

Ἐπόσαο Ἄε. Ἀñüσί ò

**ΕΙΣΑΓΩΓΗ
ΣΤΗ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΣΚΕΨΗ**

Τόμ. Ιος: Μαθηματικές Περιηγήσεις



Ἐññá 1999

«Έὐεὰ ἰάεçì áóεὐ ὀάτλαέ
όççí áöçñçìÝίç ἀάτῆύόçόά,
ðñÝðáε ἰά ἀñ=λαε εάε ἰά ὀάεάεπρίε
όόι ὀάεάεñεὶ Ýίι εάε ὀόι ἀεάεὐ»

R. Courant

Οἱ ἀνάεόεὐ ὀι ὀ Escher, ὀι ὀ ὀðÙñ=άε ὀόι ἀίπöεεὶ, ἰάð ἀβρίε ἰά
εάὀι áóóύ ðñüðì ὀç ὀ=Ýόç ὀύι áöçñçìÝίç ἰά εççì áóεεπρί, ὀύι ἀðε-
όççìπρί εάε ὀι ὀ ðñάάι áóεεὶ ý εὐόιι ὀ.
Ἴε ἀðεάεýðáð ὀι ὀ ἀðñÝáι ὀ (Èáùñλα ἼιÙäù-tesseiations) ðáñέὀÙίι ὀι
ὀά áöçñçìÝίá ἰά εççì áóεὐ. Ἴ ðáβρί ἰάð ç ὀáγñά ὀόι ἀñὀβ, áðü
ὀόάεάεñεὶ Ýίç ἀβρίάε ἀáçñçìÝίç εάε áçìý ἀìðεì ὀέὀόáβ ἰά ὀέὀ ἰάεçì áóεéÝò
εάùñλαð, ἀααβρίε áðü ὀι ἀñὀβ εάε ἀβρίάε ἰάίÙ ὀάεάεñεὶ Ýίç. Ἀόέ ὕðùð
ἀβρίε ἰάεçì áóεὐ ὀι ὀβ, εὀñεáýáε ὀέὀ ὀðóéÝò ἀðέὀβιáð (ὀι áεάεβί), ὀç
Ἀáùì áðñλα (ðñλαçίι) εάε ὀáεεὐ ἀñβέááὀάε ὀόçí εὶ ñὀὀβ ὀι ὀ
äùááεÙááñì ὀ, ὀι ὀ εάὀÙ ὀι ἰ ðεÙðçἰά ὀόι áì ελαε ὀι ὀýì ðáί. Ἄ=ι ἰάð
ὀççí ὀáðááβέçççç ὕὀε ἀβρίε εðñλαñ=ç ὀι ὀ ὀýì ðáί ὀι ὀ, ἰáὀðóÙáε ἰά
áðáñÝóεάεá, áεεὐ ὀáεεὐ ἰά ἰáðÝçðáε ὀόç ὀέεçñβ ðñάάι áóεεὐόçόά
(ὀόάέÙñά εάε ὀðñὀά), áεá ἰά ἰά ἰáñ=βáε Ùέεç ἰεá ðáñεπαçόç, áð' ὀççí ἰ ðι ἰá
áéðλαε ἰά áááβ ὀι ὀβὀáñç.



Έὐεὰ ἀίβέει ἀί ὀβὀðì ὀÝñáε ὀççí ὀðì áñáðβ ὀι ὀ ὀááñáὀÝá:

© Èùόάð Ἀέ. Ἀñì ὀι ὀ, 1999
☎ +3(0.61) 997-387
✉ cdrossos@math.upatras.gr
🌐 <http://www.math.upatras.gr/~cdrossos/>



Π Ρ Ο Λ Ο Γ Ο Σ

Το βιβλίο αυτό, άρχισε σαν πρόχειρες σημειώσεις για το μάθημα του πρώτου έτους των Μαθηματικών : «ΠΕΡΙΗΓΗΣΗ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ», που ενσωματώθηκε στο νέο πρόγραμμα σπουδών του Τμήματος Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Πατρών, το 1983.

Στόχος του μαθήματος αυτού είναι, να δώσει στο νέο φοιτητή των Μαθηματικών, μία σφαιρική αντίληψη για τα Μαθηματικά και τις μεθόδους που χρησιμοποιούν. Επιπλέον επιδιώκεται αφ' ενός να προετοιμάσει το φοιτητή τεχνικά, μεθοδολογικά, αλλά και ψυχολογικά για την επιτυχή αντιμετώπιση των μετέπειτα σπουδών του, αφ'ετέρου δε, να του δώσει ένα ελάχιστο υπόβαθρο μαθηματικής κουλτούρας, απαραίτητης για τη δημιουργία ενός κατάλληλου κλίματος, μέσα από το οποίο μπορεί να ευδοκιμήσει η μαθηματική σκέψη. Η ανάπτυξη της διαίσθησης του φοιτητή και γενικότερα τα μη-αναλυτικά χαρακτηριστικά των Μαθηματικών, αποτελούν βασικό στόχο του βιβλίου. Τα Μαθηματικά ως πεπτούσια (βλ. Σχήμα 1.25), δεν περιορίζονται μόνον στα αναλυτικολογικά τους χαρακτηριστικά.

Το περιηγητικό πνεύμα του μαθήματος δεν εξαντλείται βεβαίως σε μια συρραφή κάποιων διαφορετικών μαθηματικών γνώσεων, αλλά κυρίως πραγματώνεται στο πλησίασμα και την προοπτική σύλληψη της ουσίας των μαθηματικών, μέσα ακριβώς από τις γνώσεις αυτές και τις σχετικές παρατηρήσεις και σχόλια.

Στην απεραντοσύνη της αναλυτικής μαθηματικής γνώσης και τον κυκεώνα της κατακερματισμένης μαθηματικής ουσίας, αναζητούμε, μέσα από τη συνθε-

τική σκέψη, την αλληλουχία των εννοιών και των μαθηματικών θεωριών, αλλά και τη σχέση τους με την αντικειμενική πραγματικότητα.

Όλα αυτά προοπτικά, οδηγούν και μετατρέπουν την «ξερή» τεχνική μαθηματική γνώση σε μια συνθετική μαθηματική σοφία. Είναι ακριβώς τότε, που τα μαθηματικά και η φιλοσοφία ενώνονται σε μια «τέλεια γνώση».

Την τελευταία δεκαπενταετία το βιβλίο αυτό έχει εκτυπωθεί σε πολλές προκαταρκτικές εκδόσεις, κυρίως για την εξυπηρέτηση των φοιτητών του Μαθηματικού Τμήματος. Μετά από την πείρα αυτών των ετών, και μετά από πολλές εκδοτικές περιπέτειες, οι παλιές πρόχειρες σημειώσεις ξαναγράφτηκαν για να αποτελέσουν το παρόν βιβλίο,

ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΣΚΕΨΗ

που τελικά θα αναπτυχθεί σε δύο τόμους:

Τόμος 1ος: Μαθηματικές Περιηγήσεις.

Τόμος 2ος: Το Περιεχόμενο, η Μεθοδολογία και η Φιλοσοφία των Μαθηματικών

Τα Κεφάλαια 0, 1 και 3 μαζί με μία μικρή εισαγωγή στο Κεφάλαιο 2 του παρόντος πρώτου τόμου, αποτελούν την ύλη γύρω από την οποία κυρίως επικεντρώνονται οι διαλέξεις του μαθήματος. Επιπρόσθετα υπάρχει συνήθως ένα άτυπο και προαιρετικό εβδομαδιαίο σεμινάριο, όπου γίνονται ελεύθερες συζητήσεις σχετικά με τα μαθηματικά. Όπως συνηθίζεται, υπάρχουν και φροντιστηριακές ώρες, όπου η έμφαση δίνεται σε τεχνικές από τη Θεωρία Επίλυσης Προβλήματος (Problem Solving). Πριν κλείσουμε το προλογικό αυτό σημείωμα, θα θέλαμε να παρατηρήσουμε τα ακόλουθα:

(i) Η μέθοδος με την οποία προσπαθούμε να πετύχουμε τους στόχους μας είναι η ακόλουθη:

Με τη χρήση στοιχειωδών μαθηματικών στο τεχνικό επίπεδο και ως αφορμή, προσπαθούμε να διαυγάσουμε έννοιες και αποτελέσματα με συνθετικό-διαισθητικό τρόπο και με αντιλήψεις και φιλοσοφικές θεωρήσεις που προέρχονται από τεχνικά απρόσιτες, για το νεοεισερχόμενο, μαθηματικές θεωρίες (Μη- Συμβατικά Μαθηματικά, Θεωρία Τόπων και Κατηγοριών κ.λπ.) Η προοπτική αυτή προβολή πάνω σε προχωρημένες έννοιες και θεωρήσεις, βασισμένη σε συνθετικό και εννοιακό τρόπο, άλλοτε καταφέρνει να διαυγάσει τα πράγματα και άλλοτε παρουσιάζεται ως ασύλληπτη για τον αναγνώστη. Αυτό είναι φυσιολογικό και νομίζουμε θετικό για το βιβλίο και πρέπει να αναμένεται. Με την σταδιακή

ωρίμανση όμως του αναγνώστη, διαυγάζονται και τα λίγα σημεία, που αρχικά θεωρήθηκαν ασαφή και ασύλληπτα.

- (ii) Πρέπει από την αρχή να γίνει ένας σαφής διαχωρισμός μεταξύ τεχνικής μαθηματικής γνώσης και συνθετικής μαθηματικής σοφίας. Για τον Descartes και τον Leibniz «η σοφία είναι η τέλεια γνώση των αρχών όλων των επιστημών και της τέχνης εφαρμογής των». Στο Λεξικό της Φιλοσοφίας του A. Ladande, (τομ. τρίτος, Πάπυρος), βρίσκουμε την ακόλουθη άποψη του M. Bondel: «Στην παραδοσιακή γλώσσα, ο όρος **σοφία** έχει μία ισχυρή και τεχνική σημασία, η οποία επιφυλάσσει τη χρήση του για μία μορφή θεωρητικής και έμφυτου, συγκεκριμένης και συνθετικής, αγαπητής και απολαυστικής γνώσεως, της οποίας η αφηρημένη νόηση ή η διεξοδική σκέψη, δεν μπορούν ποτέ να φθάσουν την πληρότητα και το φως της, την ενότητα και την αποτελεσματικότητά της. Αυτή κατέχει τις αρχές που δεν τις παίρνει από καμιά άλλη επιστήμη. Και με μία ματιά πηγαίνει από τις υψηλές αιτίες στους τελευταίους σκοπούς. 'Η επιστήμη αποκτάται με τη μελέτη, αλλά η σοφία είναι έμφυτη μέσα μας' (S. Thomas, S. Th. I, Ia6). Ήταν ταυτόχρονα **γνώση** και **κλίση**, προχωρεί με την ενόραση του πραγματικού που είναι ατομικό με τον τρόπο της ομοφυΐας και της ενώσεως... Η επιστήμη είναι η πράξη του πνεύματος που γνωρίζει.

Η σοφία είναι η εμπειρία αυτής της ίδιας της πράξεως του πράγματος που γνωρίσαμε και γευτήκαμε, του όντος που επικοινωνεί και αφήνεται να κατέχεται, είναι η γνώση του intellectus με το ουσιαστικό του αντικείμενο, αλλά μέσα από την κύρια ενέργεια αυτού του ίδιου του αντικειμένου».

Σ' αυτό το βιβλίο, μέσα από παρατηρήσεις, σχόλια εικονικές παραστάσεις, φυσικές αναλογίες κ.λπ. γίνεται προσπάθεια να συντεθεί η τεχνική μαθηματική γνώση με τη συνθετική-φιλοσοφική διαύγαση. Η τακτική αυτή, εναρμονίζεται με το Δεύτερο Θεώρημα μη-Πληρότητας του Gödel, το οποίο συνεπάγεται ότι δεν πρόκειται ποτέ να πείσουμε τον εαυτό μας, ότι τα Μαθηματικά δεν περιέχουν αντινομίες και αντιφάσεις μέσα από μια τυπική απόδειξη συνέπειας. Το μόνο που απομένει είναι η ανάπτυξη μιας αυθεντικής και ξεκάθαρης μαθηματικής διαίσθησης, μέσα από την οποία μπορούμε να κερδίσουμε μια βεβαιότητα για τη συνέπεια των αποτελεσμάτων μας. Στο βιβλίο αυτό η εν λόγω διαίσθηση βασίζεται στην φιλοσοφική θέση ότι τα μαθηματικά αντικείμενα μέσα από τη διαλεκτική της αφαίρεσης του μακρόκοσμου, έχουν και αυτά κληρονομήσει ιδιότη-

τες εξαιρετικά παρόμοιες αν όχι και ταυτόσημες με τις ιδιότητες των υλικών μακροσκοπικών σωμάτων. Έχουμε δηλαδή εδώ μια προσπάθεια «επιστημονικοποίησης των Μαθηματικών» αντί της συνηθισμένης «μαθηματικοποίησης των επιστημών». Η θέση αυτή εκφράζεται πολύ καλά από το ακόλουθο απόσπασμα του P. Cohen (μετάλλιο Fields): «...όλη η διαίσθησή μας προέρχεται από την πίστη μας σ' ένα φυσικό, σχεδόν υλικό μοντέλο του μαθηματικού σύμπαντος.»¹

Πρέπει ακόμα να σημειωθεί, ότι η πλειοψηφία των επαγγελματιών μαθηματικών, παρ' όλο που η συνθετική σκέψη είναι η δύναμη-οδηγός στη δουλειά τους, δε συμπαθούν, αν κιόλας δεν εχθρεύονται, τις εξηγήσεις και παρατηρήσεις συνθετικού τύπου, από το φόβο, ότι είναι δυνατόν να οδηγήσουν σε λαναθασμένες αντιλήψεις. Αυτό φαίνεται καθαρά από τη ρήση του Hardy: «είναι μία μελαγχολική εμπειρία το να γράφει κανείς για τα μαθηματικά, παρά να αποδεικνύει θεωρήματα !»

Γενικότερα οι επαγγελματίες μαθηματικοί κάτω από το περιοριστικό δόγμα, ότι τα μαθηματικά ασχολούνται μόνο με το ψευδές και το αληθές, μόνο με το 0 – 1, μόνο με τα αναλλοίωτα μαθηματικά αντικείμενα, αντιπαθούν και ισχυρίζονται ότι, το ασαφές, το μεταβαλλόμενο, το μερικά σωστό, αλλά και οι φιλοσοφικές θεωρήσεις δεν έχουν θέση στα μαθηματικά.

Τελευταία όμως είμαστε μάρτυρες μιας ραγδαίας εξέλιξης προς την αντίθετη κατεύθυνση. Προς την κατεύθυνση, δηλαδή, που επιγραμματικά χαρακτηρίζουν οι Vorénka-Hájek: «*Παρουσιάζοντας τη Θεωρία των Ημισυνόλων, οι συγγραφείς ελπίζουν να συμβάλλουν στο να σπάσουν τα δεσμά της φυλακής στα οποία έχουν βρεθεί οι μαθηματικοί. Αυτή η φυλακή είναι η Καντοριανή Θεωρία Συνόλων, οι δε συγγραφείς πιστεύουν ότι οι μαθηματικοί θα δραπετεύσουν και από αυτή, όπως ακριβώς δραπέτευσαν από τη φυλακή του τρισδιάστατου χώρου*²». Θεωρίες που έχουν αναπτυχθεί, με στόχο την απελευ-

¹“... all our intuition comes from our belief in a natural, almost physical, model of mathematical universe.” (P. Cohen: *Set Theory and the Continuum Hypothesis*. Benjamin, 1966, p.107)

²Σχόλιο του συγγραφέα: Δεν είναι καθόλου σίγουρο ότι πράγματι δραπέτευσαν από τον τρισδιάστατο χώρο όχι μόνον τυπικά αλλά ουσιαστικά, αφού διαστάσεις πέρα από τις τρεις ή έστω τέσσερις, μόνον στην μικροσκοπική δομή της «μαθηματικής ύλης» μπορεί να αναζητηθούν. Για παράδειγμα ένα διάνυσμα που αναφέρεται στην κατάσταση υγείας ενός ατόμου και είναι π.χ. διαστάσεως 20, εμπλέκει εκτός ίσως από τις χωρικές συντεταγμένες, και συντεταγμένες που αναφέρονται στην πίεση στο βάρος, κ.λπ. που είναι χαρακτηριστικά του εσωτερικού επιπέδου του ανθρώπου. Στα μαθηματικά όμως δεν υπάρχει άμεσα εκπε-

θέρωση του μαθηματικού από τα δεσμά του 0 – 1, του σταθερού, αναλλοίωτου και απόλυτα ακριβούς, του ενεστωτικού απείρου κλπ. είναι:

η Θεωρία των Πιθανοτήτων και τα μη-προσθετικά μέτρα, η Στατιστική, η απειροστική ανάλυση και τα μη συμβατικά μαθηματικά γενικώς (μοντέλα του Boole), η Θεωρία των Θυσάνων ή Δραγμάτων (Sheaf Theory), η Θεωρία των Κατηγοριών και Τόπων, η Θεωρία των Ασαφών Συνόλων και των Πλειότιμων Λογικών, η Εναλλακτική Θεωρία Συνόλων του Vorënkà και η Εσωτερική Θεωρία Συνόλων του Nelson, κ.λπ. Όλα αυτά αλληλοσυσχετίζονται και καθορίζουν έναν κοινό πυρήνα εννοιών και μεθόδων, που θα μπορούσε να ονομαστεί μη-Καντοριανά Μαθηματικά. Είναι ακριβώς τα μαθηματικά που βασίζονται, στο αόριστο, στο μη-ακριβές, σε σχέσεις μη-διακριτότητας, στο εν δυνάμει άπειρο, κ.λπ.

Όλες αυτές οι θεωρίες έχουν ένα μη - Καντοριανό, και «επιστημικό» (epistemic) χαρακτήρα, καθώς επίσης και έναν τοπικό προσανατολισμό, εναρμονίζονται δε πλήρως με τις ανάγκες της πληροφορικής, της τεχνητής νοημοσύνης και γενικά της μεταβιομηχανικής κοινωνίας της πληροφορίας. Το ενεστωτικό άπειρο, η απόλυτη ακρίβεια και σαφήνεια, η διακριτικότητα, διασαλεύεται και απειλείται από τον αοριστολογικά πεπερασμένο, ασαφή και ρευστό κόσμο της οθόνης του υπολογιστή, επιβάλλοντας έτσι ένα αναπότρεπτο μη - Καντοριανό πλαίσιο για τα μαθηματικά. Ταυτόχρονα έχει αναπτυχθεί λογισμικό υπολογιστικής άλγεβρας, όπως π.χ. το Mathematica, το Maple V, το Reduce, το Derive κ.λπ. που όχι μόνον επιτρέπουν αλλά ίσως επιβάλλουν τη δημιουργία «μαθηματικού εργαστηρίου» όπου ο μαθηματικός μαζί με την ισχυρή οπτικοποίηση ή εξεικόνιση (visualization) που διαθέτει, μπορεί ταυτόχρονα να πειραματίζεται όπως ο φυσικός ή ο χημικός. Η διαλεκτική αυτή, της πλασματικής πραγματικότητας του νου και της εικονικής πραγματικότητας της οθόνης, σε σχέση με τον πραγματικό κόσμο, μέσα από κατάλληλο λογισμικό υπολογιστικής άλγεβρας, θα είναι η βάση και η μόνιμη πηγή έμπνευσης για τα μαθηματικά του 21^{ου} αιώνα, που σε τελευταία ανάλυση θα αναδείξουν όλα τα μη-Καντοριανά χαρακτηριστικά τους.

Την προοπτική αυτή τη βλέπουμε ήδη να επηρεάζει τις εξελίξεις στην Τεχνητή νοημοσύνη και Ρομποτική, όπου μια τοπική και μη-Καντοριανή έκφραση των μαθηματικών είναι η βάση για την παραπέρα ανάπτυξη.

Είναι εξ' άλλου γνωστό, ότι κάτω από τη Θεωρία Τόπων, έχουν πλέον συστεγαστεί η Αλγεβρική Γεωμετρία, τα μαθηματικά του διαισθητισμού και οι κατηγορικές λογικές ανώτερης τάξης. Έτσι κοντά στα μαθηματικά του «είναι»

φρασμένα μια θεωρία επιπέδων πραγματικότητας, ούτε μια θεωρία της δομής του σημείου, εκτός ίσως της απειροστικής ανάλυσης.

έχουμε τώρα και τα μαθηματικά του «γίγνεσθαι» που μια έκφρασή τους αποτελεί η Θεωρία Κατηγοριών και Τόπων. Στο μέλλον, η ανάδειξη, η διαισθητική θεμελίωση και κατανόηση όλων των μη-Καντοριανών χαρακτηριστικών των Μαθηματικών, θα κατοχυρώσουν το γνωστό χαρακτηρισμό της Θεωρίας Τόπων ως «Τοποσοφίας».

Το βιβλίο αυτό, προσπαθεί να δει τα στοιχειώδη μαθηματικά από μία τέτοια προχωρημένη φιλοσοφικό-μαθηματική τοποθέτηση, αλλά ταυτόχρονα χρησιμοποιεί την παραδοσιακή έκφραση. Το αναγνωστικό κοινό στο οποίο απευθύνεται το βιβλίο, είναι κυρίως οι φοιτητές των μαθηματικών, αλλά και άλλων κλάδων, οι καθηγητές των μαθηματικών της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης, οι φιλόσοφοι που ενδιαφέρονται για μία φιλοσοφίζουσα εισαγωγή στα μαθηματικά, οι ψυχολόγοι που θα ήθελαν να διαπιστώσουν αν υπάρχουν ευέλικτα μαθηματικά κατάλληλα για τη μαθηματοποίηση των «μη-σκληρών» ή «μαλακών»³ επιστημών, και τέλος σ' όλους όσους ενδιαφέρονται για μία εισαγωγή στην ουσία των μαθηματικών.

Το βιβλίο αυτό ακολουθεί όσο είναι δυνατόν την ακόλουθη γενική μέθοδο:

- (i) **Εννοιολογική Ανάπτυξη.** Στη πρώτη αυτή φάση, γίνεται προσπάθεια για την ουσιαστική πρόσληψη της έννοιας. Αυτό επιτυγχάνεται μέσα από ιστορικά σχόλια, ενορατικές παρατηρήσεις, εμπειρικές προσομοιώσεις αλλά και οπτικοποιήσεις εννοιών, όπως η Ρωμαϊκή κρήνη, κ.λπ. Με τον τρόπο αυτό ενισχύεται η ανάπτυξη κριτικής σκέψης, η δημιουργικότητα, η ευρηματικότητα, και η φαντασία του σπουδαστή.
- (ii) **Τεχνική Ανάπτυξη.** Στη φάση αυτή εισάγονται με τεχνικό τρόπο, οι έννοιες που έχουν ήδη εμπεδωθεί στο προηγούμενο βήμα.
- (iii) **Προοπτικά Σχόλια.** Υπάρχουν πολλά πολύ προχωρημένα θέματα των Μαθηματικών, που είναι απρόσιτα για το νεοεισερχόμενο. Είναι δυνατόν ωστόσο, με τη χρήση μιας διαισθητικής γλώσσας, να μεταβιβαστεί η ουσία των εννοιών αυτών. Όταν αυτός ο δύσκολος στόχος είναι δυνατός θα προωθείται.
- (iv) **Περίληψη.** Είναι πάντοτε επιθυμητό, στο τέλος κάθε ενότητας να τονίζονται τα κύρια σημεία της ανάπτυξης. Η εργασία αυτή, ακόμα και στην περίπτωση που δεν υπάρχει εδώ για διάφορους λόγους, θα πρέπει να είναι βασικό μέλημα αυτού του ίδιου του σπουδαστή.

³soft sciences

(iv) **Επίλυση Ασκήσεων και Συμπληρώματα.** Κάθε βιβλίο θα πρέπει να δίνει οργανωμένες σε κατηγορίες ασκήσεις μαζί με υποδειγματικά λυμένες ασκήσεις για κάθε κατηγορία. Με την εμπειρία από την ενεργητική λύση ασκήσεων ο φοιτητής εκπαιδεύει το μη-αναλυτικό δεξί ημισφαίριό του στην κατάλληλη δόμηση των σχετικών προβλημάτων και μεθόδων. Αν το βιβλίο δεν κάνει τα παραπάνω με ικανοποιητικό τρόπο, τότε θα πρέπει ο φοιτητής με δική του πρωτοβουλία να κάνει κάτι ανάλογο.

Και μια τελευταία λέξη. Η σωστή διδακτική διαδικασία τελικά, αρχίζει με το να απευθύνεται κατάλληλα πρώτα στο δεξί ημισφαίριο του εκγεφάλου και να καταλήγει στην τεχνική ανάπτυξη, που τελικά είναι μια διαλεκτική σύνθεση των ικανοτήτων του δεξιού και του αριστερού ημισφαιρίου. Επίσης όπου είναι δυνατόν θα πρέπει να προτιμώνται οι γεωμετρικοί «συναλλοιώτοι ορισμοί» από τους αλγεβρικούς «ανταλλοιώτους». Περισσότερα για τα θέματα αυτά στον δεύτερο τόμο. Στο βιβλίο δεν ακολουθείται με γραμμικό τρόπο η πιο πάνω διαδικασία, αλλά γίνεται ωστόσο προσπάθεια για μια διαλεκτική μη-γραμμική σύνθεσή τους.

Η στοιχειοθεσία του βιβλίου έγινε από το συγγραφέα, με τη βοήθεια του $\text{W}\text{T}\text{E}\text{X}$ και του $\text{D}\text{v}\text{i}\text{W}\text{i}\text{n}$ για windows του Ιπποκράτη Σεντούκα, και του Ελληνικού $\text{L}\text{A}\text{T}\text{E}\text{X}$ των Μοσχοβάκη-Σπηλιώτη. Ο κ. Σεντούκας εκτός του ότι μου διέθεσε τις τελευταίες εκδόσεις των ανωτέρω προγραμμάτων, με βοήθησε στο χειρισμό των γραφικών, μέσω του $\text{D}\text{v}\text{i}\text{W}\text{i}\text{n}$. Τον ευχαριστώ θερμά και από τη θέση αυτή. Προηγούμενες πρόχειρες εκδόσεις είχαν στοιχειοθετηθεί με το $\text{V}\text{T}\text{E}\text{X}$, που είχε εξελληνιστεί από το συγγραφέα. Ευχαριστίες οφείλονται στους φοιτητές μου, Ανδρέα Παπαδόπουλο και Άκη Ματζάρη για τη βοήθειά τους στη στοιχειοθεσία.

Ευχαριστίες επίσης οφείλονται στους φίλους μου, Καθηγητές Γ. Δάσιο και Γ. Γ. Ρούσσα, καθώς επίσης και στους συναδέλφους μου Ε. Παπαδοπετράκη και Α. Πατρώνη. Ευχαριστώ επίσης όλους τους φίλους και συναδέλφους, πολλούς για να αναφερθούν εδώ ονομαστικά, που με τον έναν ή άλλο τρόπο βοήθησαν στη συγγραφή αυτού του βιβλίου.

Τέλος ευχαριστώ τη σύζυγό μου Θέκλη και τα παιδιά μου Θανάση και Νικόλα, για την υπομονή που έδειξαν κατά τη διάρκεια της συγγραφής του βιβλίου αυτού, αλλά και για την ποικίλη βοήθεια που μου προσέφεραν.



Περιεχόμενα

Πρόλογος.	i
0 ΙΣΤΟΡΙΚΗ ΑΝΑΔΡΟΜΗ	1
0.1 Τα Προελληνικά Μαθηματικά.	2
0.2 Τα Ελληνικά Μαθηματικά.	5
0.3 Θαλής - Πυθαγόρας - Εύδοξος.	7
0.4 Ευκλείδης - Αρχιμήδης - Απολλώνιος.	10
0.5 Η Παρακμή των Ελληνικών Μαθηματικών.	12
0.6 Αραβικά Μαθηματικά.	13
0.7 Δυτικά Μαθηματικά.	14
0.8 Fibonacci - Tartaglia - Cardano.	15
0.9 Francois Viète.	16
0.10 Τα Σύγχρονα Μαθηματικά.	17
DESCARTES - FERMAT - PASCAL.	17
NEWTON - LEIBNIZ.	18
Ο EULER.	19
Ο GAUSS.	21
Ο 19 ^{ος} ΑΙΩΝΑΣ ΚΑΙ ΟΙ ΣΥΓΧΡΟΝΕΣ ΤΑΣΕΙΣ.	22
0.11 Μαθηματικά και Υπολογιστές.	31
ΣΥΝΤΟΜΗ ΙΣΤΟΡΙΚΗ ΑΝΑΔΡΟΜΗ.	31
Η ΚΑΤΑΣΤΑΣΗ ΜΕΤΑ ΤΗΝ ΠΡΩΤΗ ΒΙΟΜΗΧΑΝΙΚΗ ΕΠΑΝΑΣΤΑΣΗ.	33
Η ΔΕΥΤΕΡΗ ΒΙΟΜΗΧΑΝΙΚΗ ΕΠΑΝΑΣΤΑΣΗ.	34
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΕΣ.	35
ΟΙ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΕΣ ΣΤΗΝ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ.	36
 Βιβλιογραφία του 0 ^{ου} Κεφαλαίου	 47

1 ΣΥΝΟΛΑ	51
1.1 Βασικές Εννοιες.	51
1.2 Βασικές Εννοιες από τη Λογική	54
1.3 Ποσοδείκτες και Αντιπαδείγματα.	59
ΤΑΥΤΟΛΟΓΙΕΣ ΚΑΙ ΑΝΤΙΦΑΣΕΙΣ.	61
1.4 Σύνολα.	63
1.5 Η Εννοια της Συναρτήσεως.	70
ΣΧΕΣΕΙΣ.	70
ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ.	77
1.6 Το Πεπερασμένο και το Άπειρο.	92
1.7 Διατακτικοί Αριθμοί.	103
ΤΟ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΟ ΚΑΙ ΤΟ ΑΠΕΙΡΟ.	108
1.8 Συμπληρώματα και Ασκήσεις.	110
ΤΟ ΑΞΙΩΜΑ ΤΗΣ ΕΠΙΛΟΓΗΣ.	112
ΣΥΝΕΠΕΙΕΣ ΤΟΥ ΑΣ.	119
Ο ΡΟΛΟΣ ΤΟΥ ΑΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ.	120
1.9 Σύγχρονοι Προβληματισμοί. *	124
Βιβλιογραφία του 1^{ου} Κεφαλαίου.	131
2 ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΩΝ	135
2.1 Γεωμετρία και Συνθετική Σκέψη	135
2.2 Συνθετική Γεωμετρία Μετασχηματισμών	139
ΙΣΟΜΕΤΡΙΕΣ.	139
ΣΤΡΟΦΕΣ ΚΑΙ ΠΑΡΑΛΛΗΛΕΣ ΜΕΤΑΦΟΡΕΣ.	146
ΙΣΟΜΕΤΡΙΕΣ ΚΑΙ ΒΑΣΙΚΑ ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ.	151
Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΟΥ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ.	163
Η ΑΛΓΕΒΡΑ ΤΩΝ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΩΝ - ΟΜΑΔΕΣ.	166
ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ ΜΕ ΑΛΓΕΒΡΙΚΟΥΣ ΟΡΟΥΣ.	175
ΟΜΟΙΟΤΗΤΕΣ.	178
2.3 Αναλυτική Γεωμετρία Μετασχηματισμών.	189
Η ΕΥΘΕΙΑ ΘΕΩΡΟΥΜΕΝΗ ΩΣ ΣΩΜΑ.	191
ΤΟ ΕΠΠΕΔΟ ΩΣ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΟΣ ΧΩΡΟΣ.	193
ΥΠΟΧΩΡΟΙ, ΑΝΕΞΑΡΤΗΣΙΑ, ΒΑΣΕΙΣ.	196
ΓΡΑΜΜΙΚΟΙ ΚΑΙ ΑΦΙΝΙΚΟΙ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΙ.	203
Η ΑΛΓΕΒΡΑ ΤΩΝ ΓΡΑΜΜΙΚΩΝ ΑΠΕΙΚΟΝΙΣΕΩΝ.	210
2.4 Ιδιοτιμές και Ιδιοανύσματα.	222
2.5 Οι Μιγαδικοί Αριθμοί και ο Χώρος	224
ΟΙ ΜΙΓΑΔΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ.	224

Ο ΧΩΡΟΣ.	231
Βιβλιογραφία του 2^{ου} Κεφαλαίου.	237
3 ΑΠΕΙΡΟΣΤΑ	241
3.1 Εισαγωγή	241
3.2 Επιχειρήματα για τη μη-Ύπαρξη των Απειροστών.	246
3.3 Ενδείξεις για την Ύπαρξη των Απειροστών.	247
3.4 Το Διαλεκτικό Σχήμα: Σταθερό–Μεταβαλλόμενο.	248
3.5 Η Άρνηση της Άρνησης	251
3.6 Η Διάσπαση των Ατόμων του \mathbb{R}	255
3.7 Η Δομή του ${}^*\mathbb{R}$	265
ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΕΣ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ.	271
3.8 Το Σύστημα $(\mathbb{R}, {}^*\mathbb{R}, *)$	276
ΑΡΧΗ ΤΗΣ ΜΕΤΑΦΟΡΑΣ.	278
ΑΞΙΩΜΑΤΑ ΓΙΑ ΤΟ ΣΥΣΤΗΜΑ $(\mathbb{R}, {}^*\mathbb{R}, *)$	279
3.9 Βασικές Έννοιες του Απειροστικού Λογισμού.	282
ΟΡΙΑ ΚΑΙ ΣΥΝΕΧΕΙΑ.	282
ΣΥΝΕΧΕΙΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ.	286
ΠΑΡΑΓΩΓΟΙ ΚΑΙ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ.	291
ΔΙΑΦΟΡΙΚΑ ΚΑΙ ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΕΣ.	293
ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ.	300
ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΕΣ ΔΙΑΜΕΡΙΣΕΙΣ.	304
Βιβλιογραφία του 3^{ου} Κεφαλαίου.	317
4 ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑ	321
4.1 Εισαγωγή	321
4.2 Τυχαία Πειράματα.	323
4.3 Πιθανότητα	332
ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑ ΚΑΙ ΕΜΒΑΔΟ.	334
ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑ ΚΑΙ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΕΜΒΑΔΩΝ.	341
ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑ ΚΑΙ ΜΑΖΑ.	342
4.4 Χώροι Πιθανότητας και Τυχαία Πειράματα.	347
4.5 Ένα Μοντέλο Εμβαδού	347
4.6 Γεωμετρικές Πιθανότητες.	350
4.7 Δεσμευμένη Πιθανότητα και Ανεξαρτησία.	354
ΔΕΣΜΕΥΜΕΝΗ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑ.	354
ΔΕΝΔΡΟΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΑ.	358

ΑΝΕΞΑΡΤΗΣΙΑ.	361
ΑΝΕΞΑΡΤΗΤΑ ΠΕΙΡΑΜΑΤΑ ΤΥΧΗΣ.	367
4.8 Τυχαίες Μεταβλητές.	371
Τ. Μ. ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΟΥ ΠΛΗΘΟΥΣ ΤΙΜΩΝ.	378
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΛΠΙΔΑ	380
4.9 Η Δυωνυμική Κατανομή.	385
ΔΟΚΙΜΕΣ BERNULLI.	385
ΤΟ ΤΡΙΓΩΝΟ ΤΟΥ PASCAL.	385
ΜΟΝΤΕΛΑ ΓΙΑ ΤΗ ΔΥΩΝΥΜΙΚΗ ΚΑΤΑΝΟΜΗ.	386
Η ΡΩΜΑΪΚΗ ΚΡΗΝΗ.	386
ΆΛΛΑ ΜΟΝΤΕΛΑ.	387
Βιβλιογραφία του 4^{ου} Κεφαλαίου.	393

(Exert from the Introduction)

INTRODUCTION

This book started as Lecture Notes for a first year course in The Department of Mathematics -University of Patras. The title of the course was «**A Mathematical Journey**» which have been incorporated into the new Program of Study of the Mathematics Department in 1983.

The target of this course is to give to the new student of mathematics, a global conception for mathematics and their methods. In addition, on the one hand it tries to prepare the student from a technical, methodological and psychological point of view, in order to face successfully the subsequent studies, and on the other hand to give him/her a minimum of a mathematical culture, indispensable for the creation of an appropriate climate, on which a mathematical thinking can be developed.

The development of the intuition, and in general the non-analytic aspects of mathematics constitute a basic objective of the book. The mathematics as «pemptousia» (see Figure 1.25) does not restrict them only into their analytic aspects.

The expedition inception of the course, certainly is not exhausted with a «sewing together» certain mathematical pieces, but mainly it is materialized by approaching and grasping in perspective, the mathematical substance, exactly through these pieces of mathematics and the related remarks and comments.

In the wilderness of the analytical mathematical knowledge and the in the confusion of the splintering of mathematical substance, we are looking, using synthetic reasoning, for the interrelationship of the mathematical concepts and theories, but also for their relationship with thw real objective reality.

All these lead and transform the «dry» technical mathematical knowledge into a synthetic mathematical wisdom. It is exactly then where mathematics and philosophy are united into a «perfect knowledge».

In the last 15 years this book have been printed into many preliminary editions, mainly for the service of the students of the Department of Mathematics. After all these experiences and after many «publication adventures» the old Notes have been rewritten to form the present book:

INTRODUCTION TO MATHEMATICAL THOUGHT

which finally shall be developed into two volumes:

Vol.1 Mathematical Journeys.

Vol.2 The Content, the Method, and the Philosophy of Mathematics.

In the present book (vol. 1), Chapters 0,1 and 3, together with a crash introduction to Chapter 2, constitute the material of the lectures. In addition we run a non compulsory, weekly seminar, where we held free discussions concerning mathematics. In the «exercises session» we were focused on the Problem Solving techniques. ...

CONTENTS

Introduction.	i
CHAPTER 0: HISTORICAL REVIEW	
0.1 Prehellenic Mathematics	2
0.2 Greek Mathematics	3
0.3 Thales-Pythagoras-Eudoxus	7
0.4 Euclid-Archimedes-Appolonios	10
0.5 The Decline of Greek Mathematics	12
0.6 Arabic Mathematics	13
0.7 Western Mathematics	14
0.8 Fibonacci-Tartaglia-Cardano	15
0.9 Francois Viete	16
0.10 Modern Mathematics	17
• DESCARTES-FERMAT-PASCAL	17
• NEWTON-LEIBNIZ	18
• EULER	19
• GAUSS	21
• 19 th Century and Modern Trends	22
0.11 Mathematics and computers	31
• Short Historical Review	31
• The Situation After the First Industrial Revolution	33
• The second Industrial Revolution	34
• Mathematics and computer Science	35
• Computers in education	36
Bibliography of 0th Chapter	47
CHAPTER 1: SETS	51
1.1 Basic Concepts	51
1.2 Basic Concepts from Logic	54
1.3 Quantifiers and Counterexamples	59
• Tautologies and Contradictions	61
1.4 Sets	63
1.5 The Concept of a Function	70
• Relations	70
• Functions	77
1.6 The Finite and the Infinite	92
1.7 Ordinal Numbers	103
• The finite and the Infinite	108
1.8 Complements and Exercises	110
• The Axiom of Choice	112
• Consequences of the Axiom of Choice	119
• The role of AC in Mathematics	120
1.9 Contemporary Thinking	124
Bibliography of 1st Chapter	131
CHAPTER 2: FROM GEOMETRY TO ALGEBRA: An Introduction to Transformational Geometry.	135
2.1 Geometry and Synthetic Thought	135
2.2 Synthetic Transformational Geometry	139

• Isometries	139
• Rotations and Translations	146
• Isometries and Basic Theorems	151
• The concept of Orientation	163
• The Algebra of Transformations - Groups	166
• Geometric Concepts in Algebraic Terms	175
• Similarities	178
2.3 Analytic Transformational Geometry	189
• The Line considered as a Field	191
• The Plane Considered as a Vector Space	193
• Subspaces, Independence, Bases	196
• Linear and Affine Transformations	203
• The Algebra of Linear Transformations	210
2.4 Eigenvalues and Eigenvectors	222
2.5 The «True Metaphysics» of Complex Numbers and the Space	224
• Complex Numbers	224
• The space	231
Bibliography of 2nd Chapter	237
CHAPTER 3: INFINITESIMALS AND INFINITESIMAL CALCULUS:	
An Introduction into Dialectical Mathematics	241
3.1 Introduction	241
3.2 Arguments Against the Existence of Infinitesimals	246
3.3 The Dialectical Scheme: Constant vs. Variable	248
3.4 The Negation of Negation	251
3.5 The Splitting of the Atoms of \mathbf{R}	255
3.6 The Structure of $^*\mathbf{R}$	265
• Geometric Representations	271
3.7 The System $(\mathbf{R}, ^*\mathbf{R}, *)$	276
• Transfer Principle	278
• Axioms for ythe System $(\mathbf{R}, ^*\mathbf{R}, *)$	279
3.8 Basic Concepts of Infinitesimal Calculus	282
• Limits and Continuity	282
• Continuous Functions	286
• Derivatives and Integrals	291
• Differentials and Tangents	293
• Infinitesimal Partitions	304
 Bibliography of the 3 rd Chapter	 317
CHAPTER 4: PROBABILITY: An Intuitive Intoduction	321
4.1 Introduction	321
4.2 Random Experiments	323
4.3 Probability	332
• Probability and Area	334
• Probability and the Calculation of areas	341
• Probability and Mass	342
4.4 Probability Spaces and Random Experiments	347
4.5 An Area Model	347
4.6 Geometric Probabilities	350
4.7 Conditional Probability and Independence	354
• Conditional Probability	354
• Trees	358

• Independence	361
• Independent Random Experiments	367
4.8 Random Variables	371
• Finitely Valued r.v.	378
• Expected Value	380
4.9 Binomial Distribution	385
• Bernoulli Trials	385
• Pascal's Triangle	385
• Models for Binomial Distribution	386
• The Roman Sping	386
• Other Models	387
Bibliography of 4th Chapter.	393
Index	395