίων του αφαιρετέου (από 1 γίνονται 0 και από 0 γίνονται 1), την **άθροιση** τους με τα ψηφία του μειωτέου και τη μεταφορά του τελικού κρατουμένου (**που διαγράφεται από κρατούμενο**) στο άθροισμα για **το τελικό αποτέλεσμα**.

Παράδειγμα: Ας πάρουμε 2 τετραψήφιους (half-bytes) δυαδικούς αριθμούς τον 7 (0111) και τον 3 (0011)· για την αφαίρεσή τους, παίρνω το συμπλήρωμα του 3 που είναι ο 1100 και τον προσθέτω στον μειωτέο:

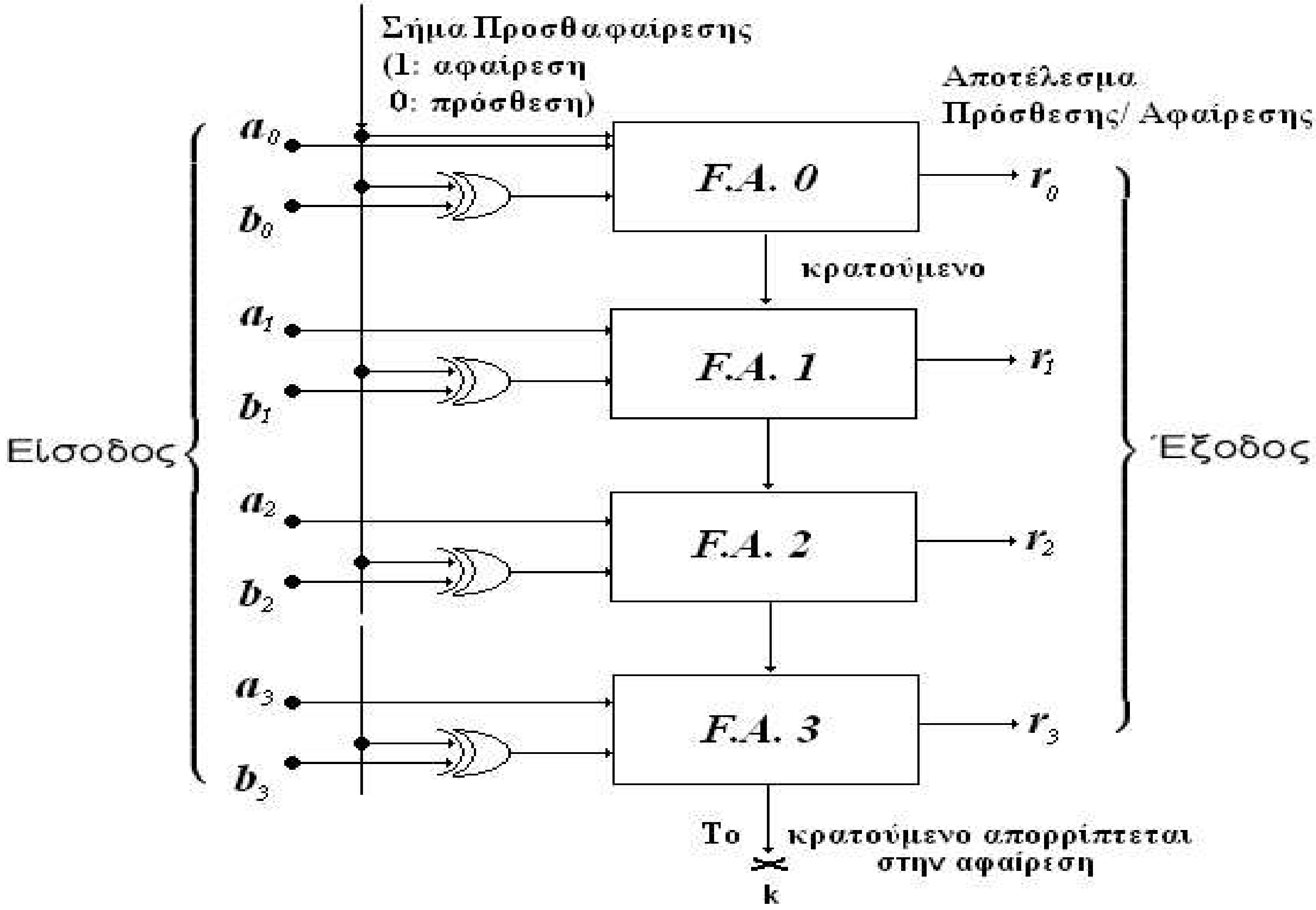
$$
\begin{array}{rcl}
 & 0\,1\,1\,1 & (\text{μειωτέο}) \\
 & 1\,1\,0\,0 & (\text{το συμπλήρωμα του αφαιρετέου}) \\
\hline
\text{Τελικό κρατούμενο} \leftarrow \boxed{1} & 0\,0\,1\,1 & \\
 \longrightarrow & +1 & \\
\hline
 & 0\,1\,0\,0 & \rightarrow
\end{array}
$$

Αποτέλεσμα της αφαίρεσης είναι το 4.

Τα παραπάνω υλοποιούνται από την παρακάτω διάταξη του σχήματος 20.

Σχήμα 20. Διάταξη Προσθαφαίρεσης των

$$\begin{array}{r} a_3\ a_2\ a_1\ a_0 \\ \pm\ b_3\ b_2\ b_1\ b_0 \\ \hline (\kappa)\, r_3\ r_2\ r_1\ r_0 \end{array}$$



Για την κατανόηση του σχήματος 20 θα ήταν χρήσιμο να δούμε τι συμβαίνει στον πίνακα αληθείας της πύλης XOR, όταν η μία είσοδός της είναι 0 ή 1 (που αποτελεί το σήμα προσθαφαίρεσης). Ο πίνακας είναι

XOR

A/B	0	1
0	0	1
1	1	0

Κατά συνέπεια, όταν μια είσοδος, έστω η A, είναι μηδέν (πρώτη γραμμή), τότε η XOR αποδίδει την άλλη είσοδο, δηλαδή τη B. Ενώ όταν είναι 1 (δεύτερη γραμμή) τότε αποδίδει τα συμπληρώματα της εισόδου B.

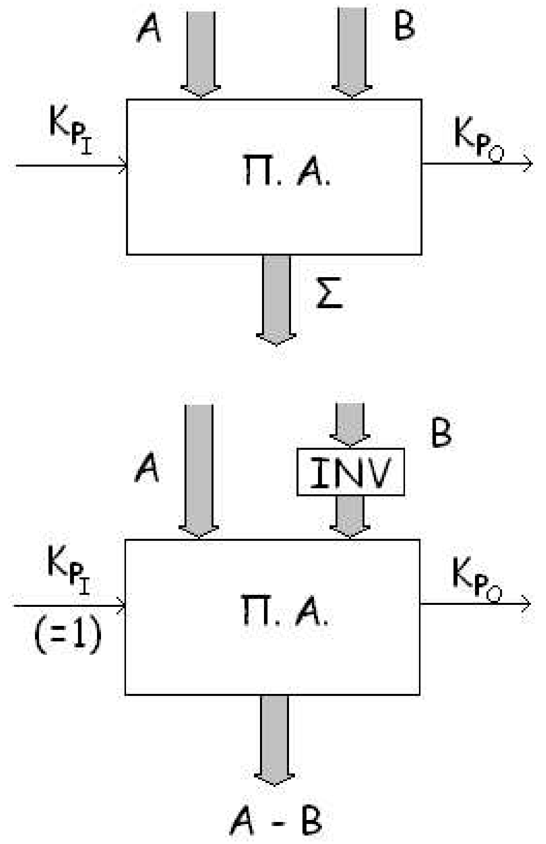
Επανερχόμενοι στο σχήμα 20, παρατηρούμε ότι ο αριθμός $a_0\ a_1\ a_2\ a_3$ εισάγεται στους 4 πλήρεις αθροιστές κανονικά-πάντοτε- ενώ ο αριθμός $b_0\ b_1\ b_2\ b_3$, εάν μεν το σήμα προσθαφαίρεσης είναι 0, δηλαδή **πρόσθεση είναι η πράξη που θα λάβει χώρα**, τότε ο αριθμός $b_0\ b_1\ b_2\ b_3$ **εισάγεται ως έχει**, αφού οι πύλες XOR ενεργούν ως απλοί διαβιβαστές του σήματος B.

Εάν, δε, το σήμα προσθαφαίρεσης είναι 1-δηλαδή **αφαίρεση είναι η πράξη που θα λάβει χώρα**- τότε στον πλήρη αθροιστή O εισάγεται το τελικό κρατούμενο, απ΄ αρχής, ενώ στους αθροιστές **εισάγονται τα συμπληρώματα των ψηφίων του B**, όπως προβλέπει ο κανόνας της αφαίρεσης. Το τελικό κρατούμενο στον πλήρη αθροιστή 3 απορρίπτεται, αφού έχει ήδη ληφθεί υπόψη στον πλήρη αθροιστή O.

(ζ) Η μονάδα αριθμητικής (Arithmetic Unit)

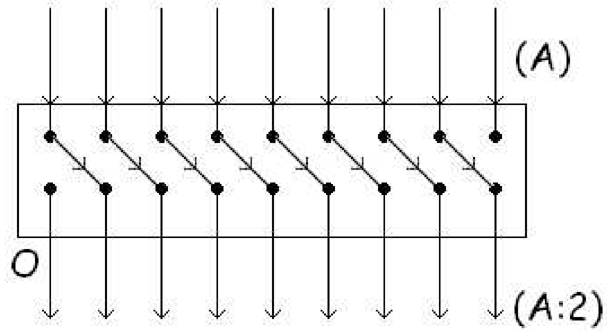
Κάθε ψηφιακός Η.Υ. πρέπει να εκτελεί πράξεις (βασικά **πρόσθεση**, **συμπλήρωση** - για την υλοποίηση της αφαίρεσης - και **μετατοπίσεις** για την υλοποίηση του πολλαπλασιασμού και της διαίρεσης) και αυτές γίνονται στην μονάδα αριθμητικής. Για μεν την πρόσθεση και αφαίρεση θα επισημάνουμε την παράλληλη εκτέλεση των πράξεων που υλοποιούνται σε δύο λέξεις A και B του υπολογιστή, πράγμα που αποδίδεται από το παρακάτω σχήμα 21.

Σχήμα 21. Παράλληλος Αθροιστής

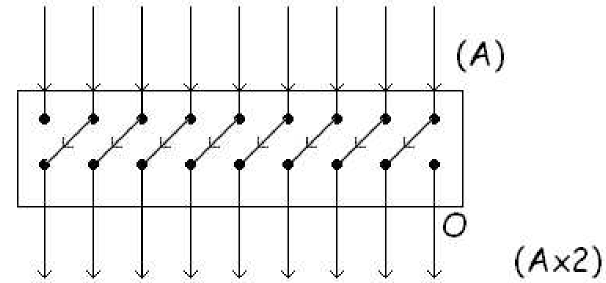


Για τις **δεξιές** και **αριστερές** μετατοπίσεις είναι εύκολο να διαπιστώσουμε ότι η μεν δεξιά μετατόπιση διαιρεί τον αριθμό διά δύο, ενώ η αριστερή μετατόπιση τον πολλαλασιάζει με το 2, όπως είναι σαφές από τα παρακάτω δύο σχήματα, όπου η είσοδος Α θεωρείται ότι είναι μήκους 1 byte.

(i) Δεξιά Μετατόπιση (Right Shifting)



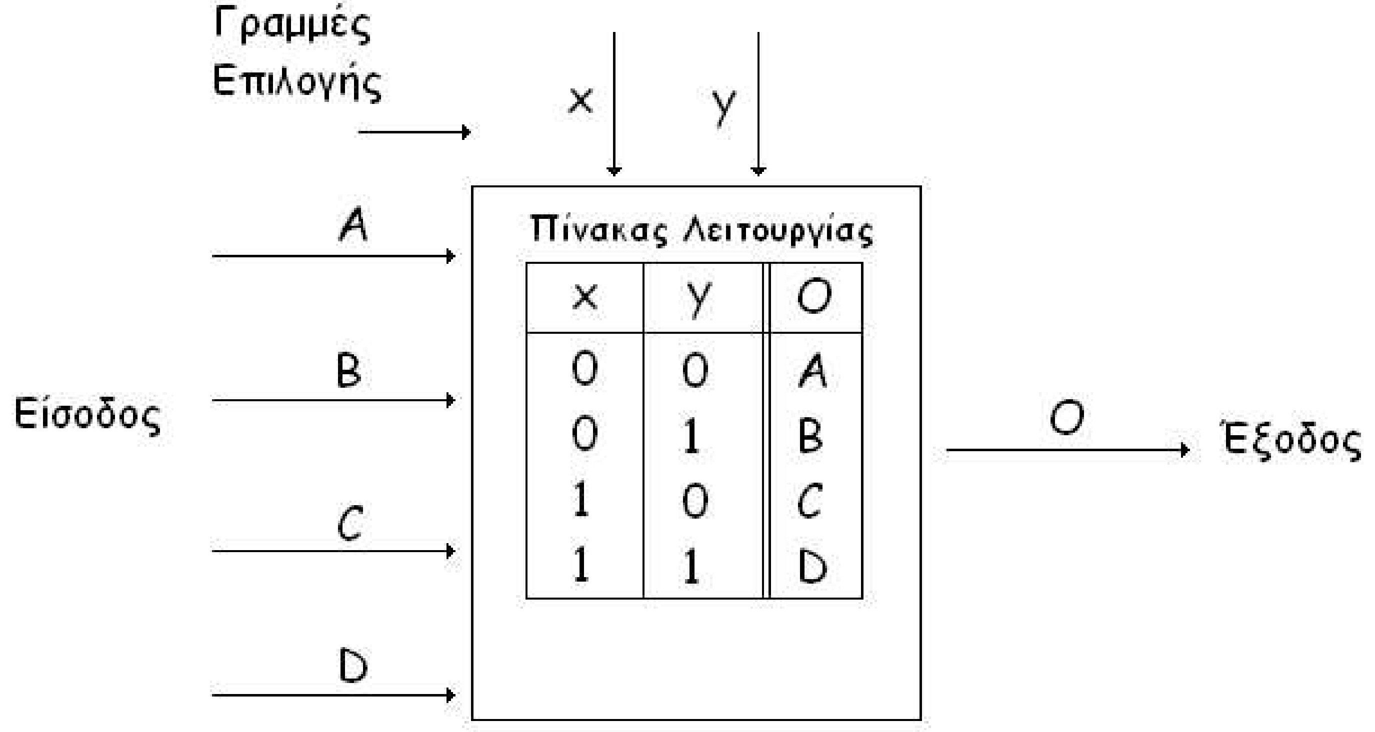
(ii) Αριστερή Μετατόπιση (Left Shifting)



Τέλος, η λειτουργία της αριθμητικής μονάδας απαιτεί την παρουσία ενός **επιλογέα δεδομένων**(multiplexer), που είναι μία διάταξη στην οποία καταλήγουν πολλές γραμμές δεδομένων και αυτή με κατάλληλο μηχανισμό, **των γραμμών επιλογής** (control lines), επιτρέπει την έξοδο μιάς και μόνο γραμμής (δηλαδή ο επιλογέα δεδομένων είναι ο «**τροχονόμος της αριθμητικής μονάδος**»).

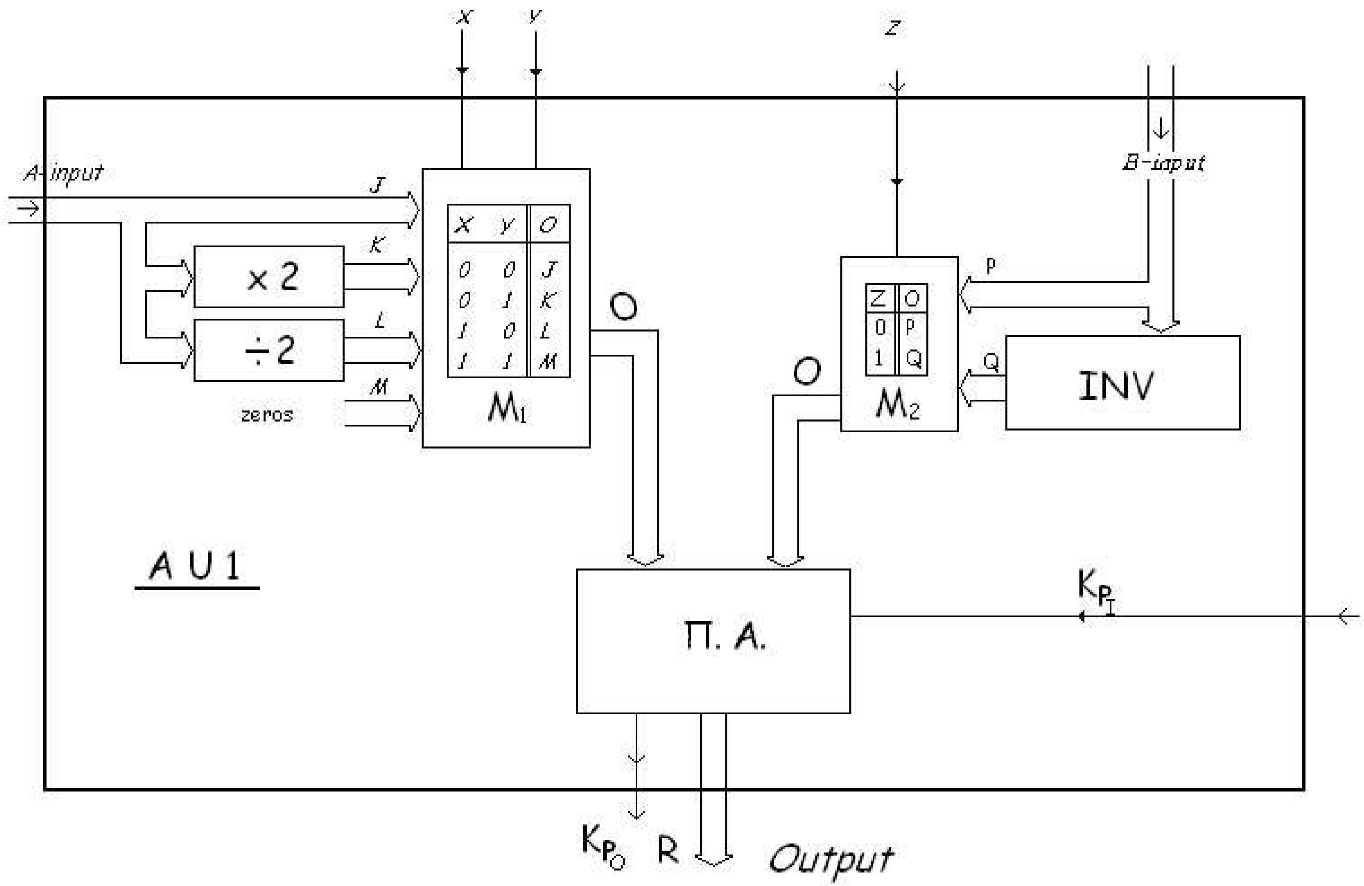
Το παρακάτω σχήμα 22 αποδίδει την όλη κατάσταση, ο δε πίνακας λειτουργίας, που υπάρχει, περιγράφει την έξοδο που αποδίδεται σε κάθε κατάσταση των γραμμών επιλογής x και y (βλέπε σχήμα 22).

Σχήμα 22. Επιλογέας Δεδομένων (Multi-Plexer) 4 επιλογών



Μετά τις προηγούμενες διασαφηνίσεις, μπορούμε να δώσουμε τη βασική δομή **της μονάδας αριθμητικής AU1** του σχήματος 23:

Σχήμα 23. Μονάδα Αριθμητικής
(ΣΤΟΙΧΕΙΩΔΗΣ ΜΟΝΑΔΑ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗΣ)



που σαν κεντρικό της στοιχείο είναι ο παράλληλος αθροιστής (Π.Α.), ενώ οι δύο εισοδοί του A και B υφίστανται διάφορες επεξεργασίες με βάση τα σήματα ελέγχου X, Y και Z των δύο multiplexers που υπάρχουν που όλες αποδίδονται από τον πίνακα λειτουργίας (βλέπε πίνακα 13) της μονάδος που ακολουθεί:

Πίνακας 13. Πίνακας λειτουργίας της AU1

Σήματα Ελέγχου			Δεδομένα			Αποτελέσματα	
X	Υ	Z	K_{p_I}	A	B	Πραγματοποιούμενη Πράξη	K_{p_O}
0	0	0	0			$R = A + B$	
0	0	0	1			$R = A + B + 1$	
0	0	1	0			$R = A - B - 1$	
0	0	1	1			$R = A - B$	
0	1	0	0			$R = 2A + B$	
0	1	0	1			$R = 2A + B + 1$	
0	1	1	0			$R = 2A - B - 1$	
0	1	1	1			$R = 2A - B$	
1	0	0	0			$R = {}^1/_2A + B$	
1	0	0	1			$R = {}^1/_2A + B + 1$	
1	0	1	0			$R = {}^1/_2A - B - 1$	
1	0	1	1			$R = {}^1/_2A - B$	
1	1	0	0			$R = B$	
1	1	0	1			$R = B + 1$	
1	1	1	0			$R = -B - 1$	
1	1	1	1			$R = -B$	

Από τον πίνακα 13 είναι σαφές ότι δεκαέξι (16) διαφορετικές περιπτώσεις επεξεργασίας δεδομένων A, B και K_{P_I} είναι δυνατόν να δημιουργηθούν με αντίστοιχα αποτελέσματα που εμφανίζονται στην στήλη «πραγματοποιούμενη πράξη», πέραν δε αυτών των διεργασιών η $AU1$ δεν δύναται να πραγματοποιήσει οτιδήποτε άλλο.

11. Άλγεβρα Boole, συναρτήσεις Boole απλοποίηση λογικών συναρτήσεων

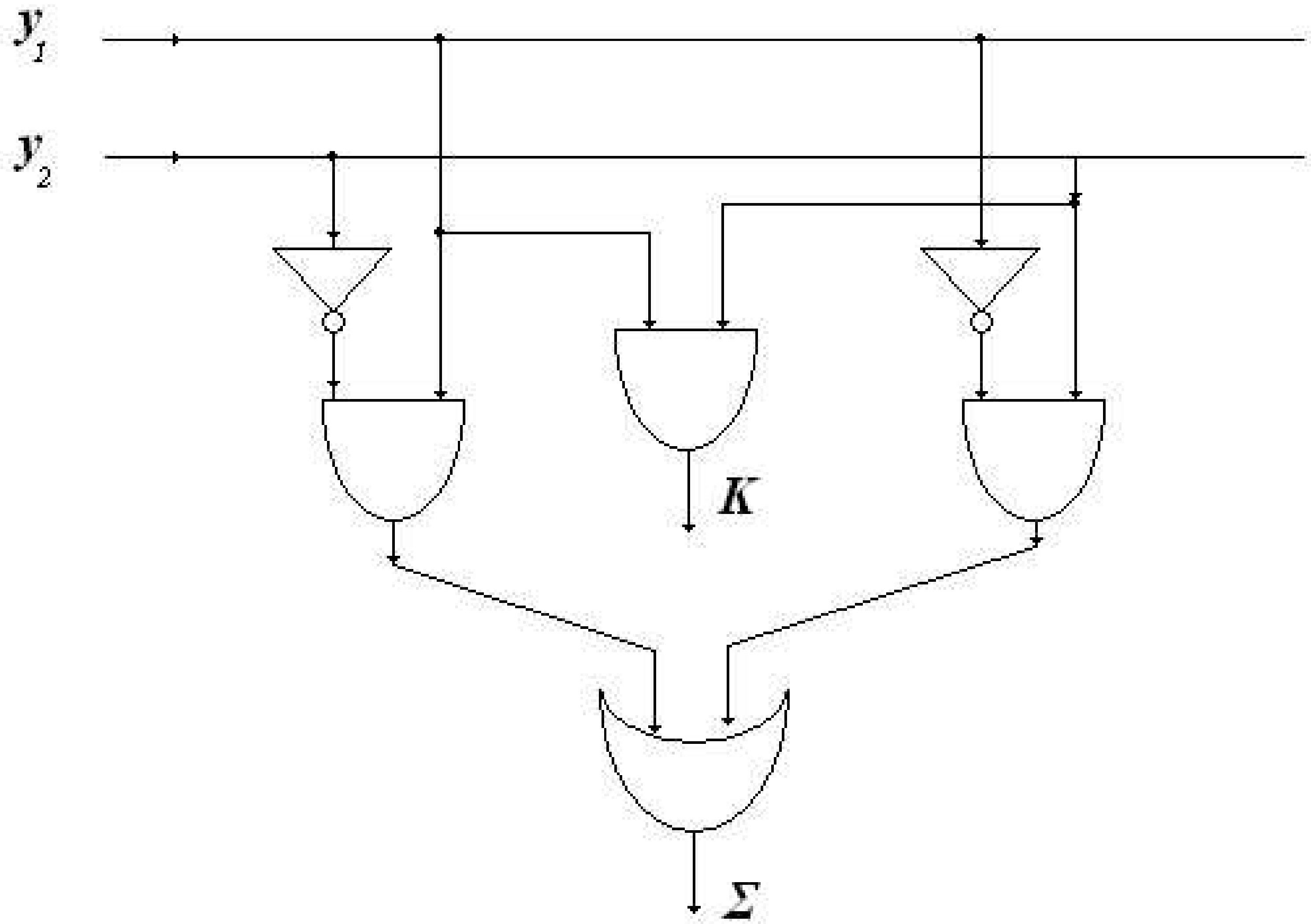
(α) Εισαγωγικά

Στο (α) του κεφαλαίου 10 δόθηκε ο πίνακας αληθείας της πρόσθεσης 2 δυαδικών ψηφίων $y_1 + y_2$, ενώ στη συνέχεια δόθηκε η διάταξη του ημιαθροιστή, που με τη βοήθεια τριών βασικών Σ.Μ.Ε.Π, υλοποιεί την όλη διαδικασία. Η μηχανική αυτή διάταξη βασικά χρησιμοποιεί 6 πύλες - gates (3 πύλες AND, μία OR και δύο NOT) και προφανώς δεν είναι μοναδική (βλέπε σχήμα 24).

Εξαγόμενες Πληροφορίες:

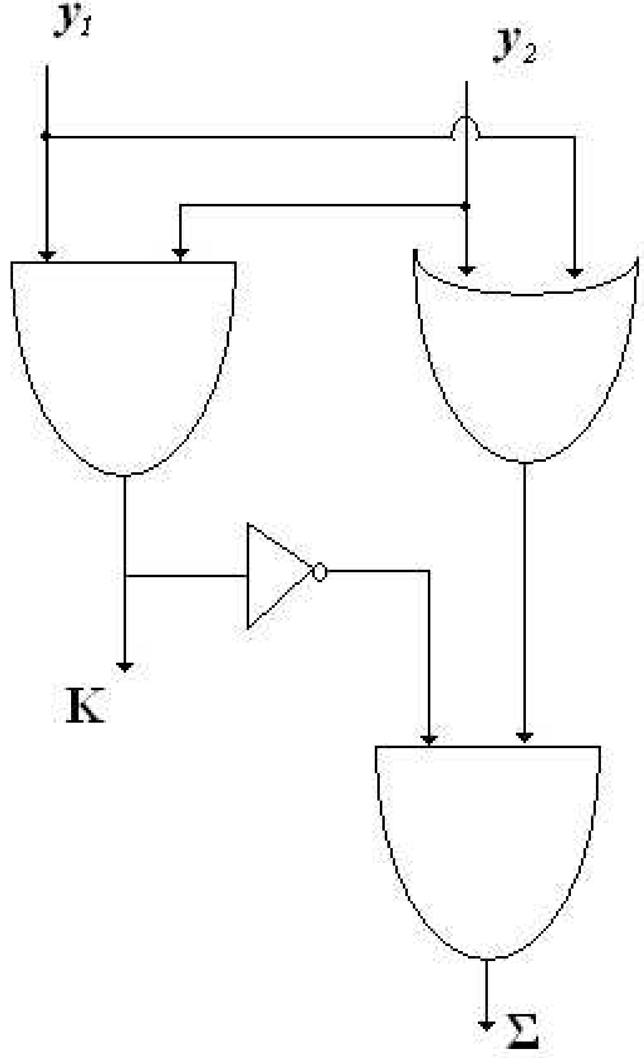
$$\begin{aligned} \Sigma &= y_1 \cdot \bar{y}_2 + \bar{y}_1 \cdot y_2 \\ K &= y_1 \cdot y_2 \end{aligned} \quad (1)$$

Σχήμα 24. Ημιαθροιστής 2 δυαδικών ψηφίων $y_1 + y_2$



Μια άλλη μηχανική διάταξη που υλοποιεί έναν ημιαθροιστή είναι η εξής του σχήματος 25:

Σχήμα 25. Βελτιωμένος ημιαθροιστής 2 δυαδικών ψηφίων $y_1 + y_2$



της οποίας ο πίνακας αληθείας εύκολα διαπιστώνεται ότι είναι ο αυτός με του ημιαθροιστή, του σχήματος 24.

Άσκηση: *Να βρεθεί ο πίνακας αληθείας της διάταξης του σχήματος 25 και να συγκριθεί με τον πίνακα αληθείας του ημιαθροιστή, του σχήματος 24.*

Τέλος, αργότερα θα δούμε ότι οι εξαγόμενες πληροφορίες από τη διάταξη του ημιαθροιστή πληρούν τις εκφράσεις:

$$\Sigma = \overline{y_1 \cdot y_2} \cdot (y_1 + y_2),\ K = y_1 \cdot y_2,$$

που αποδίδονται από τις εξόδους του σχήματος 25, και είναι προφανές ότι η διάταξη αυτή είναι προτιμητέα της παραπάνω διατάξεως του σχήματος 24, αφού αυτή απαιτεί 6 πύλες για την υλοποίησή της ενώ η διάταξη του σχήματος 25 απαιτεί μόνο 4· δηλαδή, έχουμε εξοικονόμιση πυλών 50%!

Ερώτημα: Ποια είναι η βέλτιστη διάταξη (προφανώς με το μικρότερο πλήθος πυλών) που υλοποιεί μια επιθυμητή διαδικασία;

Την απάντηση μπορούμε να την έχουμε μόνο εάν μαθηματικοποιήσουμε τη μέθοδο αναζήτησης, και **το όργανο γι΄ αυτό είναι η Άλγεβρα Boole**, που πρώτα αξιοποιήθηκε στη λογική των προτάσεων. Ο George Boole, ανέπτυξε την ομώνυμη Άλγεβρά του σε δύο έργα του: «Η μαθηματική Ανάλυση της Λογικής» (The mathematical Analysis of Logic, 1847) και (β) στο «Μια Διερεύνηση των Νόμων της Σκέψης» (An Investigation of the Laws of Thought-, 1854), με στόχο να ανακαλύψει τους τρόπους εργασίας του ανθρώπινου μυαλού. Το ενδιαφέρον στην προκειμένη περίπτωση είναι ότι η Άλγεβρα του Boole μπορεί εξίσου να εφαρμοσθεί και στον σχεδιασμό των ψηφιακών κυκλωμάτων, αφού η λογική των προτάσεων βασίζεται στο ότι μιά πρόταση είναι ή αληθής ή ψευδής, οπότε είναι προφανής η δυαδική της δομή.

Έτσι, υπάρχει στενή σύνδεση μεταξύ του σχεδιασμού της μονάδας CPU των Η.Υ. και της μαθηματικής λογικής, τόσο που **τα ψηφιακά κυκλώματα**, που εκτελούν πράξεις όπως π.χ. η πρόσθεση συχνά **ονομάζονται λογικά κυκλώματα** και ο σχεδιασμός τους καλείται **λογικός σχεδιασμός**, ενώ οι δυαδικές τιμές 1 και 0 ονομάζονται επίσης: «αληθής» και «ψευδής» (true and false), ή «ανοιχτός» ή «κλειστός» (on and off), ή «υψηλή» και «χαμηλή» (high and law), ή «λογική 1» και «λογική 0» (logic 1 and logic 0).

(β) **Λογικές μεταβλητές, λογικοί τελεστές και εκφράσεις τους**

Οι **λογικές μεταβλητές** είναι μεταβλητές που παίρνουν μία από τις δύο δυαδικές δυνατές τιμές 1 και 0, γι᾽ αυτό δε και ονομάζονται και **δυαδικές μεταβλητές** (binary variables). Π.χ. τα y_1 και y_2 στη διάταξη του σχήματος 21 είναι λογικές μεταβλητές αφού παίρνουν τιμές 0 και 1, που είναι τα δυαδικά ψηφία.

Οι **λογικοί τελεστές** είναι τελεστές που επενεργούν σε δυαδικές μεταβλητές. Οι βασικοί λογικοί τελεστές είναι: οι «**not**», «**and**», και «**or**», ορίζονται δε με τους ακόλουθους πίνακες αληθείας:

(2)

Χ	**not** Χ
0	1
1	0

Χ	Υ	Χ **and** Υ
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Χ	Υ	Χ **or** Υ
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Σημείωση: Οι παραπάνω 3 λογικοί τελεστές συμβολίζονται αντίστοιχα και με $\bar{X}, X \cdot Y$ (ή XY) και $X + Y$.

Οι **λογικές εκφράσεις** είναι εκφράσεις όπου όλοι οι τελεστές είναι λογικοί, περιέχουν μόνο λογικές μεταβλητές και τις λογικές σταθερές 1 και 0. Π.χ. οι παρακάτω εκφράσεις είναι λογικές εκφράσεις (x, y, z, q, b, c είναι λογικές μεταβλητές):

$$0,\ 1,\ x,\ \bar{x},\ x \cdot y,\ \overline{x+y},\ ab+bc+ac,\ (x+y)\cdot(x+z),$$

και είναι προφανές ότι αυτές λαμβάνουν μία από τις δύο τιμές 0 και 1, που υπολογίζονται με εφαρμογή των λογικών τελεστών και με βάση τους πίνακες (2).

Τέλος, κατά την εκτέλεση των υπολογισμών εκτελούνται οι λογικές πράξεις με την εξής **προτεραιότητα των τελεστών**: πρώτα οι **not**, μετά οι **and** και τέλος οι **or**· φυσικά, οι εκφράσεις σε παρενθέσεις έχουν προτεραιότητα (όπως ακριβώς και στο FORTRAN).
Παρατήρηση: Οι πίνακες αληθείας (2) των λογικών τελεστών **not**, **and** και **or** είναι οι ίδιοι ακριβώς με τους πίνακες αληθείας των 3 Σ.Μ.Ε.Π. (**NOT**, **AND** και **OR**)· άρα οι λογικοί τελεστές υλοποιούνται από τους 3 στοιχειώδεις μηχανισμούς επεξεργασίας πληροφοριών και ονομάζονται επίσης: **Συμπλήρωση, Πολλαπλασιασμός Boole και Πρόσθεση Boole**.

(γ) **Άλγεβρα Boole**

Η Άλγεβρα Boole είναι **μία αλγεβρική δομή** που ορίζεται σε ένα σύνολο στοιχείων Σ μαζί **με δύο δυαδικές πράξεις** (την πρόσθεση Boole «+» και τον πολλαπλασιασμό Boole «·») **και την πράξη της συμπλήρωσης** «¯», που ικανοποιούν τα ακόλουθα (έξη) αξιώματα (του Huttington 1904):

i) **Αξίωμα της Κλειστότητας (Closure) για τις πράξεις «+» και «·»**

(1) Αν A και B είναι δύο στοιχεία που ανήκουν στο Σ ($A \in \Sigma$ και $B \in \Sigma$) τότε και το στοιχείο $(A + B) \in \Sigma$

(2) Αν $A \in \Sigma$ και $B \in \Sigma$, τότε και $(A \cdot B) \in \Sigma$.

Παράδειγμα: Εάν $\Sigma \equiv \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ είναι το σύνολο των φυσικών αριθμών, η γνωστή μας πρόσθεση είναι μια πράξη για την οποία το $\mathbb{N}$ είναι κλειστό· δεν ισχύει όμως το ίδιο για την αφαίρεση, αφού το $(1 - 3) \notin \mathbb{N}$.

ii) **Αξίωμα υπάρξεως Ταυτοτικού Στοιχείου (Identity Element), ή Ουδέτερου Στοιχείου**

(1) Υπάρχει στο Σ ένα στοιχείο 0, που ονομάζεται **μηδενικό στοιχείο** ως προς την πρόσθεση («+»), με την ιδιότητα: $\forall A \in \Sigma$, ισχύει: $A + 0 = 0 + A = A$.

(2) Υπάρχει στο Σ ένα στοιχείο 1, που ονομάζεται **μοναδιαίο στοιχείο** ως προς τον πολλαπλασιαμό («·»), με την ιδιότητα: $\forall A \in \Sigma$, ισχύει: $A \cdot 1 = 1 \cdot A = A$.

Παράδειγμα: Για το $\mathbb{N}$ και τις πράξεις της προσθέσεως και του πολλπλασιασμού τα **ταυτοτικά στοιχεία** είναι **το μηδέν** και **το ένα**.

iii) **Αξίωμα Αντιμεταθετικότητας (Commutative Law)**

(1) Για $A \in \Sigma$ και $B \in \Sigma$ ισχύει: $A + B = B + A$

(2) Για $A \in \Sigma$ και $B \in \Sigma$ ισχύει: $A \cdot B = B \cdot A$.

Παράδειγμα: Στο $\mathbb{N}$ προφανώς ισχύουν αφού $2 + 3 = 3 + 2$ και $2 \cdot 3 = 3 \cdot 2$.

iv) **Αξίωμα Επιμεριστικότητας (Distributive Law)**

(1) Για $A \in \Sigma$, $B \in \Sigma$ και $\Gamma \in \Sigma$ ισχύει: $A+(B\cdot\Gamma) = (A+B)\cdot(A+\Gamma)$

(2) Για $A \in \Sigma$, $B \in \Sigma$ και $\Gamma \in \Sigma$ ισχύει: $A\cdot(B+\Gamma) = (A\cdot B)+A\cdot\Gamma)$.

Παράδειγμα: Στο $\mathbb{N}$ ισχύει το 2, **ΟΧΙ** όμως και το 1. Γιατί;

v) **Αξίωμα Υπάρξεως Συμπληρώματος (Complement)**

Για $\forall\ A \in \Sigma$ υπάρχει πάντοτε ένα στοιχείο $\bar{A}$ τέτοιο ώστε να ισχύουν:

(1) $A + \bar{A} = 1$

(2) $A \cdot \bar{A} = 0$.

Παράδειγμα: Στο σύνολο $\Sigma = \{0, 1\}$ και για τις πράξεις Boole ισχύουν, οι προηγούμενες ιδιότητες αφού:

$$\bar{0} = 1,\ \bar{1} = 0, \ \text{ και } \ 0 + 1 = 1,\ 0 \cdot 1 = 0.$$

vi) **Αξίωμα υπάρξεως 2 τουλάχιστον στοιχείων, διαφόρων μεταξύ των**

Στο σύνολο Σ υπάρχουν 2 τουλάχιστον στοιχεία A και B, με $A \neq B$.

Παρατήρηση: Στα 5 πρώτα αξιώματα αν αντικαταστήσουμε στα (1) την πράξη «+» με την πράξη «·» (την δυϊκή της) και το στοιχείο 0 με το 1 (το δυϊκό του) λαμβάνουμε τα (2)· αυτή **η δυϊκότης των αξιωμάτων** θα μας φανεί χρήσιμη στην απόδειξη θεωρημάτων.

Τέλος, τα παραπάνω αξιώματα δε συμπεριλαμβάνουν τον προσεταιριστικό νόμο (Associate Law), ο οποίος ισχύει στην Άλγεβρα Boole και μπορεί να αποδειχθεί με τη βοήθεια των παραπάνω αξιωμάτων, πράγμα που υποδηλώνει **την ύπαρξη άλλων συνόλων αξιωμάτων που μπορούν να θεμελιώσουν την Άλγεβρα Boole**. Εμείς, ακολουθώντας τον C.E. Shannon (1938), θα υιοθετήσουμε την άλγεβρα Boole που εισήγαγε (Switching algebra) για το σύνολο $\Sigma = \{0, 1\}$, που είναι κατάλληλη για τη δίτιμη δομή των στοιχείων του Η.Υ. Κατά συνέπεια **η άλγεβρα Boole που ακολουθούμε** έχει το **βασικό σύνολο** $\Sigma = \{0, 1\}$, **τις δύο δυαδικές πράξεις**, την Πρόσθεση Boole $(+)$, και του πολλαπλασιασμού Boole $(\cdot)$, καθώς και **την πράξη της Συμπλήρωσης ($^{-}$)**, για την οποία προφανώς ισχύει $\bar{0} = 1$, και $\bar{1} = 0$. Τα έξη αξιώματα του Huttington ισχύουν και με τη βοήθειά τους **αποδεικνύονται τα παρακάτω θεωρήματα**:

Θεώρημα 1 (De Morgan) *Εάν* $A, B \in \Sigma$ *τότε ισχύουν (παρατηρήσατε τη δυαδικότητα):*

$$(a)\overline{A+B} = \overline{A}\cdot\overline{B}, \qquad (\beta)\overline{A\cdot B} = \overline{A}+\overline{B}.$$

(Να αποδειχθούν με πίνακες αληθείας).

Θεώρημα 2 (Διπλής Συμπληρώσεως) *Αν* $A \in \Sigma$, *τότε ισχύει:* $(\overline{\overline{A}}) = A$.

Θεώρημα 3 (Αυτοενώσεως / Αυτοτομής) *Αν* $A \in \Sigma$, *τότε ισχύουν:* $A + A = A$, $A \cdot A = A$.

Θεώρημα 4 (Κυριαρχικότητας) *Αν* $A \in \Sigma$, *τότε ισχύουν:* $A + 1 = A$, $A \cdot 0 = 0$.

Θεώρημα 5 (Απορροφητικότητας) *Αν* $A, B \in \Sigma$, *τότε ισχύουν:* $A \cdot (A + B) = A$, $A + (A \cdot B) = A$.

Θεώρημα 6 (Προσεταιρισμού) *Αν* $A, B, \Gamma \in \Sigma$, *τότε ισχύουν:* $A + (B + \Gamma) = (A + B) + \Gamma$, $A \cdot (B \cdot \Gamma) = (A \cdot B) \cdot \Gamma$.

Θεώρημα 7 (Επιμερισμού) *Αν* $A, B \in \Sigma$, *τότε ισχύουν:*

$$A + \bar{A} \cdot B = A + B,\ A \cdot (\bar{A} + B) = A \cdot B.$$

(δ) **Συναρτήσεις Boole**

Στα προηγούμενα ορίσαμε τις λογικές μεταβλητές (ή μεταβλητές Boole) ως τις μεταβλητές εκείνες που λαμβάνουν τις τιμές 1 και 0 και μόνον αυτές. Τις λογικές μεταβλητές θα τις συμβολίζουμε με τα κεφαλαία γράμματα $A, B, C, \ldots, X, Y, Z$. Κάθε συνάρτηση μιας ή περισσοτέρων λογικών μεταβλητών λέγεται **λογική συνάρτηση ή συνάρτηση Boole**, και θα την συμβολίζουμε μ᾽ ένα μικρό γράμμα, συνήθως το f, που προφανώς θα παίρνει και αυτή την τιμή 1 ή την τιμή 0· π.χ. η $f(A, B) = A + A \cdot B$, είναι μια λογική συνάρτηση των λογικών μεταβλητών A και B.

Για κάθε συνάρτηση Boole είναι δυνατόν να δώσουμε τον πίνακα αληθείας της, ο οποίος φυσικά μας δίδει τις τιμές της συναρτήσεως για όλους τους δυνατούς συνδυασμούς **τιμών** των ανεξάρτητων μεταβλητών της· π.χ. για τις συναρτήσεις:

$$(3) \qquad f_1(A,B) = \overline{A+B}, \qquad f_2(A,B) = \overline{A} \cdot \overline{B}$$

θα έχουμε τον παρακάτω πίνακα (αληθείας) 14:

Πίνακας 14. Πίνακας αληθείας των συναρτήσεων f_1 και f_2

A	B	1	$\overline{A}$	$\overline{B}$	$A+B$	$\overline{A+B}$	$\bar{A}\cdot\bar{B}$	*Παρατηρήσεις*
0	0	1	1	0	1	1	1	Είναι προφανές ότι οι δύο
0	1	1	0	1	0	0	0	συναρτήσεις $f_1(A,B)$ και $f_2(A,B)$
1	0	0	1	1	0	0	0	είναι ισοδύναμες, αφού έχουν
1	1	0	0	1	0	0	0	τον αυτόν πίνακα τιμών (αληθείας).

Σημείωση: Η παρατήρηση στον παραπάνω πίνακα είναι γενική, δηλαδή είναι δυνατόν να ευρεθεί μιά απειρία συναρτήσεων Boole, που είναι **ισοδύναμες** με μια δοθείσα συνάρτηση Boole.

Κατά συνέπεια είναι **εύλογο το ερώτημα πώς κανείς μπορεί να εντοπίσει την απλούστερη από αυτές**, έτσι ώστε να οδηγηθεί στο απλούστερο λογικό κύκλωμα που θα την υλοποιεί. **Ένα πρώτο βήμα είναι η απλοποίηση των λογικών συναρτήσεων με εφαρμογή των αξιωμάτων και θεωρημάτων της Άλγεβρας** (αλγεβρική μέθοδος)· αλλά θα επανέλθουμε αργότερα για την μέθοδο Karnaugh.

Παραδείγματα:

1. Να δειχθούν οι σχέσεις των λογικών μεταβλητών:

$$(i)\ A \cdot B + A \cdot \bar{B} = A \qquad (ii)\ (A+B)\cdot(\bar{A}+C) = \bar{A}\cdot B + A \cdot C.$$

Απόδειξη της (i)

$$A \cdot B + A \cdot \bar{B} \underset{(iv.2)}{\overset{\text{αξίωμα}}{\longrightarrow}} A \cdot (B + \bar{B}) \underset{(v)}{\overset{\text{αξίωμα}}{\longrightarrow}} A,\ \text{ο.ε.δ.}$$

Απόδειξη της (ii)

$(A+B)\cdot(\bar{A}+C) = A\cdot\bar{A}+B\cdot\bar{A}+A\cdot C+B\cdot C =$ λόγω αξιώματος (vi) $\longrightarrow$

$$\bar{A}\cdot B\cdot(C+\bar{C})+A\cdot(B+\bar{B})\cdot C+(A+\bar{A})\cdot B\cdot C =$$

$$= \bar{A}\cdot B\cdot C+\bar{A}\cdot B\cdot\bar{C}+A\cdot B\cdot C+A\cdot\bar{B}\cdot C+A\cdot B\cdot C+\bar{A}\cdot B\cdot C =$$

$=$ (λόγω θεωρήματος 3) $= \bar{A}\cdot B\cdot C+\bar{A}\cdot B\cdot\bar{C}+A\cdot B\cdot C+A\cdot\bar{B}\cdot C =$

$= \bar{A}\cdot B+A\cdot C,$ ο.ε.δ.

2. Επί πλέον οι παρακάτω απλοποιήσεις είναι ευκολονόητες και εύχρηστες:

$$(i)\ \underline{X + \bar{X} \cdot Y} = (X + \bar{X}) \cdot (X + Y) = 1 \cdot (X + Y) = \underline{(X + Y)}$$

(Χρησιμοποιήθηκε το αξίωμα του επιμερισμού)

$$(ii)\ \underline{X \cdot (\bar{X} + Y)} = X \cdot \bar{X} + X \cdot Y = \underline{X \cdot Y}$$

(αφού $X \cdot \bar{X} = 0$ και αξιοποίηση του αξιώματος του επιμερισμού.)

$$(iii)\ \bar{X} \cdot \bar{Y} \cdot \bar{Z} + \bar{X} \cdot Y \cdot Z + X \cdot \bar{Y} = \bar{X} \cdot Z(\bar{Y} + Y) + X \cdot \bar{Y} = \bar{X} \cdot Z + X \cdot \bar{Y}.$$

$$(iv)\ X \cdot Y + \bar{X} \cdot Z + Y \cdot Z = X \cdot Y + \bar{X} \cdot Z + Y \cdot Z(X + \bar{X}) =$$

$$= X \cdot Y + \bar{X} \cdot Y + X \cdot Y \cdot Z + \bar{X} \cdot Y \cdot Z = X \cdot Y \cdot (1 + Z) + X \cdot Z \cdot (1 + Y) =$$

$$= X \cdot Y + X \cdot Z.$$

(ε) **Βασικές συναρτήσεις 2 μεταβλητών**

Είναι εύκολο να δειχθεί ότι το σύνολο όλων των συναρτήσεων 2 Λογικών μεταβλητών Χ και Υ είναι 16 (2^{2^2}, γενικότερα για ν μεταβλητές ισχύει για το σύνολο των συναρτήσεων ο τύπος 2^{2^ν}) και δίδονται από τον παρακάτω πίνακα 15:

Πίνακας 15. Πίνακας όλων των δυνατών συναρτήσεων 2 λογικών μεταβλητών

Χ	Υ	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
	Σύμβολο		$\cdot$	/	Χ	/	Υ	$\oplus$	$+$	$\downarrow$	$\odot$	$\bar{Y}$	$\subset$	$\bar{X}$	$\supset$	$\uparrow$	

στον οποίο μπορούμε να αναγνωρίσουμε τις ήδη γνωστές μας f_1 (το γινόμενο), f_7 (το άθροισμα), την f_6 (τον XOR), την f_{14} (NAND), κλπ.

(στ) **Ελάχιστοι και Μέγιστοι Όροι**

Ο ελάχιστος όρος (minterm) κ μεταβλητών Boole $X_0, X_1, X_2, \ldots, X_k$, ορίζεται ως **το λογικό γινόμενο των** k **αυτών μεταβλητών**, όπου η **κάθε μία εμφανίζεται άπαξ, ή η ίδια, ή το συμπλήρωμά της**· π.χ. για τις λογικές μεταβλητές A, B και C οι όροι $A \cdot B \cdot C$, $\bar{A} \cdot \bar{B} \cdot C$, $A \cdot \bar{B} \cdot \bar{C}$ είναι ελάχιστοι όροι, ενώ ο όρος $A \cdot B$ δεν είναι ελάχιστος αφού δεν υπάρχει παράγων C σ᾽ αυτόν.

Ο μέγιστος όρος (maxterm) κ μεταβλητών Boole $X_0, X_1, X_2, \ldots, X_k$, ορίζεται ως **το λογικό άθροισμα των** k **αυτών μεταβλητών**, όπου **η κάθε μεταβλητή εμφανίζεται άπαξ, ή η ίδια, ή το συμπλήρωμά της**· π.χ. για τις παραπάνω λογικές μεταβλητές οι όροι $A+B+C$, $\bar{A}+B+C$, $A+\bar{B}+\bar{C}$, $A+\bar{B}+C$ είναι μέγιστοι όροι.

Το πλήθος των ελαχίστων και των μεγίστων όρων είναι εύκολο να υπολογιστεί ότι είναι ίσο με 2^k, όπου k είναι το πλήθος των λογικών μεταβλητών· π.χ. για τις 3 λογικές μεταβλητές A, B και C έχουμε 8 όρους, που δίδονται στον παρακάτω πίνακα 16.

Πίνακας 16. Μέγιστοι και ελάχιστοι όροι συναρτήσεων 3 λογικών μεταβλητών

Μεταβλητές A	B	C	Ελάχιστοι Όροι (Minterms)	Συμβολισμός	Μέγιστος Όρος (Maxterms)	Συμβολισμός	Παρατηρήσεις
0	0	0	$\bar{A} \cdot \bar{B} \cdot \bar{C}$	E_0	$A + B + C$	M_0	Ισχύουν
0	0	1	$\bar{A} \cdot \bar{B} \cdot C$	E_1	$A + B + \bar{C}$	M_1	οι σχέσεις:
0	1	0	$\bar{A} \cdot B \cdot \bar{C}$	E_2	$A + \bar{B} + C$	M_2	$\bar{E}_k = M_k$,
0	1	1	$\bar{A} \cdot B \cdot C$	E_3	$A + \bar{B} + \bar{C}$	M_3	$\bar{M}_k = E_k$
1	0	0	$A \cdot \bar{B} \cdot \bar{C}$	E_4	$\bar{A} + B + C$	M_4	$k = 0, 1, 2, \ldots, 7$
1	0	1	$A \cdot \bar{B} \cdot C$	E_5	$\bar{A} + B + \bar{C}$	M_5	
1	1	0	$A \cdot B \cdot \bar{C}$	E_6	$\bar{A} + \bar{B} + C$	M_6	
1	1	1	$A \cdot B \cdot C$	E_7	$\bar{A} + \bar{B} + \bar{C}$	M_7	

Για τους **ελάχιστους** και **μέγιστους** όρους ισχύουν οι ακόλουθες σχέσεις (για k μεταβλητές):

(1) $\bar{M}_\nu = E_\nu$, $\nu = 0, 1, 2, \ldots, 2^k - 1$·

(2) $M_i + M_j = 1$ και $E_i \cdot E_j = 0$, $\forall i \neq j$ με $i, j \in \{0, 1, 2, \ldots, 2^k - 1\}$·

(3) $\sum\limits_{\nu=0}^{2^k-1} E_\nu = 1,\ \prod\limits_{\nu=0}^{2^k-1} M_\nu = 0$·

(4) $E_\mu = \prod\limits_{\substack{\nu=0\\ \nu\neq\mu}}^{2^k-1} M_\nu,\ \mu = 0,1,2,\ldots,2^k-1,\ M_\mu = \sum\limits_{\substack{\nu=0\\ \nu\neq\mu}}^{2^k-1} E_\nu$·

(5) **Κάθε λογική συνάρτηση k μεταβλητών παρίσταται μοναδικά ως εξής:**

$$f(A_1,A_2,\ldots,A_k) = \sum_{\nu=0}^{2^k-1} a_\nu E_\nu \ \text{ και } \ f(A_1,A_2,\ldots,A_k) = \prod_{\nu=0}^{2^k-1} (b_\nu + M_\nu)\,,$$

όπου $E_\nu, M_\nu,\ \nu = 0,1,2,\ldots,2^k-1$ οι ελάχιστοι και μέγιστοι όροι των k μεταβλητών και $a_\nu, b_\nu,\ \nu = 0,1,2,\ldots,2^k-1$ είναι οι «**χαρακτηριστικοί αριθμοί**» της λογικής συναρτήσεως f (παίρνουν τιμές 0 ή 1).

(ζ) **Απλοποίηση Λογικών Συναρτήσεων/Κυκλωμάτων**

Την μοναδική παράσταση κάθε λογικής συνάρτησης στο χώρο των ελαχίστων όρων της, που εκφράζει η τελευταία σχέση της προηγούμενης παραγράφου:

$$f(A_1, A_2, \ldots, A_k) = \sum_{\nu=0}^{2^k-1} a_\nu E_\nu,$$

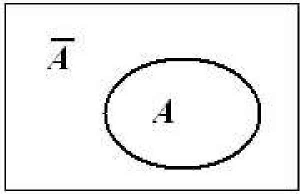
με a_ν τους χαρακτηριστικούς αριθμούς της f, θα αξιοποιήσουμε στη συνέχεια για να φθάσουμε στην απλούστερη δυνατή έκφρασή της.

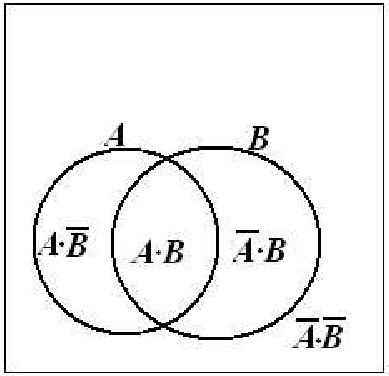
Για το σκοπό αυτό θα μας βοηθήσει η γραφική παράσταση των ελαχίστων όρων και το βοηθητικό εργαλείο του χάρτη Karnaugh. Προηγουμένως, όμως θα μας βοηθήσουν οι εξής επισημάνσεις:

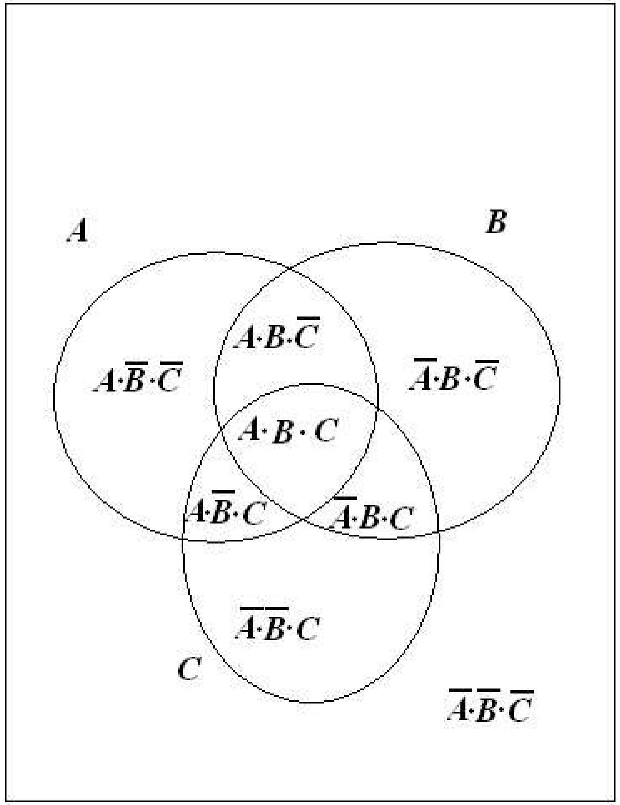
(i) **Κάθε ελάχιστος όρος (E) δύναται να θεωρηθεί ως μιά συνάρτηση της οποίας ο πίνακας αλήθειας έχει την ιδιότητα να λαμβάνει την τιμή 1 μόνο για ένα συνδυασμό τιμών των μεταβλητών της**, που ως δυαδικός αριθμός δίδει και την τάξη του ελαχίστου όρου. (Να γίνει επαλήθευση με τους ελαχίστους όρους του πίνακα των 3 μεταβλητών).

(ii) Αντίστοιχα, ισχύουν για **τους μεγίστους όρους**, όπου ο πίνακας αληθείας τους **έχει την ιδιότητα να λαμβάνει την τιμή 0 μόνο για ένα συνδυασμό τιμών των μεταβλητών του**, που ως δυαδικός αριθμός δίδει και την τάξη του μεγίστου όρου(Να γίνει επαλήθευση).

(iii) Εξάλλου, η παράσταση των ελαχίστων όρων μπορεί να αποδοθεί γραφικά με τα διαγράμματα Venn· π.χ γιά μία, δύο και τρεις μεταβλητές έχουμε τις εξής εικόνες των αντιστοίχων ελαχίστων όρων, για συναρτήσεις μιάς, δύο και τριών λογικών μεταβλητών.







Τώρα, εάν μετατρέψουμε τους κύκλους των διαγραμμάτων Venn σε τετραγωνίδια (που τοποθετούνται κατάλληλα), παίρνουμε **τα διαγράμματα Veitch απεικόνισης των ελαχίστων όρων**:

$\bar{A}$	$\bar{A}$
A	A

	$\bar{B}$	B
$\bar{A}$	$\bar{A}\cdot\bar{B}$	$\bar{A}\cdot B$
A	$A\cdot\bar{B}$	$A\cdot B$

	$\bar{B}\cdot\bar{C}$	$\bar{B}\cdot C$	$B\cdot\bar{C}$	$B\cdot C$
$\bar{A}$	$\bar{A}\cdot\bar{B}\cdot\bar{C}$	$\bar{A}\cdot\bar{B}\cdot C$	$\bar{A}\cdot B\cdot\bar{C}$	$\bar{A}\cdot B\cdot C$
A	$A\cdot\bar{B}\cdot\bar{C}$	$A\cdot\bar{B}\cdot C$	$A\cdot B\cdot\bar{C}$	$A\cdot B\cdot C$

Τέλος, με ανακατάταξη των τετραγωνιδίων Veitch λαμβάνεται ο χάρτης του Karnaugh, για τον οποίον έχουμε τις ακόλουθες τοποθετήσεις των ελαχίστων όρων για μία, δύο και τρεις μεταβλητές (2,4 και 8 ελάχιστοι όροι):

	$\bar{A}$
A	A

		B
	$\bar{A}\cdot\bar{B}$	$\bar{A}\cdot B$
A	$A\cdot\bar{B}$	$A\cdot B$

			B	B
	$\bar{A}\cdot\bar{B}\cdot\bar{C}$	$\bar{A}\cdot\bar{B}\cdot C$	$\bar{A}\cdot B\cdot\bar{C}$	$\bar{A}\cdot B\cdot C$
A	$A\cdot\bar{B}\cdot\bar{C}$	$A\cdot\bar{B}\cdot C$	$A\cdot B\cdot\bar{C}$	$A\cdot B\cdot C$
		C	C	

Σημείωση: Οι γραμμές και στήλες που δεν σημειώνονται αντιστοιχούν στα συμπληρώματα των αντιστοίχων μεταβλητών.

Για τις περιπτώσεις των 4, 5 και 6 μεταβλητών έχουμε τις παρακάτω μορφές (τοποθετήσεις των ελαχίστων όρων) του χάρτη του Karnaugh, των πινάκων 17, 18 και 19.

(1) **Περίπτωση των τεσσάρων μεταβλήτων** A, B, C **και** D (16 ελάχιστοι όροι)

Πίνακας 17. Χάρτης Karnaugh 4 μεταβλητών

$AB \backslash CD$				
	$\bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D}$	$\bar{A}\bar{B}\bar{C}D$	$\bar{A}\bar{B}CD$	$\bar{A}\bar{B}C\bar{D}$
B	$\bar{A}B\bar{C}\bar{D}$	$\bar{A}B\bar{C}D$	$\bar{A}BCD$	$\bar{A}BC\bar{D}$
A, B	$AB\bar{C}\bar{D}$	$AB\bar{C}D$	$ABCD$	$ABC\bar{D}$
A	$A\bar{B}\bar{C}\bar{D}$	$A\bar{B}\bar{C}D$	$A\bar{B}CD$	$A\bar{B}C\bar{D}$

(2) **Περίπτωση των πέντε μεταβλητών** A, B, C, D **και** E (32 ελάχιστοι όροι)

Πίνακας 18. Χάρτης Karnaugh για 5 μεταβλητές

$AB \backslash CDE$								
	$\bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D}\bar{E}$	$\bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D}E$	$\bar{A}\bar{B}\bar{C}DE$	$\bar{A}\bar{B}\bar{C}D\bar{E}$	$\bar{A}\bar{B}CD\bar{E}$	$\bar{A}\bar{B}CDE$	$\bar{A}\bar{B}C\bar{D}E$	$\bar{A}\bar{B}C\bar{D}\bar{E}$
	$\bar{A}B\bar{C}\bar{D}\bar{E}$	$\bar{A}B\bar{C}\bar{D}E$	$\bar{A}B\bar{C}DE$	$\bar{A}B\bar{C}D\bar{E}$	$\bar{A}BCD\bar{E}$	$\bar{A}BCDE$	$\bar{A}BC\bar{D}E$	$\bar{A}BC\bar{D}\bar{E}$
	$AB\bar{C}\bar{D}\bar{E}$	$AB\bar{C}\bar{D}E$	$AB\bar{C}DE$	$AB\bar{C}D\bar{E}$	$ABCD\bar{E}$	$ABCDE$	$ABC\bar{D}E$	$ABC\bar{D}\bar{E}$
	$A\bar{B}\bar{C}\bar{D}\bar{E}$	$A\bar{B}\bar{C}\bar{D}E$	$A\bar{B}\bar{C}DE$	$A\bar{B}\bar{C}D\bar{E}$	$A\bar{B}CD\bar{E}$	$A\bar{B}CDE$	$A\bar{B}C\bar{D}E$	$A\bar{B}C\bar{D}\bar{E}$

(3) **Περίπτωση των έξι μεταβλητών** A, B, C, D, E **και** F (64 ελάχιστοι όροι).

Πίνακας 19. Χάρτης Karnaugh για 6 μεταβλητές

$ABC \backslash DEF$								
	$\bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D}\bar{E}\bar{F}$	$\bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D}\bar{E}F$	$\bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D}EF$	$\bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D}E\bar{F}$	$\bar{A}\bar{B}\bar{C}DE\bar{F}$	$\bar{A}\bar{B}\bar{C}DEF$	$\bar{A}\bar{B}\bar{C}D\bar{E}F$	$\bar{A}\bar{B}\bar{C}D\bar{E}\bar{F}$
	$\bar{A}\bar{B}C\bar{D}\bar{E}\bar{F}$	$\bar{A}\bar{B}C\bar{D}\bar{E}F$	$\bar{A}\bar{B}C\bar{D}EF$	$\bar{A}\bar{B}C\bar{D}E\bar{F}$	$\bar{A}\bar{B}CDE\bar{F}$	$\bar{A}\bar{B}CDEF$	$\bar{A}\bar{B}CD\bar{E}F$	$\bar{A}\bar{B}CD\bar{E}\bar{F}$
	$\bar{A}BC\bar{D}\bar{E}\bar{F}$	$\bar{A}BC\bar{D}\bar{E}F$	$\bar{A}BC\bar{D}EF$	$\bar{A}BC\bar{D}E\bar{F}$	$\bar{A}BCDE\bar{F}$	$\bar{A}BCDEF$	$\bar{A}BCD\bar{E}F$	$\bar{A}BCD\bar{E}\bar{F}$
	$\bar{A}B\bar{C}\bar{D}\bar{E}\bar{F}$	$\bar{A}B\bar{C}\bar{D}\bar{E}F$	$\bar{A}B\bar{C}\bar{D}EF$	$\bar{A}B\bar{C}\bar{D}E\bar{F}$	$\bar{A}B\bar{C}DE\bar{F}$	$\bar{A}B\bar{C}DEF$	$\bar{A}B\bar{C}D\bar{E}F$	$\bar{A}B\bar{C}D\bar{E}\bar{F}$
	$AB\bar{C}\bar{D}\bar{E}\bar{F}$	$AB\bar{C}\bar{D}\bar{E}F$	$AB\bar{C}\bar{D}EF$	$AB\bar{C}\bar{D}E\bar{F}$	$AB\bar{C}DE\bar{F}$	$AB\bar{C}DEF$	$AB\bar{C}D\bar{E}F$	$AB\bar{C}D\bar{E}\bar{F}$
	$ABC\bar{D}\bar{E}\bar{F}$	$ABC\bar{D}\bar{E}F$	$ABC\bar{D}EF$	$ABC\bar{D}E\bar{F}$	$ABCDE\bar{F}$	$ABCDEF$	$ABCD\bar{E}F$	$ABCD\bar{E}\bar{F}$
	$A\bar{B}C\bar{D}\bar{E}\bar{F}$	$A\bar{B}C\bar{D}\bar{E}F$	$A\bar{B}C\bar{D}EF$	$A\bar{B}C\bar{D}E\bar{F}$	$A\bar{B}CDE\bar{F}$	$A\bar{B}CDEF$	$A\bar{B}CD\bar{E}F$	$A\bar{B}CD\bar{E}\bar{F}$
	$A\bar{B}\bar{C}\bar{D}\bar{E}\bar{F}$	$A\bar{B}\bar{C}\bar{D}\bar{E}F$	$A\bar{B}\bar{C}\bar{D}EF$	$A\bar{B}\bar{C}\bar{D}E\bar{F}$	$A\bar{B}\bar{C}DE\bar{F}$	$A\bar{B}\bar{C}DEF$	$A\bar{B}\bar{C}D\bar{E}F$	$A\bar{B}\bar{C}D\bar{E}\bar{F}$

Τέλος, εάν αντιστοιχίσουμε **σε κάθε μεταβλητή την τιμή 1** και **στο συμπλήρωμά της την τιμή 0**, σε κάθε τετράγωνο του χάρτη του Karnaugh θα αντιστοιχεί ένας **δυαδικός αριθμός** που παίρνει τις τιμές απο 0 έως $2^6 - 1$, που είναι το πλήθος των ελαχίστων όρων και **που η τιμή του δίδει** και **την τάξη του ελαχίστου όρου που υπάρχει στο τετράγωνο του χάρτη**.

Π.χ. το 1ο και το 2ο τετραγωνίδιο είναι οι αριθμοί 000000 και 000001. Έτσι, λοιπόν παίρνουμε τις ακόλουθες αντιστοιχίσεις ελαχίστων όρων και τετραγώνων του χάρτη του **Karnaugh**, για πλήθος μεταβλητών $\nu = 1, 2, \ldots, 6$, του πίνακα 20:

Πίνακας 20. Οι τάξεις των τετραγώνων του χάρτη Karnaugh

ν=1

A	
0	0
1	1

ν=2

$A \backslash B$	0	1
0	0	1
1	2	3

ν=3

$A \backslash BC$	00	01	11	10
0	0	1	3	2
1	4	5	7	6

ν=4

$AB \backslash CD$	00	01	11	10
00	0	1	3	2
01	4	5	7	6
11	12	13	15	14
10	8	9	11	10

ν=5

$AB \backslash CDE$	000	001	011	010	110	111	101	100
00	0	1	3	2	6	7	5	4
01	8	9	11	10	14	15	13	12
11	24	25	27	26	30	31	29	28
10	16	17	19	18	22	23	21	20

ν=6

$ABC \backslash DEF$	000	001	011	010	110	111	101	100
000	0	1	3	2	6	7	5	4
001	8	9	11	10	14	15	13	12
011	24	25	27	26	30	31	29	28
010	16	17	19	18	22	23	21	20
110	48	49	51	50	54	55	53	52
111	56	57	59	58	62	63	61	60
101	40	41	43	42	46	47	45	44
100	32	33	35	34	38	39	37	36

(η) **Παράσταση Λογικής Συνάρτησης στον χάρτη Karnaugh.**

Αν για μία λογική συνάρτηση που μας δίδεται και την οποία έχουμε αναλύσει σ΄ ένα λογικό άθροισμα ελαχίστων όρων, σχηματίσουμε τον αντίστοιχο χάρτη Karnaugh και **θέσουμε μονάδες στα τετραγωνίδια εκείνα που αντιστοιχούν σε ελαχίστους όρους στους οποίους έχει αναλυθεί η συνάρτηση μας (οπότε σ΄ όλα τ'αλλα τετραγωνίδια θα υπάρχουν μηδενικά), αυτό που θα έχουμε το ονομάζουμε παράσταση της λογικής συναρτήσεως στο χάρτη Karnaugh.**

Είναι εύκολο να αποδειχθούν οι παρακάτω προτάσεις, βοηθητικές στην διαδικασία απλοποίησης:

1ος Κανόνας Karnaugh

Αν η παράσταση μιας λογικής συναρτήσεως 2 μεταβλητών περιέχει 2 **γειτονικές μονάδες (οριζοντίως ή καθέτως)** τότε **οι αντίστοιχοι δύο ελάχιστοι όροι αντικαθίστανται με έναν**, που βρίσκεται από τους προηγούμενους, εάν αφαιρεθεί η μεταβλητή που αλλάζει τιμή από το ένα τετραγωνίδιο στο άλλο.

Παράδειγμα: Ας λάβουμε τον πίνακα αλήθειας του πλήρη αθροιστή του παρακάτω σχήματος 26 και ας παραστήσουμε τις συναρτήσεις του ψηφίου του αθροίσματος και του ψηφίου του κρατουμένου σε δύο χάρτες Karnaugh, οπότε έχουμε:

Σχήμα 26. Πίνακας αλήθειας πλήρη αθροιστή

	y_1	y_2	k	**Σ**	**K**
E_0	0	0	0	0	0
E_1	0	0	1	$\boxed{1}$	0
E_2	0	1	0	$\boxed{1}$	0
E_3	0	1	1	0	$\boxed{1}$
E_4	1	0	0	$\boxed{1}$	0
E_5	1	0	1	0	$\boxed{1}$
E_6	1	1	0	0	$\boxed{1}$
E_7	1	1	1	$\boxed{1}$	$\boxed{1}$

$$\Sigma = E_1 + E_2 + E_4 + E_7,$$

$$K = E_3 + E_5 + E_6 + E_7.$$

Χάρτης Karnaugh για **Σ**

			y_2	y_2
		$\mathbf{1}_{E_1}$		$\mathbf{1}_{E_2}$
y_1	$\mathbf{1}_{E_4}$		$\mathbf{1}_{E_7}$	
		k	k	

Χάρτης Karnaugh για **k**

			y_2	y_2
			$\mathbf{1}_{E_3}$	
y_1		$\mathbf{1}_{E_5}$	$\mathbf{1}_{E_7}$	$\mathbf{1}_{E_6}$
		k	k	

Από τους χάρτες Karnaugh του σχήματος 23, εύκολα συμπεραίνουμε ότι η συνάρτηση Σ δεν περιέχει διαδοχικές μονάδες, άρα δεν απλοποιείται. Αντίθετα, ο χάρτης Karnaugh του K περιέχει τρεις απλοποιήσεις, των (E_3, E_7), (E_5, E_7) και (E_7, E_6).

2ος Κανόνας Karnaugh

Αν η παράσταση μιάς λογικής συναρτήσεως 3 μεταβλητών περιέχει **4 γειτονικές μονάδες σε σχήμα τετραγώνου ή ευθείας**, τότε οι αντίστοιχοι 4 ελάχιστοι όροι **αντικαθίσταται υφ᾽ ενός**, που περιέχει τον ένα κοινόν όρο. Π.χ., για τις συναρτήσεις που ακολουθούν: F_1, F_2 και F_3 έχουμε:

Κοινός όρος είναι ο $B \rightarrow$ οπότε τελικά η F_1 γίνεται:

F_1 :

			$\overbrace{\quad\quad\quad\quad}^{B}$	
			1	1
A			1	1
		$\underbrace{\quad\quad\quad\quad}_{C}$		

$F_1(A, B, C) = B$

(**Ερώτηση:** Ποιά ήταν η $F_1(A, B, C)$ αρχικά και **ποιός είναι ο πίνακας αληθείας της τελικά**;).

Παρόμοια, στη συνάρτηση F_2 που αποδίδεται από τον παρακάτω χάρτη Karnaugh, παρατηρούμε ότι **ο κοινός όρος είναι ο** $\bar{A}$. Άρα θα έχουμε:

F_2 :

			$\overbrace{\quad\quad\quad\quad}^{B}$	
	1	1	1	1
A				
		$\underbrace{\quad\quad\quad\quad}_{C}$		

$F_2(A, B, C) = \bar{A}$

(**Ερώτηση:** Ποιά ήταν η $F_2(A,B,C)$ αρχικά και ποιός ο πίνακας αληθείας της τελικά;).

Γενίκευση Κανόνων Karnaugh

Οι παραπάνω κανόνες γενικεύονται για 4 μεταβλητές, οπότε πλέον οι γειτονικές μονάδες θα είναι 2^3 (αντί των 2^1 =**2** και 2^2 =**4**). Έτσι, εάν η παράσταση της λογικής συναρτήσεως είχε την παρακάτω μορφή στον χάρτη Karnaugh, τότε θα έχουμε δύο ομάδες γειτονικών μονάδων με κοινές μεταβλητές τις B και C, αντίστοιχα, οπότε τότε θα έχουμε:

F_3:

AB \ CD		D	D, C	C	
			1	1	
	1	1	1	1	B
A	1	1	1	1	B
A			1	1	

$$F_3(A,B,C,D) = B + C.$$

Ερώτηση: Ποιά ήταν η αρχική μορφή της $F_3(A, B, C, D) =$; που παρίσταται στον προηγούμενο χάρτη Karnaugh. Ο πίνακας αληθείας της τελικά ποιός είναι;)