Hopf και Frobenius άλγεβρες: γενικεύσεις και το θεώρημα Larson-Sweedler

Χριστίνα Βασιλακοπούλου

University of California, Riverside

Τμήμα Μαθηματικών & Εφαρμοσμένων Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο Κρήτης

3 Σεπτεμβρίου 2018

1. Hopf και Frobenius άλγεβρες
2. Hopf και Frobenius (εμπλουτισμένες) κατηγορίες
3. Το Θεώρημα Larson-Sweedler

Μία Hopf k-άλγεβρα είναι Frobenius
αν και μόνο αν είναι πεπερασμένης διάστασης.

$\star$ Πώς μπορούμε να γενικεύσουμε το αποτέλεσμα από ένα σώμα k σε αντιμεταθετικούς δακτυλίους ή και γενικότερες δομές;

Αμφιάλγεβρες (Bialgebras)

Έστω k σώμα.

▶Μια k-άλγεβρα (M, μ, η) είναι ένα μονοειδές (monoid) στη συμμετρική μονοειδή κατηγορία $(\mathbf{Vect}_k, \otimes, k)$.

▶Μια k-συνάλγεβρα (C, δ, ϵ) είναι ένα συμμονοειδές (comonoid) στη $(\mathbf{Vect}_k, \otimes, k)$.

▶Μια k-αμφιάλγεβρα $(A, \mu, \eta, \delta, \epsilon)$ είναι ένα αμφιμονοειδές (bimonoid) στη $(\mathbf{Vect}_k, \otimes, k)$:

$$\begin{tikzcd} A \otimes A \arrow[r, "\delta\otimes\delta"] \arrow[dd, "\mu"'] & A \otimes A \otimes A \otimes A \arrow[d, "1\otimes\sigma\otimes1"] \\ & A \otimes A \otimes A \otimes A \arrow[d, "\mu\otimes\mu"] \\ A \arrow[r, "\delta"] & A \otimes A \end{tikzcd}$$

$$\sum_{(gh)} (gh)_{(1)} \otimes (gh)_{(2)} = \sum_{(g),(h)} g_{(1)} h_{(1)} \otimes g_{(2)} h_{(2)}$$

+3 επιπλέον συνθήκες.

Hopf άλγεβρες

▶ Μια k-αμφιάλγεβρα A ονομάζεται Hopf εάν υπάρχει $s\colon A \to A$, ο *αντίποδας* (antipode), τέτοιος ώστε

$$\begin{tikzcd}
 & A \otimes A \arrow[rr, "1\otimes s"] & & A \otimes A \arrow[dr, "\mu"] & \\
A \arrow[ur, "\delta"] \arrow[rr, "\epsilon"] \arrow[dr, "\delta"'] & & k \arrow[rr, "\eta"] & & A \\
 & A \otimes A \arrow[rr, "s\otimes 1"'] & & A \otimes A \arrow[ur, "\mu"'] &
\end{tikzcd}$$

Είναι ένα Hopf μονοειδές της $(\mathbf{Vect}_k, \otimes, k)$.

Παραδείγματα

- Ομάδα-άλγεβρα $k[G] = \{\sum_{r_g \in k} r_g g\}$ μιας ομάδας G, $\delta(x) = x \otimes x$.
- Καθολική περιβάλλουσα άλγεβρα $U(L)$ μιας Lie αλγεβρας L, $\delta(x) = x \otimes 1 + 1 \otimes x$.
- Άλγεβρα συντ/νων $k[x_1, ..., x_n]/I(G)$ μιας αλγεβρικής ομάδας G.

Frobenius άλγεβρες

▶ Μια k-άλγεβρα και k-συνάλγεβρα $(A, \mu, \eta, \delta, \epsilon)$ είναι Frobenius εάν

$$\begin{tikzcd}
A \otimes A \arrow[rr, "\delta\otimes 1"] \arrow[d, "1\otimes\delta"'] \arrow[dr, "\mu"] & & A \otimes A \otimes A \arrow[d, "1\otimes\mu"] \\
A \otimes A \otimes A \arrow[rr, "\mu\otimes 1"'] & A \arrow[r, "\delta"] & A \otimes A
\end{tikzcd}$$

Είναι ένα Frobenius μονοειδές της $(\mathbf{Vect}_k, \otimes, k)$.

⋆ Κάθε Frobenius k-άλγεβρα είναι πεπερασμένης διάστασης.

Παραδείγματα

- Άλγεβρα πινάκων $M_n(k)$, $\epsilon(X) = \mathrm{tr}(X)$.
- $k[G]$ για πεπερασμένη ομάδα, $\delta(g) = \sum_h gh^{-1} \otimes h$.
- Frobenius άλγεβρες αντιστοιχούν σε διδιάστατες TQFT .

Hopf κατηγορίες

⋆ Αν $(\mathcal{V}, \otimes, I, \sigma)$ συμμετρική μονοειδής, **Comon**$(\mathcal{V})$ είναι μονοειδής:

$$C \otimes D \xrightarrow{\delta\otimes\delta} C \otimes C \otimes D \otimes D \xrightarrow{1\otimes\sigma\otimes 1} C \otimes D \otimes C \otimes D$$

Ορισμός

Μια Hopf $\mathcal{V}$-κατηγορία $(\mathcal{H}, m, j, d, e, s)$ είναι

- **Comon**$(\mathcal{V})$-εμπλουτισμένη (κάθε $H_{x,y}$ είναι συνάλγεβρα), και
- εφοδιασμένη με συλλογή μορφισμών $s_{x,y} : H_{x,y} \to H_{y,x}$(συνθήκες).

▶ Μια **Comon**$(\mathcal{V})$-κατηγορία με ένα αντικείμενο είναι μια αμφιάλγεβρα.

▶ Μια Hopf $\mathcal{V}$-κατηγορία με ένα αντικείμενο είναι μια Hopf άλγεβρα.

Αξιώματα

- $m_{xyz}\colon H_{x,y} \otimes H_{y,z} \to H_{x,z},\quad j_x\colon I \to H_{x,x}$ γινόμενο ‘ολικά’
- $d_{ab}\colon H_{a,b} \to H_{a,b} \otimes H_{a,b},\quad e_{ab}\colon H_{a,b} \to I$ συνγινόμενο ‘τοπικά’

$$
\begin{tikzcd}
H_{x,y} \otimes H_{y,z} \arrow[r, "d_{xy}\otimes d_{yz}"] \arrow[dd, "m_{xyz}"'] & H_{x,y} \otimes H_{x,y} \otimes H_{y,z} \otimes H_{y,z} \arrow[d, "1\otimes\sigma\otimes 1"] \\
 & H_{x,y} \otimes H_{y,z} \otimes H_{x,y} \otimes H_{y,z} \arrow[d, "m_{xyz}\otimes m_{xyz}"] \\
H_{x,z} \arrow[r, "d_{xz}"'] & H_{x,z} \otimes H_{x,z}
\end{tikzcd}
$$

- $s_{xy}\colon H_{x,y} \to H_{y,x}$ αντίποδας ‘ολικά’

$$
\begin{tikzcd}
 & H_{x,y} \otimes H_{x,y} \arrow[rr, "1\otimes s_{xy}"] & & H_{x,y} \otimes H_{y,x} \arrow[dr, "m_{xyx}"] & \\
H_{x,y} \arrow[ur, "d_{xy}"] \arrow[rr, "e_{xy}"] & & I \arrow[rr, "j_x"] & & H_{x,x}
\end{tikzcd}
$$

Frobenius κατηγορίες

⋆ Μια $\mathcal{V}$-οπκατηγορία (opcategory) είναι $\mathcal{V}^{\mathrm{op}}$-εμπλουτισμένη.

$c_{xyz} \colon A_{x,z} \to A_{x,y} \otimes A_{y,z}, \quad \varepsilon_x \colon A_{x,x} \to I$ +δυϊκά αξιώματα

Ορισμός

Μια $\mathcal{V}$-Frobenius κατηγορία $(\mathcal{A}, m, j, c, \varepsilon)$ είναι

- $\mathcal{V}$-εμπλουτισμένη και $\mathcal{V}^{\mathrm{op}}$-εμπλουτισμένη, και
- ικανοποιεί 'παραμετρικοποιημένες' Frobenius ιδιότητες

$$\begin{tikzcd}
A_{x,y} \otimes A_{y,z} \arrow[rr, "c_{xwy} \otimes 1"] \arrow[dr, "m_{xyz}"] \arrow[dd, "1 \otimes c_{ywz}"'] & & A_{x,w} \otimes A_{w,y} \otimes A_{y,z} \arrow[dd, "1 \otimes m_{wyz}"] \\
& A_{x,z} \arrow[dr, "c_{xwz}"] & \\
A_{x,y} \otimes A_{y,w} \otimes A_{w,z} \arrow[rr, "m_{xyw} \otimes 1"'] & & A_{x,w} \otimes A_{w,z}
\end{tikzcd}$$

▶ Frobenius $\mathcal{V}$-κατηγορία με ένα αντικείμενο είναι Frobenius άλγεβρα.

Larson-Sweedler για Hopf και Frobenius κατηγορίες

▶Μια $\mathcal{V}$-κατηγορία $\mathcal{A}$ είναι τοπικά αυστηρή (locally rigid) όταν κάθε $A_{x,y}$ έχει δυϊκό στη $\mathcal{V}$. Π.χ. κάθε $\mathbf{Vect}_k^f$-κατηγορία.

▶Για μια Hopf $\mathcal{V}$-κατηγορία $(\mathcal{H}, m, j, d, e, s)$, το αριστερό ολοκλήρωμα (left integral) για κάθε $H_{x,y} \in \mathcal{V}$ είναι

$$\int_{H_{x,y}}^{\ell} := \{t \colon I \to H_{x,y} | h \circ t = e_{xx}(h) \circ t, \forall h \in H_{x,x}\}$$

> Έστω $\mathcal{H}$ μια Hopf $\mathcal{V}$-κατηγορία. Τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:
>
> - $\mathcal{H}$ είναι Frobenius $\mathcal{V}$-κατηγορία
> - $\mathcal{H}$ είναι τοπικά αυστηρή και $\int_{H_{x,x}}^{\ell} \cong I$.

⋆ Στην ειδική περίπτωση του ενός αντικειμένου, k-άλγεβρες, R-άλγεβρες, οποιαδήποτε Hopf και Frobenius μονοειδή...
⋆ Στη γενική περίπτωση, R-γραμμικές κατηγορίες, ασθενείς και Turaev Hopf άλγεβρες...

Ευχαριστώ για την προσοχή σας!

$$\begin{tikzcd} {} \arrow[r] \arrow[d] & {} \arrow[d] \\ {} \arrow[r] & {} \end{tikzcd}$$